УДК 519.248

А.Н. ГОЛОДНИКОВ, Ю.М. ЕРМОЛЬЕВ, П.С. КНОПОВ

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ НАДЕЖНОСТИ В УСЛОВИЯХ НЕДОСТАТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Ключевые слова: *байесовская оценка, оптимизация, нижняя граница, функция распределения, квантиль*.

ВВЕДЕНИЕ

Крупнейшие аварии на АЭС «Тримайл Айленд» в США и на Чернобыльской АЭС коренным образом изменили подход к обеспечению безопасности на атомных станциях. До аварии на «Тримайл Айленд» в 1979 г. Комиссия по атомной энергии США (в настоящее время Комиссия по ядерному регулированию США (NRC)) осуществляла регулирование работы атомных станций, основываясь на детерминистическом подходе, при котором изучалась работа станции в конкретных, предварительно заданных режимах нормальной эксплуатации и аварий, и оценивалась эффективность применения различных защитных мероприятий. После этой аварии NRC существенно изменила подход к анализу безопасности АЭС, стимулировав бурное развитие вероятностного анализа безопасности (ВАБ), направленного не только на оценку последствий аварий, но и на оценку вероятностей этих последствий.

ВАБ стал систематически применяться с момента проведения анализа расплавленной активной зоны в 1975 г. [1]. В результате исследования были определены последовательности событий, которые потенциально могли привести к существенным выбросам радиоактивных веществ, оценены радиологические последствия этих событий и их вероятности. Основываясь на результатах этого исследования, NRC приняло решение о внедрении ВАБ [2]. Было издано руководство по ВАБ (the PRA Procedures Guide [3]), в котором рассматривались различные аспекты оценки риска и предлагались методы оценки риска на АЭС. Методология, изложенная в этом издании, широко использовалась при анализе безопасности на АЭС в 80- и 90-х годах прошлого века. Многие из ее положений не утратили силу и в настоящее время.

В 1988 г. NRC потребовала, чтобы АЭС провели анализ безопасности с использованием ВАБ. Результаты исследований на пяти АЭС рассмотрены в NUREG-1150 [4]. В этом документе усовершенствована методология ВАБ и намечены пути использования результатов анализа безопасности в регуляторной политике NRC. Методология ВАБ, изложенная в NUREG-1150, актуальна и в настоящее время. Она предназначена для генерирования сценариев аварий и получения количественных оценок риска, также позволяет выявлять возможные слабые места в конструкции АЭС. Поскольку результаты анализа безопасности используются при лицензировании станции, то одно из основных требований к ВАБ — обеспечение высокого уровня точности полученных оценок.

Согласно Руководству по безопасности МАГАТЭ [5] ВАБ выполняется на трех уровнях. На первом анализируются последовательности событий, которые могут привести к повреждению активной зоны, и оценивается вероятность ее повреждения. На втором уровне определяются пути возможных радиоактивных выбросов за пределы АЭС и оценивается их величина и частота реализации. На третьем уровне оценивается влияние аварии на здоровье, а также иные общественные риски: загрязнение территории или продовольствия.

ВАБ первого уровня в настоящее время провели на большей части атомных электростанций в мире. Однако в последние годы новым стандартом для многих типов атомных электростанций является выполнение ВАБ второго уровня. К настоящему времени выполнено относительно мало ВАБ третьего уровня [5].

Результаты ВАБ используются для разработки мероприятий, направленных на смягчение последствий аварий и как исходная информация для планирования технологического регламента станции, который проводится в целях контроля работоспособности единиц оборудования и устранения обнаруженных неисправностей. При этом для предотвращения ложного срабатывания систем безопасности испытываемая единица оборудования отключается от других систем, что повышает риск. Если при испытании обнаруживается отказ единицы оборудования, то проводятся ремонтные работы, если это возможно при работе блока на мощности. Результаты ВАБ используются для изучения вклада в риск, который возникает при выводе из эксплуатации единиц оборудования в целях проведения испытаний или технического обслуживания, а также для минимизации риска путем оптимизации периодичности и очередности проведения операций по испытанию и техническому обслуживанию.

Отправной точкой анализа безопасности является формирование набора исходных событий, которые либо непосредственно вызывают повреждение активной зоны, либо могут привести к таким событиям в случае невыполнения функций, предусмотренных для предотвращения таких повреждений или ограничения их размеров.

После того как отобраны исходные события, разрабатывается перечень функций безопасности, выполнение которых обеспечивает проектное протекание рассматриваемой аварии или уменьшение ее последствий. Основными функциями безопасности являются [5]: определение исходного события, останов реактора, отвод остаточных тепловыделений и защита активной зоны.

Для каждой функции безопасности определяются технологические системы (защитные, локализующие системы безопасности и системы нормальной эксплуатации), непосредственно выполняющие данную функцию безопасности. В зависимости от исходных событий и аварийных последовательностей эти функции безопасности могут быть реализованы системами безопасности, а в некоторых случаях — системами нормальной эксплуатации. Кроме того, определяются управляющие и обеспечивающие системы, необходимые для работы этих технологических систем.

Центральным звеном в ВАБ является разработка моделей надежности систем безопасности АЭС. Системы безопасности, как правило, состоят из нескольких взаиморезервирующих каналов, каждый из которых способен выполнить функцию всей системы в полном объеме. Поскольку системы безопасности выполняют функции безопасности при возникновении исходных событий, являющихся редкими событиями, для них характерны два режима работы: режим ожидания и режим выполнения заданных функций безопасности.

При нормальной работе энергоблока системы безопасности находятся в режиме ожидания в состоянии готовности к выполнению своих функций безопасности в случае возникновения исходных событий. При возникновении исходного события формируется требование на срабатывание систем безопасности, которые непосредственно выполняют заданные функции безопасности.

Показателем, характеризующим надежность системы безопасности по отношению к исходному событию, выступает вероятность невыполнения системой заданных функций безопасности при поступлении требования на ее срабатывание. Эта вероятность в общем случае является комплексным показателем, характеризующим надежность системы безопасности по отношению к режиму ожидания и режиму работы во время аварии после возникновения исходного события. Методика расчета вероятности невыполнения системой заданных функций безопасности основывается на методике системных деревьев отказов, с помощью которых определяются полные наборы неработоспособных состояний системы.

Несмотря на то, что метолология ВАБ интенсивно используется во всем мире, в ней все еще имеются отдельные недостатки. Для доработки слабых мест ВАБ в Институте кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины в 2001–2003 гг. выполнялся проект УНТЦ № G033. Исследования в рамках этого проекта проводились по двум основным направлениям.

1. Разработка принципиально нового подхода к оцениванию показателей надежности систем с учетом таких особенностей функционирования АЭС, как зависимость эффективности выполнения системой функций безопасности от набора отказавших единиц оборудования; зависимость процесса отказа оборудования не только от времени, но и от состояния среды; несовершенство индикации отказа и др.

2. Разработка методов анализа чувствительности байесовских оценок параметров надежности оборудования АЭС к выбору априорной функции распределения.

Исследования по первому направлению основывались на методе малого параметра и методах ускоренного моделирования, разработанных И.Н. Коваленко и Н.Ю. Кузнецовым [6–10]. Результаты исследований по этому направлению изложены в [11, 12].

Исследования по второму направлению базировались на вычислительных методах оптимизации в пространстве функций распределения, разработанных в [13–20]. Подход к анализу чувствительности байесовских оценок параметров надежности оборудования АЭС к выбору априорной функции распределения детально изложен в [21]. Результаты исследования чувствительности байесовских оценок параметров надежности некоторых единиц оборудования АЭС, выполненных в рамках этого проекта, изложены в [22, 23].

Один из способов преодоления проблемы малых выборок состоит в использовании не только информации, полученной при проведении текущего исследования надежности оборудования, но и в привлечении к анализу дополнительной информации из различных источников. К таким источникам относятся результаты предыдущих исследований аналогичного оборудования, результаты стендовых испытаний и инженерные расчеты.

