УДК 519.2

Л.С. СТОЙКОВА

ОБОБЩЕННЫЕ НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Ключевые слова: *обобщенные неравенства Чебышева, экстремальные ступенчатые функции распределения, линейные функционалы в теории надежности, разбиение области параметров*.

Для определенности изложения рассмотрим одну из возможных постановок задач данного направления.

Задан линейный функционал

$$I(F)=\int_0^Q g(x)dF(x), \quad 0<Q<\infty, \quad F\in K, \tag{1}$$

где K — множество функций распределения (ф.р.):

$$K=\left\{F:\int_0^Q x^i dF(x)=s_i\,,\ i=1,2;\ 0<s_1^2<s_2<s_1Q\right\}.$$

Функция $g(x)$ непрерывна, дважды дифференцируема в некоторых точках и зависит от параметров. Требуется найти инфимум функционала $I(F)$, $F\in K$, и экстремальную ф.р. в зависимости от параметров функции $g(x)$, моментов s_1, s_2 и параметра Q (сокращенно — параметры задачи).

Неравенства, определяющие точную верхнюю или точную нижнюю границы для интегралов (1) при $F\in K$, называют (по традиции, сложившейся в применениях теории вероятностей и теории функций) обобщенными неравенствами Чебышева. Они введены и рассмотрены в работах П.Л. Чебышева, А.А. Маркова; им посвящена обширная литература, исчерпывающие ссылки на которую можно найти в монографиях [1, 2], обзорах Шохата и Тамаркина [3], Гудвина [4], Севиджа [5], а также в работах Малголланда, Роджерса, Джонсона, Хефдинга, Маллоу, Ройдена и др.

Несмотря на то, что достигнуты важные общие результаты для произвольного числа фиксированных моментов, ими трудно воспользоваться для решения конкретных примеров даже при двух фиксированных моментах. Кроме того, в теории надежности исследуется более трудная параметрическая постановка задачи, которая в общей теории не рассматривалась, хотя отдельные примеры были решены (каждый своим способом).

В теории надежности в условиях небольшой статистики об отказах системы (например, известны один-два момента функции распределения времени до отказа или времени использования системы) представляют интерес следующие вопросы: при каких значениях параметров характеристики надежности системы «наилучшие» или «наихудшие» в том или ином смысле; какие выбрать значения параметров, чтобы получить гарантированное высокое значение показателя надежности (минимаксные задачи).

Задача (1) была сформулирована мне в середине семидесятых годов выдающимся математиком, академиком НАН Украины Игорем Николаевичем Коваленко. В то время я работала в Институте кибернетики АН Украины в отделе математических методов теории надежности сложных систем, который он возглавлял. Подобные задачи рассматривались ранее в теории надежности [6]. Первой задачей, которую сформулировал мне Игорь Николаевич, была оценка надежности одной сложной резервированной системы при возможности образования очереди на восстановление. Однако оценки других характеристик надежности, более сложных, традиционными методами получить не удавалось.

Это объяснялось тем, что конкретные функционалы, характеризующие надежность, как правило, зависят от параметров. Получить разбиение области параметров — непростая и увлекательная задача. И вот такую прикладную задачу, актуальную, трудную, но решаемую, увидел и сформулировал И.Н. Коваленко. При разработке подхода к решению этой задачи я опиралась на численный метод Ю. Ермольева, который порекомендовал мне использовать Игорь Николаевич. Затем этот метод был исследован А. Голодниковым.

Применяя численно-аналитический подход, мне удается решать новые задачи в математической теории надежности, теории массового обслуживания. Основные результаты вошли в мою докторскую диссертацию.

Приведем простейшие примеры конкретных функционалов (1) из теории надежности.