В отличие от методов выборочной теории, байесовский подход допускает естественное объединение данных из различных источников для получения оценок параметров надежности. При этом каждый источник трактуется как выборка из одной популяции. Если при классическом подходе параметры функции распределения считаются константами, которые нужно оценить, то при байесовском параметры рассматриваются как случайные величины, которые описываются некоторой априорной функцией распределения. На практике, как правило, имеющейся априорной информации недостаточно для точного определения априорной функции распределения. В этих условиях проблема выбора априорной функции распределения и вычисления байесовских оценок становится нетривиальной.

Для того чтобы избежать произвола при выборе априорной функции распределения, базируясь на имеющейся частичной априорной информации, целесообразно использовать Г-минимаксный поход, впервые предложенный Робинсом [24] и развит Бергером [25]. В рамках Г-минимаксного подхода учитывается тот факт, что при использовании байесовских процедур на практике приходится иметь дело не с одной априорной функцией распределения, а с целым классом Г таких функций, причем каждую функцию распределения из этого класса можно выбрать в качестве априорной.

Если для любой функции распределения из класса Г вычислить значения некоторой апостериорной функции (например, апостериорный риск, математическое ожидание и др.), то получим целый диапазон таких значений. Этот диапазон используется как мера робастности [26–28]. Узкий диапазон означает, что значения апостериорной функции существенно не изменяется при любом выборе априорной функции распределения из указанного класса, т.е. она робастна по отношению к выбору априорной функции распределения. И, наоборот, когда этот диапазон широкий, то значения апостериорной функции чувствительны к выбору априорной функции распределения, т.е. она не является робастной. В последнем случае необходимо уделить особое внимание наименее благоприятной априорной функции распределения в классе Г и использовать Г-минимаксный подход для поиска робастной оценки.

В рамках Г-минимаксного подхода выбирается оценка, которая минимизирует супремум целевого функционала по функциям распределения, которые принадлежат классу Г [26]. При незначительноя объеме априорной информации класс Г априорных функций распределения является большим и полученные с помощью этого метода результаты близки к результатам, найденным при минимаксном подходе. В другом граничном случае, когда в наличии имеется достаточная априорная информация, класс Г может состоять только из одной априорной функции распределения и Г-минимаксный подход совпадает с обычным байесовским подходом.

Для того чтобы исследовать чувствительность байесовских оценок к выбору априорной функции распределения из класса Г, необходимо научиться отыскивать нижнюю и верхнюю границы диапазона возможных значений целевого функционала. Естественным выбором целевого функционала может быть математическое ожидание параметра θ при фиксированных выборочных данных x

$$E\{\theta|x\}=\frac{\int\limits_{\Theta}\theta\, f(x|\theta)\,dH(\theta)}{\int\limits_{\Theta} f(x|\theta)\,dH(\theta)}.$$

При использовании квадратичной функции потерь этот целевой функционал совпадает с байесовской оценкой $\hat{\theta}_H$ оцениваемого параметра θ. Если вычислить значения байесовской оценки $\hat{\theta}_H$ для любой априорной функции распределения $H\in\Gamma$, то получим диапазон возможных значений (θ_*, θ^*). Ширина этого диапазона служит мерой чувствительности байесовской оценки к выбору априорного распределения.

В данной статье усовершенствуются методы оптимизации в пространстве функций распределения и предлагается быстрый точный алгоритм построения нижней границы для диапазона возможных значений байесовских оценок параметров надежности, который учитывает специфику решаемой оптимизационной задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача минимизации дробно-линейного функционала

$$\varphi(H)=\frac{\psi_1(H)}{\psi_2(H)}=\frac{\int\limits_0^{\infty}\lambda^{s+1}e^{-\lambda t}dH(\lambda)}{\int\limits_0^{\infty}\lambda^{s}e^{-\lambda t}dH(\lambda)}\to\inf_{H\in\Gamma}, \quad (1)$$

где λ — параметр экспоненциального распределения, с помощью которого моделируются отказы оборудования; t — продолжительность промежутка времени, на котором наблюдаются отказы; $H(\lambda)$ — априорная функция распределения параметра λ, о которой известно только то, что она принадлежит классу Γ.

Обычно ограничения на функции распределения имеют достаточно простую структуру. Очень часто рассматривается класс Γ функций распределения, которые имеют фиксированные два квантиля: γ_1-квантиль, x_{γ_1}, и γ_2-квантиль, x_{γ_2}. Если функция распределения $H(x)$ непрерывна, то ее γ-квантиль $(0<\gamma<1)$ совпадает с корнем уравнения [29]

$$H(x_\gamma)=\gamma. \quad (2)$$

Если функция $H(x)$ разрывна, то γ-квантиль существует не для каждого γ, поскольку, как правило, при заданном γ найдется лишь такое x_γ, что

$$H(x_\gamma-0)\le\gamma<H(x_\gamma+0). \quad (3)$$

В невырожденном случае знаменатель функционала $\varphi(H)$ в (1) строго положительный, поэтому существует

$$u^*=\inf_{H\in\Gamma}\frac{\int\limits_0^{\infty}x^{s+1}e^{-xt}dH(x)}{\int\limits_0^{\infty}x^{s}e^{-xt}dH(x)}. \quad (4)$$

Если известно наименьшее значение (точная нижняя граница) дробно-линейного функционала (1), равное u^*, то задача (1) эквивалентна задаче

$$\inf_{H\in\Gamma}\psi(H)=\inf_{H\in\Gamma}[\psi_1(H)-u^*\psi_2(H)]=0. \quad (5)$$

Поскольку функционал $\varphi(H)$ положительный и ограниченный сверху, то найдется число $b>0$ такое, что при любом $H\in\Gamma$ значения функционала $\varphi(H)$ принадлежат отрезку $[0,b]$. С учетом этих замечаний ниже приводится алгоритм.

Шаг 1. Полагаем $s=1$; $a_1^0=0$; $a_2^0=b$.

Шаг 2. Вычисляем значение

$$u_s=\frac{a_1^{s-1}+a_2^{s-1}}{2}. \tag{6}$$

Шаг 3. Решаем задачу

$$w_s=\inf_{H\in\Gamma}[\psi_1(H)-u_s\psi_2(H)]. \tag{7}$$

Шаг 4. Если $w_s=0$, то получено решение задачи (5). В противном случае:

- если $w_s>0$, то полагаем $a_1^s=u_s, a_2^s=a_2^{s-1}$;
- если $w_s<0$, то полагаем $a_1^s=a_1^{s-1}$, $a_2^s=u_s$.

Полагаем $s=s+1$ и переходим на шаг 2.

Из результатов работы [14] следует, что решение задачи (7) в случае, когда класс Γ состоит из всех функций распределения, имеющих заданные два квантиля, достигается (или сколь угодно близко приближается) на ступенчатых функциях распределения с числом точек роста не больше трех. Поэтому при решении задачи (5) в дальнейшем будем рассматривать только класс Γ_3 всех трехступенчатых функций распределения $H(x)=(x_1,x_2,x_3,p_1,p_2,p_3)$, у которых γ_1-квантиль равен x_{γ_1} и γ_2-квантиль — x_{γ_2}. Здесь x_i — точка роста, скачок в которой равен p_i, $i=1,2,3$. Таким образом, при решения задачи (1) с использованием модифицированного алгоритма достаточно на шаге 3 решать внутреннюю задачу

$$\mathrm{w}_\mathrm{s}=\inf_{\mathrm{H}\in\Gamma_3}[\psi_1(\mathrm{H})-\mathrm{u}_\mathrm{s}\psi_2(\mathrm{H})]. \tag{8}$$

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧИ

Определим следующие подмножества класса Γ_3:

$$A_1=\{H(x)\in\Gamma_3: 0\le x_1<x_{\gamma_1}, 0\le p_1\le\gamma_1, x_1<x_2<x_{\gamma_1}, p_2=\gamma_1-p_1, x_3=x_{\gamma_2}, p_3=1-\gamma_1\};$$

$$A_2=\{H(x)\in\Gamma_3: 0\le x_1<x_{\gamma_1}, 0\le p_1<\gamma_1, x_2=x_{\gamma_1}, \gamma_1\le p_1+p_2<\gamma_2,$$
$$x_3=x_{\gamma_2},\ p_3=1-p_1-p_2\};$$

$$A_3=\{H(x)\in\Gamma_3: 0\le x_1<x_{\gamma_1}, 0\le p_1<\gamma_1, x_2=x_{\gamma_1},\ p_2=\gamma_2-p_1-0,$$
$$x_3\ge x_{\gamma_2},\ p_3=1-\gamma_2\};$$

$$A_4=\{H(x)\in\Gamma_3: 0\le x_1\le x_{\gamma_1},\ p_1=\gamma_1, x_{\gamma_1}<x_2<x_{\gamma_2}, 0\le p_2<\gamma_2-\gamma_1,$$
$$x_3=x_{\gamma_2}, p_3=1-\gamma_1-p_2\};$$

$$A_5=\{H(x)\in\Gamma_3: 0\le x_1\le x_{\gamma_1},\ p_1=\gamma_1, x_{\gamma_1}<x_2\le x_{\gamma_2},\ p_2=\gamma_2-\gamma_1,$$
$$x_3>x_{\gamma_2}, p_3=1-\gamma_2\};$$

$$A_6=\{H(x)\in\Gamma_3: 0\le x_1\le x_{\gamma_1},\ p_1=\gamma_1, x_2=x_{\gamma_2}, \gamma_2-\gamma_1\le p_2\le 1-\gamma_1,$$
$$x_3>x_{\gamma_2}, p_3=1-\gamma_1-p_2\};$$

$$A_7=\{H(x)\in\Gamma_3: x_1=x_{\gamma_1}, \gamma_1\le p_1<\gamma_2, x_{\gamma_1}<x_2<x_{\gamma_2}, 0\le p_2\le\gamma_2-p_1,$$
$$x_3=x_{\gamma_2},\ p_3=1-p_1-p_2\};$$

$$A_8=\{H(x)\in\Gamma_3: x_1=x_{\gamma_1}, \gamma_1\le p_1<\gamma_2, x_{\gamma_1}<x_2\le x_{\gamma_2},$$
$$p_2=\gamma_2-p_1, x_3>x_{\gamma_2},\ p_3=1-\gamma_2\};$$

$$A_9 = \{H(x) \in \Gamma_3 : x_1 = x_{\gamma_1}, \gamma_1 \le p_1 < \gamma_2, x_2 = x_{\gamma_2}, \gamma_2 - p_1 \le p_2 \le 1 - p_1,$$
$$x_3 > x_{\gamma_2},\ p_3 = 1 - p_1 - p_2\};$$
$$A_{10} = \{H(x) \in \Gamma_3 : x_1 = x_{\gamma_1},\ p_1 = \gamma_2, x_{\gamma_2} < x_2 < x_3, 0 \le p_2 \le 1 - \gamma_2, 0 \le p_3 \le 1 - \gamma_2 - p_2\}.$$

Легко проверить, что $\Gamma_3 = \bigcup_{i=1}^{10} A_i$. Следовательно,

$$\inf_{H \in \Gamma_3} [\psi_1(H) - u_s \psi_2(H)] = \min_{i \in \{1, \ldots, 10\}} \inf_{H \in A_i} [\psi_1(H) - u_s \psi_2(H)]. \tag{9}$$

Случай 1. $s = 0$. Рассмотрим поведение функции $g(x) = e^{-xt}(x - u)$, она обладает следующими свойствами: $g(0) = -u$; $g(u) = 0$; $g(x) \to 0$ при $x \to \infty$; $g'(x) = te^{-xt}\left[\left(u + \frac{1}{t}\right) - x\right]$. Следовательно, функция $g(x)$ возрастает при $x < u + \frac{1}{t}$ и убывает при $x > u + \frac{1}{t}$.

1.1. Минимизация на множестве A_1. При фиксированных $u > 0$ и $t > 0$ имеем

$$C_1^*(u,t) = \inf_{H \in A_1} \{\psi_1(H) - u\psi_2(H)\} =$$
$$= \inf_{\substack{0 \le x_1 < x_2 < x_{\gamma_1} \\ 0 \le p_1 \le \gamma_1}} [p_1 e^{-x_1 t}(x_1 - u) + (\gamma_1 - p_1) e^{-x_2 t}(x_2 - u) + (1 - \gamma_1) e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u)]. \tag{10}$$

Поскольку $g(x_2) > g(0)$, то для любого $x_2 > 0$ оптимальным решением задачи (10) является:

$$x_1^* = 0; \tag{11}$$
$$p_1^* = \gamma_1; \tag{12}$$
$$x_2^* \text{ — любое значение из интервала } (x_1, x_{\gamma_1}); \tag{13}$$
$$x_3^* = x_{\gamma_2}; \tag{14}$$
$$p_2^* = 0; \tag{15}$$
$$p_3^* = 1 - \gamma_1; \tag{16}$$
$$C_1^*(u,t) = (1 - \gamma_1) e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u) - \gamma_1 u. \tag{17}$$

1.2. Минимизация на множестве A_2. При фиксированных $u > 0$ и $t > 0$ имеем

$$C_2^*(u,t) = \inf_{H \in A_2} \{\psi_1(H) - u\psi_2(H)\} =$$
$$= \inf_{\substack{0 \le x_1 < x_{\gamma_1} \\ 0 \le p_1 < \gamma_1 \\ \gamma_1 \le p_1 + p_2 < \gamma_2}} [p_1 e^{-x_1 t}(x_1 - u) + p_2 e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) + (1 - p_1 - p_2) e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u)]. \tag{18}$$

Поскольку $g(x_{\gamma_1}) > g(0)$ и $g(x_{\gamma_2}) > g(0)$, то оптимальным решением задачи (18) будет:

$$x_1^* = 0; \tag{19}$$
$$p_1^* = \gamma_1 - 0; \tag{20}$$
$$x_2^* = x_{\gamma_1}; \tag{21}$$
$$p_2^* = \begin{cases} \gamma_2 - \gamma_1 - 0, \text{ если } e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) < e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u), \\ 0+ \qquad \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{22}$$
$$x_3^* = x_{\gamma_2}; \tag{23}$$
$$p_3^* = 1 - p_1^* - p_2^*. \tag{24}$$

$$C_2^*(u,t)=\begin{cases}(1-\gamma_1)e^{-x_{\gamma_2}t}(x_{\gamma_2}-u)-\gamma_1 u,\\ \text{если } e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1}-u)\ge e^{-x_{\gamma_2}t}(x_{\gamma_2}-u),\\ (\gamma_2-\gamma_1)e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1}-u)+(1-\gamma_2)e^{-x_{\gamma_2}t}(x_{\gamma_2}-u)-\gamma_1 u\\ \text{в противном случае}.\end{cases} \tag{25}$$

1.3. Минимизация на множестве A_3. При фиксированных $u>0$ и $t>0$ имеем

$$C_3^*(u,t)=\inf_{H\in A_3}\{\psi_1(H)-u\psi_2(H)\}=$$

$$=\inf_{\substack{0\le x_1<x_{\gamma_1}\\ 0\le p_1<\gamma_1\\ x_3\ge x_{\gamma_2}}}[p_1e^{-x_1t}(x_1-u)+(\gamma_2-p_1)e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1}-u)+(1-\gamma_2)e^{-x_3t}(x_3-u)]. \tag{26}$$

Поскольку $g(x_{\gamma_1})>g(0)$, то оптимальным решением задачи (26) является:

$$x_1^*=0; \tag{27}$$

$$p_1^*=\gamma_1-0; \tag{28}$$

$$x_2^*=x_{\gamma_1}; \tag{29}$$

$$p_2^*=\gamma_2-p_1^*-0; \tag{30}$$

$$x_3^*=\begin{cases}x_{\gamma_2}, \text{ если } x_{\gamma_2}\le u,\\ +\infty \text{ в противном случае};\end{cases} \tag{31}$$

$$p_3^*=1-\gamma_2; \tag{32}$$

$$C_3^*(u,t)=\begin{cases}(\gamma_2-\gamma_1)e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1}-u)+(1-\gamma_2)e^{-x_{\gamma_2}t}(x_{\gamma_2}-u)-\gamma_1 u,\\ \text{если } x_{\gamma_2}\le u,\\ (\gamma_2-\gamma_1)e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1}-u)-\gamma_1 u \text{ в противном случае}.\end{cases} \tag{33}$$