1. Пусть ф.р. величины прочности системы равна $G(x)=(1-e^{-\lambda x})^n$, а ф.р. величины нагрузки ($F(x)$) неизвестна. Тогда вероятность того, что прочность меньше нагрузки, равна [7]

$$I(F)=\int_0^{\infty}(1-e^{-\lambda x})^n dF(x), \quad \lambda>0, \ n\geq 2, \ F\in K.$$

2. В работе [8] оценивается интенсивность потока немонотонных отказов системы обслуживания $(\leq\lambda)/G/m$. В оценку сверху входит интеграл типа

$$\int_0^{\infty} z^{r-m-2}\overline{\overline{B}}^m(z)dz, \ \overline{\overline{B}}(z)=\int_z^{\infty}\overline{B}(t)dt, \ \overline{B}(t)=1-B(t),$$

где $B(t)$ — ф.р. времени обслуживания требования. Зная только два первых момента ф.р. $B(t)$, для таких интегралов можно получить оценки, существенно улучшающие неравенства (1), (2) работы [8] (однако не влияющие на ее окончательный результат).

3. Одной из важных характеристик надежности системы является интервальная интенсивность отказов $\lambda(u,v)$, которая представляет собой дробно-линейный функционал

$$\lambda(u,v)=\frac{F(v)-F(u)}{\int_u^v \overline{F}(x)dx},$$

где $\overline{F}(x)=1-F(x)$, $F(x)$ — ф.р. времени до отказа системы, (u,v) — рассматриваемый интервал времени. Параметры задачи: u, v, s_1, s_2 [9].

4. Стационарный коэффициент неготовности системы с резервом времени имеет вид

$$\overline{k}(F,T)=\frac{\alpha_1 F(T)+\alpha_2\overline{F}(T)}{Q_1F(T)+Q_2\overline{F}(T)+\int_0^T\overline{F}(x)dx}, \quad \overline{F}(x)=1-F(x),$$

где α_i, $i=1,2,$ — среднее время простоя системы при профилактическом обслуживании (α_1) и при восстановлении после отказов (α_2); T — период профилактического обслуживания; Q_i, $i=1,2$, — среднее время профилактического обслуживания; $F(t)$ — ф.р. времени до отказа системы. Задача имеет семь параметров: α_1, α_2, T, Q_1, Q_2, s_1, s_2 [10]. Другие интересные примеры линейных и дробно-линейных функционалов, характеризующих надежность и обслуживание, можно найти в [11–13].

Подобные задачи при различных предположениях о ф.р. $F(t)$ решались многими исследователями, в том числе и теми, кто имел опыт практических расчетов надежности технических систем, например, И.Н. Коваленко (Украина), Е.Ю. Барзилович и В.А. Каштанов (Россия), R.E. Barlow, F. Proschan (США), И. Герцбах (Израиль), F. Beichelt (Германия). Однако, насколько известно автору, единого подхода к решению параметрической задачи (1) не существовало.

При параметрической постановке решение задачи имеет разветвленный вид, а именно, все множество значений параметров разбивается на непересекающиеся подмножества, в каждом экстремум достигается на «своей» ф.р. При этом основная трудность заключается не столько в нахождении экстремального распределения, сколько в выделении подмножеств значений параметров, для которых экстремум достигается на одной и той же ф.р.

Для дальнейшего изложения потребуется классификация крайних ф.р. выпуклого множества K. Известно [14], что $\inf\limits_{F \in K} I(F) = \inf\limits_{F \in E} I(F)$, где E — множество крайних распределений выпуклого множества K. Элементами множества E являются двух- и трехступенчатые ф.р. из класса K. Множество E можно разбить на семь непересекающихся подмножеств.

1. E_1 — двухступенчатые (двухточечные) ф.р. с первой точкой роста $x_1 = 0$. Тогда вторая точка роста находится из моментных условий $y_1 = B(0) = s_2 / s_1$, где

$$B(x) = \frac{s_2 - s_1 x}{s_1 - x}, \quad x \in [0, B(Q)] \text{ или } x \in [B(0), Q].$$

2. E_2 — двухточечные ф.р. с точками роста x_2, y_2, находящимися внутри отрезка $[0, Q]$, причем $0 < x_2 < B(Q)$, $y_2 = B(x_2)$, что следует из моментных условий.