1.4. Минимизация на множестве A_4. При фиксированных $u>0$ и $t>0$ имеем

$$C_4^*(u,t)=\inf_{H\in A_4}\{\psi_1(H)-u\psi_2(H)\}=$$

$$=\inf_{\substack{0\le x_1\le x_{\gamma_1}\\ x_{\gamma_1}<x_2<x_{\gamma_2}\\ 0\le p_2<\gamma_2-\gamma_1}}[\gamma_1e^{-x_1t}(x_1-u)+p_2e^{-x_2t}(x_2-u)+(1-\gamma_1-p_2)e^{-x_{\gamma_2}t}(x_{\gamma_2}-u)]. \tag{34}$$

Оптимальным решением задачи (34) будет:

$$x_1^*=0; \tag{35}$$

$$p_1^*=\gamma_1; \tag{36}$$

$$x_2^*=\begin{cases}x_{\gamma_1}+0, \text{ если } e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1}-u)<e^{-x_{\gamma_2}t}(x_{\gamma_2}-u),\\ \text{любое значение из интервала } (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}) \text{ в противном случае};\end{cases} \tag{37}$$

$$p_2^*=\begin{cases}\gamma_2-\gamma_1-0, \text{ если } e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1}-u)<e^{-x_{\gamma_2}t}(x_{\gamma_2}-u),\\ 0 \quad \text{в противном случае};\end{cases} \tag{38}$$

$$x_3^* = x_{\gamma_2};\tag{39}$$

$$p_3^* = 1-\gamma_1 - p_2^*;\tag{40}$$

$$C_4^*(u,t)=\begin{cases}(1-\gamma_1)e^{-x_{\gamma_2}t}(x_{\gamma_2}-u)-\gamma_1 u, \text{ если } e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1}-u)\ge e^{-x_{\gamma_2}t}(x_{\gamma_2}-u),\\ (\gamma_2-\gamma_1)e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1}-u)+(1-\gamma_2)\,e^{-x_{\gamma_2}t}(x_{\gamma_2}-u)-\gamma_1 u\\ \text{в противном случае}.\end{cases}\tag{41}$$

1.5. Минимизация на множестве A_5. При фиксированных $u>0$ и $t>0$ имеем

$$C_5^*(u,t)=\inf_{H\in A_5}\{\psi_1(H)-u\psi_2(H)\}=$$

$$=\inf_{\substack{0\le x_1\le x_{\gamma_1}\\ x_{\gamma_1}<x_2\le x_{\gamma_2}\\ x_3>x_{\gamma_2}}}[\gamma_1 e^{-x_1 t}(x_1-u)+(\gamma_2-\gamma_1)e^{-x_2 t}(x_2-u)+(1-\gamma_2)e^{-x_3 t}(x_3-u)].\tag{42}$$

Оптимальным решением задачи (42) является:

$$x_1^*=0;\tag{43}$$

$$p_1^*=\gamma_1;\tag{44}$$

$$x_2^*=\begin{cases}x_{\gamma_1}+0, \text{ если } e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1}-u)<e^{-x_{\gamma_2}t}(x_{\gamma_2}-u),\\ x_{\gamma_2} \quad \text{в противном случае};\end{cases}\tag{45}$$

$$p_2^*=\gamma_2-\gamma_1;\tag{46}$$

$$x_3^*=\begin{cases}x_{\gamma_2}+0, \text{ если } x_{\gamma_2}\le u,\\ +\infty \quad \text{в противном случае};\end{cases}\tag{47}$$

$$p_3^*=1-\gamma_2;\tag{48}$$

$$C_5^*(u,t)=\begin{cases}(\gamma_2-\gamma_1)e^{-x_2^* t}(x_2^*-u)-\gamma_1 u, \text{ если } x_{\gamma_2}>u,\\ (\gamma_2-\gamma_1)e^{-x_2^* t}(x_2^*-u)+(1-\gamma_2)\,e^{-x_{\gamma_2}t}(x_{\gamma_2}-u)-\gamma_1 u\\ \text{в противном случае}.\end{cases}\tag{49}$$

1.6. Минимизацмя на множестве A_6. При фиксированных $u>0$ и $t>0$ имеем

$$C_6^*(u,t)=\inf_{H\in A_6}\{\psi_1(H)-u\psi_2(H)\}=$$

$$=\inf_{\substack{0\le x_1\le x_{\gamma_1}\\ \gamma_2-\gamma_1\le p_2\le 1-\gamma_1\\ x_3>x_{\gamma_2}}}[\gamma_1 e^{-x_1 t}(x_1-u)+p_2 e^{-x_{\gamma_2}t}(x_{\gamma_2}-u)+(1-\gamma_1-p_2)e^{-x_3 t}(x_3-u)].\tag{50}$$

Оптимальным решением задачи (47) является:

$$x_1^*=0;\tag{51}$$

$$p_1^*=\gamma_1;\tag{52}$$

$$x_2^*=x_{\gamma_2};\tag{53}$$

$$p_2^*=\begin{cases}1-\gamma_1, \quad \text{если } x_{\gamma_2}\le u,\\ \gamma_2-\gamma_1 \ \text{ в противном случае};\end{cases}\tag{54}$$

$$x_3^* = \begin{cases} \text{любое значение из интервала } (x_{\gamma_2}, \infty), \text{ если } x_{\gamma_2} \le u, \\ +\infty \text{ в противном случае;} \end{cases} \tag{55}$$

$$p_3^* = \begin{cases} 0, \quad \text{если } x_{\gamma_2} \le u, \\ 1-\gamma_2 \text{ в противном случае;} \end{cases} \tag{56}$$

$$C_6^*(u,t) = \begin{cases} (1-\gamma_1) e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u) - \gamma_1 u, \text{ если } x_{\gamma_2} \le u, \\ (\gamma_2 - \gamma_1) e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u) - \gamma_1 u \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{57}$$

1.7. Минимизация на множестве A_7. При фиксированных $u > 0$ и $t > 0$ имеем

$$C_7^*(u,t) = \inf_{H \in A_7} \{\psi_1(H) - u\psi_2(H)\} =$$

$$= \inf_{\substack{x_{\gamma_1} < x_2 < x_{\gamma_2} \\ \gamma_1 \le p_1 < \gamma_2 \\ 0 \le p_2 < \gamma_2 - p_1}} [p_1 e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) + p_2 e^{-x_2 t}(x_2 - u) + (1 - p_1 - p_2) e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u)]. \tag{58}$$

Оптимальным решением задачи (58) является:

$$x_1^* = x_{\gamma_1}; \tag{59}$$

$$p_1^* = \begin{cases} \gamma_2 - 0, \text{ если } e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) < e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u), \\ \gamma_1 \quad \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{60}$$

$$x_2^* \text{ — любое значение из интервала } (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}); \tag{61}$$

$$p_2^* = 0; \tag{62}$$

$$x_3^* = x_{\gamma_2}; \tag{63}$$

$$p_3^* = \begin{cases} 1 - \gamma_2, \text{ если } e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) < e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u), \\ 1 - \gamma_1 \quad \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{64}$$

$$C_7^*(u,t) = \begin{cases} \gamma_2 e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) + (1-\gamma_2) e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u), \\ \text{если } e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) < e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u), \\ \gamma_1 e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) + (1-\gamma_1) e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u) \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{65}$$

1.8. Минимизация на множестве A_8. При фиксированных $u > 0$ и $t > 0$ имеем

$$C_8^*(u,t) = \inf_{H \in A_8} \{\psi_1(H) - u\psi_2(H)\} =$$

$$= \inf_{\substack{x_{\gamma_1} < x_2 \le x_{\gamma_2} \\ \gamma_1 \le p_1 < \gamma_2 \\ x_3 > x_{\gamma_2}}} [p_1 e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) + (\gamma_2 - p_1) e^{-x_2 t}(x_2 - u) + (1 - \gamma_2) e^{-x_3 t}(x_3 - u)]. \tag{66}$$