3. E_3 — двухточечные ф.р. со второй точкой роста, равной Q, $y_3 = Q$. Тогда первая точка роста находится из моментных условий $x_3 = B(Q)$.

4. E_4 — трехточечные ф.р. с известными первой и третьей точками роста $x_4 = 0$, $z_4 = Q$, вторая точка роста y_4 находится внутри отрезка $[0, Q]$, причем $B(Q) < y_4 < B(0)$ (условие положительности скачков).

5. E_5 — трехточечные ф.р. с первой точкой роста $x_5 = 0$. Две другие — y_5, z_5 — внутри отрезка $[0, Q]$, причем для положительности скачков в них должны выполняться неравенства $0 < B(z_5) < y_5 < B(0) < z_5 < Q$.

6. E_6 — трехточечные ф.р. с третьей точкой роста $z_6 = Q$. Две другие — x_6, y_6 — внутри отрезка $[0, Q]$, причем $0 < x_6 < B(Q) < y_6 < B(x_6) < Q$.

7. E_7 — трехточечные ф.р. с тремя точками роста x_7, y_7, z_7 внутри отрезка $[0, Q]$. Условия положительности скачков в них таковы: $0 < x_7 < B(z_7) < < y_7 < B(x_7) < z_7 < Q$.

Функции распределения из подмножеств E_i, $i = 1-7$, существуют всегда, когда класс K не пустой. Они никак не связаны с функцией $g(x)$. Однако очевидно, что экстремальные ф.р. должны зависеть от $g(x)$ и от параметров задачи. Экстремальные ф.р. из подмножеств E_i будем обозначать F_i.

Основные результаты, полученные автором, коротко можно описать так. Вначале были получены простые достаточные условия экстремальности ф.р. $F_1 - F_4$ в конкретных задачах математической теории надежности. Эти условия в то же время были необходимыми. На основании аналитического решения этих задач далее решались задачи оптимизации по параметрам. Позже исследовались ф.р. $F_5 - F_7$ [15, 16]. Краткий обзор основных результатов дан в [16, с. 131]. Последняя работа вышла в 2004 г. [17].

Отметим еще один интересный результат. Он возник в связи с ответом на вопрос: как отделять одну область параметров со своей экстремальной ф.р. от «соседней», где возникает уже другая экстремальная ф.р. Поэтому наряду с поиском минимальных достаточных условий экстремальности ф.р. $F_1 - F_7$ в более сложных задачах осуществлялся поиск «переходных неравенств», которые устанавливали бы границы между областями параметров с «соседними» экстремальными ф.р. Под «соседними» экстремальными ф.р. подразумеваются ф.р., которые стоят на концах одного отрезка на рис. 1.

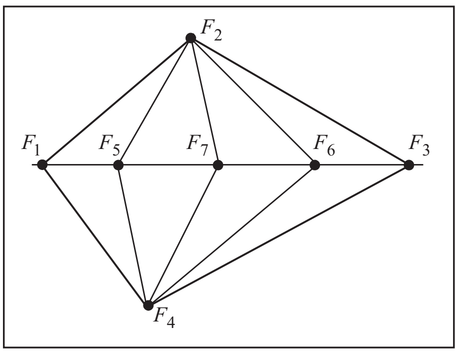

Рис. 1

Так «соседними» для ф.р. F_1 являются ф.р. F_2, F_5, F_4. От ф.р. F_1 не может быть непосредственного перехода к экстремальным ф.р. F_7, F_6, F_3. Это легко доказать. Рисунок появился в результате численного решения большого количества задач (1) с фиксированными параметрами. Этот опыт позволил выделить для каждой пары соседних ф.р. «переходные» неравенства, т.е. границы, отделяющие области параметров, где экстремальны соседние ф.р. Например, если в некоторой области параметров экстремум достигается на ф.р. F_1, то переход к области, где экстремальна ф.р. F_2, возможен только при изменении знака параметрического неравенства $L(0,B(0))>0$ на противоположный. И, наоборот, переход из области экстремальности ф.р. F_2 к области экстремальности ф.р. F_1 осуществляется только при изменении знака неравенства $L(0,B(0))<0$ на противоположный. Переход от области экстремальности ф.р. F_1 к области экстремальности ф.р. F_4 возможен только тогда, когда знак неравенства $M(0,B(0),Q)<0$ меняется на противоположный и т.д. Функции $L(x,y)$ и $M(x,y,z)$ определяются равенствами:

$$L(x,y)=g'(x)+g'(y)-\frac{2(g(y)-g(x))}{y-x}, \quad 0<x<y<Q;$$

$$M(x,y,z)=\frac{g'(y)}{y-x}-\frac{g(y)-g(x)}{(y-x)^2}+\frac{g'(y)}{z-y}-\frac{g(z)-g(y)}{(z-y)^2}, \quad 0<x<y<z<Q.$$

Свойства и связь этих функций с ф.р. F_1-F_7 изложены в [18].

Выпишем те переходные неравенства, которые удалось установить при решении конкретных примеров. Эти неравенства не зависят от вида функции $g(x)$ и количества входящих в нее параметров. Возможно, список 1)–14) неполон. Кроме того, в случае, когда функция $g(x)$ имеет угловые точки или точки разрыва 1-го рода, неравенства будут несколько видоизменяться, сохраняя свою суть.

В 1)–14) первый знак неравенства справедлив в области экстремальности первой ф.р., а второй — в области экстремальности соответствующей соседней:

1) $F_1 \to F_2$: $L(0,B(0))>0, \quad L(0,B(0))<0$;

2) $F_1 \to F_4$: $M(0,B(0),Q)>0, \quad M(0,B(0),Q)<0$;

3) $F_1 \to F_5$: $\exists\, z=z_{51}\in(0,Q)$: $L(B(0),z_{51})\equiv 0$,

$L'_z(B(0),z)\big|_{z=z_{51}}>0, \quad M(0,B(0),z_{51})<0, \quad M(0,B(0),z_{51})>0$;

4) $F_3 \to F_2$: $L(B(Q),Q-0)<0, \quad L(B(Q),Q-0)>0$;

5) $F_3 \to F_4$: $M(0,B(Q),Q)>0, \quad M(0,B(Q),Q)<0$;

6) $F_3 \to F_6$: $\exists\, x=x_{63}\in(0,Q)$: $L(x_{63},B(Q))\equiv 0$,

$L'_x(x,B(Q))\big|_{x=x_{63}}>0, \quad M(x_{63},B(Q),Q)>0, \quad M(x_{63},B(Q),Q)<0$;

7) $F_2 \to F_5$: $\exists\, z=z_{52}\in(0,Q)$: $L(B(z_{52}),z_{52})\equiv 0$,

$L'_z(B(z),z)\big|_{z=z_{52}}>0, \quad M(0,B(z_{52}),z_{52})>0, \quad M(0,B(z_{52}),z_{52})<0$;

8) $F_2 \to F_6$: $\exists\, x=x_{62}\in(0,Q)$: $L(x_{62},B(x_{62}))\equiv 0$,

$L'_x(x,B(x))\big|_{x=x_{62}}>0, \quad M(x_{62},B(x_{62}),Q)<0, \quad M(x_{62},B(x_{62}),Q)>0$;

9) $F_2 \to F_7$: $\exists\, z=z_{27}\in(0,Q)$: $L(B(x_2),z_{27})\equiv 0$,

$L'_z(B(x_2),z)\big|_{z=z_{27}}>0, \quad M(x_2,B(x_2),z_{27})<0, \quad M(x_2,B(x_2),z_{27})>0$;