Оптимальным решением задачи (66) будет:

$$x_1^* = x_{\gamma_1}; \tag{67}$$

$$p_1^* = \begin{cases} \gamma_2 - 0, \text{ если } e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) < e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u), \\ \gamma_1 \quad \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{68}$$

$$x_2^* = \begin{cases} \text{любое значение из интервала } (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}], \\ \text{если } e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) < (e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u), \\ x_{\gamma_2} \ \text{ в противном случае}; \end{cases} \quad (69)$$

$$p_2^* = \begin{cases} 0, & \text{если } e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) < e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u), \\ \gamma_1 - \gamma_2 & \text{в противном случае}; \end{cases} \quad (70)$$

$$x_3^* = \begin{cases} x_{\gamma_2} + 0, \text{ если } x_{\gamma_2} \le u, \\ +\infty \qquad \text{в противном случае}; \end{cases} \quad (71)$$

$$p_3^* = (1 - \gamma_2), \quad (72)$$

$$C_8^*(u,t) = p_1^* e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) + (\gamma_2 - p_1^*) e^{-x_2^* t}(x_2^* - u) + (1 - \gamma_2) e^{-x_3^* t}(x_3^* - u). \quad (73)$$

1.9. Минимизация на множестве A_9. При фиксированных $u > 0$ и $t > 0$ имеем

$$C_9^*(u,t) = \inf_{H \in A_9} \{\psi_1(H) - u\psi_2(H)\} =$$

$$= \inf_{\substack{\gamma_1 \le p_1 < \gamma_2 \\ \gamma_2 - p_1 \le p_2 \le 1 - p_1 \\ x_3 > x_{\gamma_2}}} [p_1 e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) + p_2 e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u) + (1 - p_1 - p_2) e^{-x_3 t}(x_3 - u)]. \quad (74)$$

Оптимальным решением задачи (74) выступает:

$$x_1^* = x_{\gamma_1}; \quad (75)$$

$$p_1^* = \begin{cases} \gamma_2 - 0, \text{ если } x_{\gamma_1} \le u, \\ \gamma_1 \qquad \text{в противном случае}; \end{cases} \quad (76)$$

$$x_2^* = x_{\gamma_2}; \quad (77)$$

$$p_2^* = \begin{cases} 1 - p_1^*, \ \text{ если } x_{\gamma_2} \le u, \\ \gamma_2 - p_1^* \text{ в противном случае}; \end{cases} \quad (78)$$

$$x_3^* = \begin{cases} \text{любое значение из интервала } (x_{\gamma_2}, +\infty), \text{ если } x_{\gamma_2} \le u, \\ +\infty \ \text{ в противном случае}; \end{cases} \quad (79)$$

$$p_3^* = 1 - p_1^* - p_2^*; \quad (80)$$

$$C_9^*(u,t) = p_1^* e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) + p_2^* e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u). \quad (81)$$

1.10. Минимизация на множестве A_{10}. При фиксированных $u > 0$ и $t > 0$ имеем

$$C_{10}^*(u,t) = \inf_{H \in A_{10}} \{\psi_1(H) - u\psi_2(H)\} =$$

$$= \inf_{\substack{0 \le p_2 < 1 - \gamma_2 \\ 0 \le p_3 \le 1 - \gamma_2 - p_2 \\ x_3 > x_2 > x_{\gamma_2}}} [\gamma_2 e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) + p_2 e^{-x_2 t}(x_2 - u) + (1 - \gamma_2 - p_2) e^{-x_3 t}(x_3 - u)]. \quad (82)$$

Решением задачи (82) является:

$$x_1^* = x_{\gamma_1}; \quad (83)$$

$$p_1^* = \gamma_2; \quad (84)$$

$$x_2^* = \begin{cases} x_{\gamma_2} + 0, \text{ если } x_{\gamma_2} < u, \\ +\infty \quad \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{85}$$

$$p_2^* = 1 - \gamma_2; \tag{86}$$

$$x_3^* = +\infty; \tag{87}$$

$$p_3^* = 0; \tag{88}$$

$$C_{10}^*(u,t) = \begin{cases} \gamma_2 e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) + (1-\gamma_2) e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u), \text{ если } x_{\gamma_2} < u, \\ \gamma_2 e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{89}$$

2. Случай 2. $s > 0$. При фиксированных u, t и s имеем

$$\inf_{H \in A_1} \{\psi_1(H) - u\psi_2(H)\} = \inf_{\substack{0 \le x_1 < x_2 < x_{\gamma_1} \\ 0 \le p_1 < \gamma_1}} \{ p_1 [x_1^s e^{-x_1 t}(x_1 - u) - x_2^s e^{-x_2 t}(x_2 - u)] +$$

$$+ \gamma_1 x_2^s e^{-x_2 t}(x_2 - u) + (1-\gamma_1) x_{\gamma_2}^s e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u)\}.$$

Рассмотрим поведение функции $h(x) = x^s e^{-xt}(x-u)$. Она равна нулю при $x = 0$ и $x = u$. Производная этой функции равна $h'(x) = -e^{-xt} x^{s-1} [tx^2 - (s+1+ut)x + su]$.

Корни квадратного уравнения $tx^2 - (s+1+ut)x + su = 0$ определяются по формулам

$$z_1 = \frac{(s+1+ut) - \sqrt{(s+1+ut)^2 - 4ust}}{2t} \text{ и } z_2 = \frac{(s+1+ut) + \sqrt{(s+1+ut)^2 - 4ust}}{2t}.$$

Выражение под корнем неотрицательное. Действительно, поскольку параметры s, u и t положительны, то $(s+1+ut)^2 - 4ust \ge (s+ut)^2 - 4ust = (s-ut)^2 \ge 0$. Следовательно, на интервалах $0 \le x \le z_1$ и $z_2 \le x$ функция $h(x)$ убывает, а на интервале $z_1 \le x \le z_2$ возрастает. Таким образом, $z_{\min} = z_1$ — точка минимума, а $z_{\max} = z_2$ — точка максимума функции $h(x)$; $h(x) < 0$ при $x < u$ и $h(x) > 0$ при $x > u$.

2.1. Минимизация на множестве A_1. При фиксированных u, t и s имеем

$$C_1^*(s,u,t) = \inf_{H \in A_1} \{\psi_1(H) - u\psi_2(H)\} =$$

$$= \inf_{\substack{0 \le x_1 < x_2 < x_{\gamma_1} \\ 0 \le p_1 \le \gamma_1}} [p_1 x_1^s e^{-x_1 t}(x_1 - u) + (\gamma_1 - p_1) x_2^s e^{-x_2 t}(x_2 - u) + (1-\gamma_1) x_{\gamma_2}^s e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u)]. \tag{90}$$

Оптимальным решением задачи (90) является:

$$x_1^* = \begin{cases} x_{\gamma_1} - 0, \text{ если } x_{\gamma_1} < z_{\min}, \\ z_{\min} \quad \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{91}$$

$$p_1^* = \gamma_1; \tag{92}$$

$$x_2^* \text{ — любое значение из интервала } (x_1^*, x_{\gamma_1}); \tag{93}$$

$$p_2^* = 0; \tag{94}$$

$$x_3^* = x_{\gamma_2}; \tag{95}$$

$$p_3^* = 1 - \gamma_1; \tag{96}$$

$$C_1^*(s,u,t) = \begin{cases} \gamma_1 x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) + (1-\gamma_1) x_{\gamma_2}^s e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u), \\ \text{если } x_{\gamma_1} < z_{\min}, \\ \gamma_1 z_{\min}^s e^{-z_{\min} t}(z_{\min} - u) + (1-\gamma_1) x_{\gamma_2}^s e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u) \\ \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{97}$$

2.2. Минимизация на множестве A_2. При фиксированных u, t и s имеем

$$C_2^*(s,u,t)=\inf_{H\in A_2}\{\psi_1(H)-u\psi_2(H)\}=$$

$$=\inf_{\substack{0\le x_1<x_{\gamma_1}\\ 0\le p_1<\gamma_1\\ \gamma_1\le p_1+p_2<\gamma_2}}[p_1x_1^s e^{-x_1t}(x_1-u)+p_2x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1}-u)+(1-p_1-p_2)e^{-x_{\gamma_2}t}x_{\gamma_2}^s(x_{\gamma_2}-u)]. \quad (98)$$

Оптимальным решением задачи (98) является:

$$x_1^*=\begin{cases}\text{любое значение из интервала } [0,x_{\gamma_1}), \text{ если } x_{\gamma_1}<z_{\min},\\ z_{\min} \text{ в противном случае};\end{cases} \quad (99)$$

$$p_1^*=\begin{cases}0, \text{ если } x_{\gamma_1}<z_{\min},\\ \gamma_1 \text{ в противном случае};\end{cases} \quad (100)$$

$$x_2^*=x_{\gamma_1}; \quad (101)$$

$$p_2^*=\begin{cases}\gamma_2-p_1^*-0, \text{ если } x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1}-u)<e^{-x_{\gamma_2}t}x_{\gamma_2}^s(x_{\gamma_2}-u),\\ \gamma_1-p_1^* \quad \text{в противном случае};\end{cases} \quad (102)$$

$$x_3^*=x_{\gamma_2}; \quad (103)$$

$$p_3^*=1-p_1^*-p_2^*. \quad (104)$$

$$C_2^*(s,u,t)=p_1^*(x_1^*)^s e^{-x_1^*t}(x_1^*-u)+p_2^*x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1}-u)+$$

$$+(1-p_1^*-p_2^*)e^{-x_{\gamma_2}t}x_{\gamma_2}^s(x_{\gamma_2}-u). \quad (105)$$

2.3. Минимизация на множестве A_3. При фиксированных u, t и s имеем

$$C_3^*(s,u,t)=\inf_{H\in A_3}\{\psi_1(H)-u\psi_2(H)\}=$$

$$=\inf_{\substack{0\le x_1<x_{\gamma_1}\\ 0\le p_1<\gamma_1\\ x_3\ge x_{\gamma_2}}}[p_1x_1^s e^{-x_1t}(x_1-u)+(\gamma_2-p_1)x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1}-u)+(1-\gamma_2)x_3^s e^{-x_3t}(x_3-u)]. \quad (106)$$

Оптимальным решением задачи (106) будет:

$$x_1^*=\begin{cases}\text{любое значение из интервала } [0,x_{\gamma_1}), \text{ если } x_{\gamma_1}<z_{\min},\\ z_{\min} \text{ в противном случае};\end{cases} \quad (107)$$

$$p_1^*=\begin{cases}0, \text{ если } x_{\gamma_1}<z_{\min},\\ \gamma_1 \text{ в противном случае};\end{cases} \quad (108)$$

$$x_2^*=x_{\gamma_1}; \quad (109)$$

$$p_2^*=\gamma_2-p_1^*-0; \quad (110)$$

$$x_3^*=\begin{cases}z_{\min}, \text{ если } x_{\gamma_2}\le z_{\min},\\ x_{\gamma_2}, \text{ если } z_{\min}<x_{\gamma_2}\le u,\\ +\infty, \text{ если } x_{\gamma_2}>u;\end{cases} \quad (111)$$

$$p_3^*=1-\gamma_2; \quad (112)$$

$$C_3^*(s,u,t)=p_1^*(x_1^*)^s e^{-x_1^*t}(x_1^*-u)+(\gamma_2-p_1^*)x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1}-u)+$$

$$+(1-\gamma_2)(x_3^*)^s e^{-x_3^*t}(x_3^*-u). \quad (113)$$

2.4. Минимизация на множестве A_4. При фиксированных u, t и s имеем

$$C_4^*(s,u,t)=\inf_{H\in A_4}\{\psi_1(H)-u\psi_2(H)\}=$$

$$=\inf_{\substack{0\le x_1\le x_{\gamma_1}\\ x_{\gamma_1}<x_2<x_{\gamma_2}\\ 0\le p_2<\gamma_2-\gamma_1}}[\gamma_1 x_1^s e^{-x_1 t}(x_1-u)+p_2 x_2^s e^{-x_2 t}(x_2-u)+(1-\gamma_1-p_2)x_{\gamma_2}^s e^{-x_{\gamma_2}t}(x_{\gamma_2}-u)]. \quad (114)$$

Оптимальным решением задачи (114) является:

$$x_1^*=\begin{cases} x_{\gamma_1}, & \text{если } x_{\gamma_1}<z_{\min},\\ z_{\min} & \text{в противном случае;}\end{cases} \quad (115)$$

$$p_1^*=\gamma_1; \quad (116)$$

$$x_2^*=\begin{cases} z_{\min}, & \text{если } x_{\gamma_1}<z_{\min}<x_{\gamma_2},\\ x_{\gamma_1}+0, & \text{если } z_{\min}\notin(x_{\gamma_1},x_{\gamma_2}) \text{ и } x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1}-u)<e^{-x_{\gamma_2}t}x_{\gamma_2}^s(x_{\gamma_2}-u),\\ x_{\gamma_2}-0, & \text{если } z_{\min}\notin(x_{\gamma_1},x_{\gamma_2}) \text{ и } x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1}-u)\ge e^{-x_{\gamma_2}t}x_{\gamma_2}^s(x_{\gamma_2}-u);\end{cases} \quad (117)$$

$$p_2^*=\gamma_2-\gamma_1-0; \quad (118)$$

$$x_3^*=x_{\gamma_2}; \quad (119)$$

$$p_3^*=1-\gamma_1-p_2^*; \quad (120)$$

$$C_4^*(s,u,t)=\gamma_1(x_1^*)^s e^{-x_1^* t}(x_1^*-u)+p_2^*(x_2^*)^s e^{-x_2^* t}(x_2^*-u)+$$
$$+(1-\gamma_1-p_2^*)x_{\gamma_2}^s e^{-x_{\gamma_2}t}(x_{\gamma_2}-u). \quad (121)$$

2.5. Минимизация на множестве A_5. При фиксированных u, t и s имеем

$$C_5^*(s,u,t)=\inf_{H\in A_5}\{\psi_1(H)-u\psi_2(H)\}=$$

$$=\inf_{\substack{0\le x_1\le x_{\gamma_1}\\ x_{\gamma_1}<x_2\le x_{\gamma_2}\\ x_3>x_{\gamma_2}}}[\gamma_1 x_1^s e^{-x_1 t}(x_1-u)+(\gamma_2-\gamma_1)x_2^s e^{-x_2 t}(x_2-u)+(1-\gamma_2)x_3^s e^{-x_3 t}(x_3-u)]. \quad (122)$$

Оптимальным решением задачи (122) является:

$$x_1^*=\begin{cases} x_{\gamma_1}, & \text{если } x_{\gamma_1}<z_{\min},\\ z_{\min} & \text{в противном случае;}\end{cases} \quad (123)$$

$$p_1^*=\gamma_1; \quad (124)$$

$$x_2^*=\begin{cases} z_{\min}, & \text{если } x_{\gamma_1}<z_{\min}<x_{\gamma_2},\\ x_{\gamma_1}+0, & \text{если } z_{\min}\notin(x_{\gamma_1},x_{\gamma_2}) \text{ и } x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1}-u)<e^{-x_{\gamma_2}t}x_{\gamma_2}^s(x_{\gamma_2}-u),\\ x_{\gamma_2}-0, & \text{если } z_{\min}\notin(x_{\gamma_1},x_{\gamma_2}) \text{ и } x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1}-u)\ge e^{-x_{\gamma_2}t}x_{\gamma_2}^s(x_{\gamma_2}-u);\end{cases} \quad (125)$$

$$p_2^*=\gamma_2-\gamma_1; \quad (126)$$

$$x_3^*=\begin{cases} z_{\min}, & \text{если } x_{\gamma_2}<z_{\min},\\ x_{\gamma_2}+0, & \text{если } z_{\min}\le x_{\gamma_2}\le u,\\ +\infty, & \text{если } x_{\gamma_2}>u;\end{cases} \quad (127)$$

$$p_3^* = 1 - \gamma_2; \tag{128}$$

$$C_5^*(s,u,t) = \gamma_1 (x_1^*)^s e^{-x_1^* t}(x_1^* - u) + (\gamma_2 - \gamma_1)(x_2^*)^s e^{-x_2^* t}(x_2^* - u) +$$
$$+ (1 - \gamma_2)(x_3^*)^s e^{-x_3^* t}(x_3^* - u). \tag{129}$$