10) $F_2 \to F_7$: $\exists\, x=x_{27}\in(0,Q)$: $L(x_{27},B(z_2))\equiv 0$,

$L'_x(x,B(z_2))\big|_{x=x_{27}}>0, \quad M(x_{27},B(z_2),z_2)>0, \quad M(x_{27},B(z_2),z_2)<0$;

11) $F_6 \to F_4$: $\exists\, F_4$: $L(0+,y_4)<0, \quad L(0+,y_4)>0$;

12) $F_6 \to F_7$: $L(y_6,Q-0)<0, \quad L(y_6,Q-0)>0$;

13) $F_5 \to F_7: L(0+, y_5) > 0, \quad L(0+, y_5) < 0$;

14) $F_5 \to F_4: \exists F_4: L(y_4, Q-0) > 0, \quad L(y_4, Q-0) < 0$.

Хорошей проверкой и иллюстрацией применения этих неравенств могло бы стать решение задачи о нахождении точных нижних границ вероятности отказа системы в фиксированном интервале времени в классе ф.р. неотрицательных случайных величин, имеющих унимодальную плотность и один или два первых фиксированных момента.

В моем творческом становлении, несомненно, большая заслуга Игоря Николаевича Коваленко, который постоянно проявлял внимание к моей работе, за что я ему глубоко благодарна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973. — 551 с.
2. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. — М.: Наука, — 568 с.
3. Shohat J.A., Tamarkin J.D. The problem of moments. Math. Surveys. — New York: Amer. Math. Soc., 1943. — 140 p.
4. Godwin H.J. On generalization of Tchebychef's inequality // J. Amer. Stat. Assoc. — 1955. — **50**. — P. 923–945.
5. Савидж И.Р. Вероятностные неравенства чебышевского типа // Сб. переводов. Математика. — 1962. — **6**, № 4 . — С. 71–95.
6. Барзилович Е.Ю., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. О минимаксных критериях в задачах надежности // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1971. — № 3. — С. 87–98.
7. Стойкова Л.С., Марчук Г.А. Точні оцінки імовірності відмови в кількох моделях надійності при неповній інформації // Доп. АН України. Сер.А. — 1992. — № 8. — С. 89–93.
8. Коваленко И.Н. Оценка интенсивности потока немонотонных отказов системы обслуживания $(\le \lambda)/G/m$ // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 9. — С. 1219–1225.
9. Стойкова Л.С. Применение обобщенных неравенств Чебышева к оценке интервальной интенсивности отказов // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 6. — С. 141–150.
10. Стойкова Л.С. Выбор оптимального периода обслуживания системы с временным резервом // Там же. — 1994. — № 1. — С. 118–123.
11. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука, 1987. — 336 с.
12. Коваленко И.Н. Исследования по надежности сложных систем. — Киев: Наук. думка, 1975. — 210 с.
13. Gertsbakh I. Reliability theory with applications to preventive maintenance. — Berlin: Springer, 2000. — 219 p.
14. Mulholland H. P., Rogers C.A. Representation theorems for distribution functions // Proc. London. Math. Soc. — 1958. — **8**, N 3. — P. 177–223.
15. Стойкова Л.С. О необходимых и достаточных условиях существования крайних распределений $F_5 - F_7$ в задаче получения обобщенных неравенств Чебышева // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 2. — С. 142–149.
16. Стойкова Л.С. О достаточных условиях экстремальности крайних распределений $F_5 - F_7$ в обобщенных неравенствах Чебышева // Там же. — 2003. — № 3. — С. 121–132.
17. Стойкова Л.С. Точные верхние границы вероятности отказа системы в интервале времени при неполной информации о функции распределения // Там же. — 2004. — № 5. — С. 72–84.
18. Стойкова Л.С. Необходимые условия экстремальности крайних распределений в обобщенных неравенствах Чебышева и их применение в теории надежности // Там же. — 2001. — № 6. — С. 133–147.

Поступила 11.08.2009