2.6. Минимизация на множестве A_6. При фиксированных u, t и s имеем

$$C_6^*(s,u,t) = \inf_{H \in A_6} \{\psi_1(H) - u\psi_2(H)\} =$$

$$= \inf_{\substack{0 \le x_1 \le x_{\gamma_1} \\ \gamma_2 - \gamma_1 \le p_2 \le 1 - \gamma_1 \\ x_3 \ge x_{\gamma_2}}} [\gamma_1 x_1^s e^{-x_1 t}(x_1 - u) + p_2 x_{\gamma_2}^s e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u) + (1 - \gamma_1 - p_2) x_3^s e^{-x_3 t}(x_3 - u)] \tag{130}$$

Оптимальным решением задачи (130) является:

$$x_1^* = \begin{cases} x_{\gamma_1}, & \text{если } x_{\gamma_1} < z_{\min}, \\ z_{\min} & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{131}$$

$$p_1^* = \gamma_1; \tag{132}$$

$$x_2^* = x_{\gamma_2}; \tag{133}$$

$$p_2^* = \begin{cases} \gamma_2 - \gamma_1, & \text{если } (x_{\gamma_2} < z_{\min}) \text{ или } (x_{\gamma_2} \ge z_{\min} \text{ и } x_{\gamma_2} > u), \\ 1 - \gamma_1, & \text{если } x_{\gamma_2} \ge z_{\min} \text{ и } x_{\gamma_2} \le u; \end{cases} \tag{134}$$

$$x_3^* = \begin{cases} z_{\min}, & \text{если } x_{\gamma_2} < z_{\min}, \\ x_{\gamma_2} + 0, & \text{если } z_{\min} \le x_{\gamma_2} \le u, \\ +\infty, & \text{если } x_{\gamma_2} > u; \end{cases} \tag{135}$$

$$p_3^* = 1 - \gamma_1 - p_2^*; \tag{136}$$

$$C_6^*(s,u,t) = \gamma_1 (x_1^*)^s e^{-x_1^* t}(x_1^* - u) + p_2^* x_{\gamma_2}^s e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u) +$$
$$+ (1 - \gamma_1 - p_2^*)(x_3^*)^s e^{-x_3^* t}(x_3^* - u). \tag{137}$$

2.7. Минимизация на множестве A_7. При фиксированных u, t и s имеем

$$C_7^*(s,u,t) = \inf_{H \in A_7} \{\psi_1(H) - u\psi_2(H)\} =$$

$$= \inf_{\substack{x_{\gamma_1} < x_2 < x_{\gamma_2} \\ \gamma_1 \le p_1 < \gamma_2 \\ 0 \le p_2 < \gamma_2 - p_1}} [p_1 x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) + p_2 x_2^s e^{-x_2 t}(x_2 - u) + (1 - p_1 - p_2) x_{\gamma_2}^s e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u)]. \tag{138}$$

Оптимальным решением задачи (138) является:

$$x_1^* = x_{\gamma_1}; \tag{139}$$

$$p_1^* = \begin{cases} \gamma_1, & \text{если } x_{\gamma_1} < z_{\min} \text{ или } x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma 1} - u) \ge x_{\gamma_2}^s e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u), \\ \gamma_2 - 0, & \text{если } x_{\gamma_1} \ge z_{\min} \text{ и } x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) < x_{\gamma 2}^s e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u); \end{cases} \tag{140}$$

$$x_2^* = \begin{cases} z_{\min}, & \text{если } x_{\gamma_1} < z_{\min} < x_{\gamma_2}, \\ \text{любое значение из интервала } (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}) & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{141}$$

$$p_2^* = \begin{cases} \gamma_2 - \gamma_1 - 0, \text{ если } x_{\gamma_1} < z_{\min} < x_{\gamma_2}, \\ 0 \qquad\qquad \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{142}$$

$$x_3^* = x_{\gamma_2}; \tag{143}$$

$$p_3^* = 1 - p_1^* - p_2^*; \tag{144}$$

$$C_7^*(s,u,t) = p_1^* x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) + p_2^* x_2^{*s} e^{-x_2^* t}(x_2^* - u) +$$
$$+ (1 - p_1^* - p_2^*) x_{\gamma_2}^s e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u). \tag{145}$$

2.8. Минимизация на множестве A_8. При фиксированных u, t и s имеем

$$C_8^*(s,u,t) = \inf_{H \in A_8} \{\psi_1(H) - u\psi_2(H)\} =$$

$$= \inf_{\substack{x_{\gamma_1} < x_2 \le x_{\gamma_2} \\ \gamma_1 \le p_1 < \gamma_2 \\ x_3 > x_{\gamma_2}}} [p_1 x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) + (\gamma_2 - p_1) x_2^s e^{-x_2 t}(x_2 - u) + (1 - \gamma_2) x_3^s e^{-x_3 t}(x_3 - u)]. \tag{146}$$

Оптимальным решением задачи (146) является:

$$x_1^* = x_{\gamma_1}; \tag{147}$$

$$p_1^* = \begin{cases} \gamma_2 - 0, \text{ если } z_{\min} \le x_{\gamma_1}, \\ \gamma_1 \qquad \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{148}$$

$$x_2^* = \begin{cases} \text{любое значение из интервала } (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}), \text{ если } z_{\min} \le x_{\gamma_1}, \\ z_{\min}, \text{ если } x_{\gamma_1} < z_{\min} \le x_{\gamma_2}, \\ x_{\gamma_2}, \text{ если } x_{\gamma_2} < z_{\min}; \end{cases} \tag{149}$$

$$p_2^* = \gamma_2 - p_1^*; \tag{150}$$

$$x_3^* = \begin{cases} +\infty, \qquad \text{если } x_{\gamma_2} > u, \\ x_{\gamma_2} + 0, \text{ если } z_{\min} \le x_{\gamma_2} \le u, \\ z_{\min}, \qquad \text{если } x_{\gamma_2} < z_{\min}; \end{cases} \tag{151}$$

$$p_3^* = 1 - \gamma_2; \tag{152}$$

$$C_8^*(s,u,t) = p_1^* x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) + (\gamma_2 - p_1^*) x_2^{*s} e^{-x_2^* t}(x_2^* - u) +$$
$$+ (1 - \gamma_2) x_3^{*s} e^{-x_3^* t}(x_3^* - u). \tag{153}$$

2.9. Минимизация на множестве A_9. При фиксированных u, t и s имеем

$$C_9^*(s,u,t) = \inf_{H \in A_9} \{\psi_1(H) - u\psi_2(H)\} =$$

$$= \inf_{\substack{\gamma_1 \le p_1 < \gamma_2 \\ \gamma_2 - p_1 \le p_2 \le 1 - p_1 \\ x_3 > x_{\gamma_2}}} [p_1 x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) + p_2 x_{\gamma_2}^s e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u) +$$
$$+ (1 - p_1 - p_2) x_3^s e^{-x_3 t}(x_3 - u)]. \tag{154}$$

Оптимальным решением задачи (154) является:

$$x_1^* = x_{\gamma_1}; \tag{155}$$

$$p_1^* = \begin{cases} \gamma_1, \qquad \text{если } x_{\gamma_1} > u \text{ или } x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) > x_{\gamma_2}^s e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u), \\ \gamma_2 - 0, \text{ если } x_{\gamma_1} \le u \text{ и } x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) \le x_{\gamma_2}^s e^{-x_{\gamma_2} t}(x_{\gamma_2} - u); \end{cases} \tag{156}$$

$$x_2^* = x_{\gamma_2};\tag{157}$$

$$p_2^* = \begin{cases} \gamma_2 - p_1^*, \text{ если } x_{\gamma_2} > u \text{ или } x_{\gamma_2} < z_{\min}, \\ 1 - p_1^*, \quad \text{если } z_{\min} \le x_{\gamma_2} \le u; \end{cases}\tag{158}$$

$$x_3^* = \begin{cases} +\infty, \text{ если } x_{\gamma_2} > u, \\ \text{любое значение из интервала } (x_{\gamma_2}, +\infty), \text{ если } z_{\min} \le x_{\gamma_2} \le u, \\ z_{\min}, \text{ если } x_{\gamma_2} < z_{\min}; \end{cases}\tag{159}$$

$$p_3^* = 1 - p_1^* - p_2^*;\tag{160}$$

$$C_9^*(s,u,t) = p_1^* x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1}t}(x_{\gamma_1} - u) + p_2^* x_{\gamma_2}^s e^{-x_{\gamma_2}t}(x_{\gamma_2} - u) + \\ + (1 - p_1^* - p_2^*) x_3^{*s} e^{-x_3^* t}(x_3^* - u).\tag{161}$$

2.10. Минимизация на множестве A_{10}. При фиксированных u, t и s имеем

$$C_{10}^*(u,t) = \inf_{H \in A_{10}} \{\psi_1(H) - u\psi_2(H)\} =$$

$$= \inf_{\substack{0 \le p_2 < 1-\gamma_2 \\ 0 \le p_3 \le 1-\gamma_2 - p_2 \\ x_3 > x_2 > x_{\gamma_2}}} [\gamma_2 x_{\gamma_1}^s e^{-x_{\gamma_1} t}(x_{\gamma_1} - u) + p_2 x_2^s e^{-x_2 t}(x_2 - u) + (1 - \gamma_2 - p_2) x_3^s e^{-x_3 t}(x_3 - u)].\tag{162}$$

Решением задачи (162) является:

$$x_1^* = x_{\gamma_1};\tag{163}$$

$$p_1^* = \gamma_2;\tag{164}$$

$$x_2^* = \begin{cases} z_{\min}, \text{ если } x_{\gamma_2} \le z_{\min}, \\ \gamma_2 + 0, \text{ если } z_{\min} < x_{\gamma_2} \le u, \\ \text{любое значение из интервала } (\gamma_2, +\infty), \text{ если } x_{\gamma_2} > u; \end{cases}\tag{165}$$

$$p_2^* = \begin{cases} 1 - \gamma_2, \text{ если } x_{\gamma_2} \le u, \\ 0 \quad \text{в противном случае;} \end{cases}\tag{166}$$

$$x_3^* = \begin{cases} +\infty, \text{ если } x_{\gamma_2} > u, \\ \text{любое значение из интервала } (x_2^*, +\infty) \text{ в противном случае;} \end{cases}\tag{167}$$

$$p_3^* = \begin{cases} 1 - \gamma_2, \text{ если } x_{\gamma_2} > u, \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}\tag{168}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложен алгоритм поиска нижней границы байесовских оценок параметра экспоненциального распределения в случае, когда известно, что априорное распределение принадлежит классу Г, включающему все функции распределения с одинаковыми двумя квантилями. Эта задача возникает при анализе чувствительности байесовских оценок интенсивностей отказов к выбору априорного распределения в экспоненциальной модели отказов.

Алгоритм основывается на аналитических формулах решения линеаризованной задачи, что позволяет повысить точность решения задачи и существенно ускорить процесс ее решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. U.S. Nuclear Regulatory Commission (USNRC), «Reactor Safety Study-An Assessment of Accident Risks in U.S. Commercial Nuclear Power Plants2, WASH-1400 (NUREG-75/014), October 1975.
2. U.S. Nuclear Regulatory Commission, «NRC Statement on Risk Assessment and the Reactor Safety Study Report (WASH-1400) in Light of the Risk Assessment Review Group Report,» January 18, 1979.
3. U.S. Nuclear Regulatory Commission, «PRA Procedures Guide, A Guide to the Performance of Probabilistic Risk Assessments for Nuclear Power Plants,» Final Report, Vol. 1-2, NUREG/CR-2300, January 1983.
4. U.S. Nuclear Regulatory Commission, «Severe Accident Risks: An Assessment for Five U.S. Nuclear Power Plants,» NUREG-1150, December 1990.
5. Оценка безопасности и независимая проверка для атомных электростанций. Руководство по безопасности. Серия изданий по безопасности, № NS-G-1.2, Международное агенство по атомной энергии, Вена, 2004. — 99 с.
6. Kovalenko I.N. Rare events in queueing systems — a Survey // Queueing Systems. — 1994. — **16,** N 1. — P. 1–49.
7. Kovalenko I.N. Approximation of queues via small-parameter method // Advances in Queueing, CRC Press, Boca Raton, 1995. — P. 481–506.
8. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю. Методы расчета высоконадежныхсистем. — М.: Радио и связь, 1988. — 176 с.
9. Kovalenko I.N., Kuznetsov N.Yu., Pegg Ph.A. Mathematical theory of reliability of time dependent systems with practical applications. — Chichester: Wiley, 1997. — 303 p.
10. Кузнецов Н.Ю., Михалевич К.В. Анализ надежности систем, описываемых деревьями отказа с эффективностями // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 5. — С. 142–152.
11. Kovalenko, I.N. Light-traffic analysis of some queueing models with losses // Simulation and Optimization Methods in Risk and Reliability Theory. Nova Science Publishers, Inc, 2009. — P. 19–44.
12. Kuznetsov N.Yu. Fast simulation technique in reliability evaluation of a Markovian and Non-Markovian systems // Ibid. — 2009. — P. 69–112.
13. Ермольев Ю.М. О некоторых проблемах статистического программирования // Кибернетика. — 1970. — № 1. — С. 3–7.
14. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976. — 240 с.
15. Ermoliev Y., Nedeva C. Stochastic optimization problems with partially known distribution functions. — Laxenburg, Austria: International Institute for Applied Systems Analysis, 1982. — CP-62–60.
16. Ermoliev Yu., Gaivoronski A., Nedeva S. Stochastic optimization problems with incomplete information on distribution functions // SIAM J. Control. Optim. — 1985. — **23,** N 5. — P. 697–716.
17. Голодников А.Н. Минимаксный подход к Байесову оцениванию // Исследование операций (модели, системы, решения). — 1979. — Вып. 7. — С. 36–41.
18. Голодников А.Н., Стойкова Л.С. Численный метод оценки некоторых функционалов, характеризующих надежность // Кибернетика. — 1978. — № 2. — С. 73–77.
19. Голодников А.Н., Стойкова Л.С. Определение оптимального периода предупредительной замены на основе информации о математическом ожидании и дисперсии времени безотказной работы системы // Там же. — 1978. — № 3. — С. 110–118.
20. Голодников А.Н. Численный метод минимизации выпуклых функционалов в классе функций распределения, удовлетворяющих нелинейным ограничениям // Кибернетика. — 1982. — № 3. — С. 93–98.
21. Golodnikov A.N., Knopov P.S., Pepelyaev V.A. Estimation of reliability parameters under incomplete primary information // Theory and Decision. — 2004. — **57,** N 4. — P. 331–344.
22. Golodnikov A., Knopov P., Pepelyaev V. Investigation of Bayesian estimates for binomial failure models // Simulation and Optimization Methods in Risk and Reliability Theory. Nova Science Publishers Inc, 2009. — P. 173–220.
23. Golodnikov A. Investigation of sensitivity of Bayesian estimates for exponential failure models // Ibid. — 2009. — P. 221–238.
24. Robins H. Asymptotically sub-minimax solutions to compound statistical decision problems // Proc. Second Berkeley Symp. Math Stat. Probab. — 1951, 1, University of California Press, Berkeley.
25. Berger J.O. The robust Bayesian viewpoint (with discussion) // Robustness of Bayesian Analysis, (J. Kadane, ed.). — Amsterdam: North Holl, 1984.
26. Vidakovic B. Gamma-minimax: a paradigm for conservative robust Bayesians // Robustness of Bayesian Inference. Editors Rios and Ruggeri. — Lecture Notes in Statistics. — 2000. — **152**. — P. 241–259.
27. Ruggeri F., Sivaganesan S. On a global sensitivity measure for Bayesian inference // Sankhya: The Indian Journal of Statistics. — 2000. — **62**, Ser. A, Pt. 1. — P. 110–127.
28. Carota C., Ruggeri F. Robust Bayesian analysis given priors on partition sets // Test. — 1994. — **3,** N 2. — P. 73–86.
29. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. — М.: Наука, 1965. — 524 с.

Поступила 28.12.2009