

## УПАКОВКА $n$ -МЕРНЫХ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ С ВОЗМОЖНОСТЬЮ ИЗМЕНЕНИЯ ИХ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ В $n$ -МЕРНОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

**Ключевые слова:** математическое моделирование, оптимизация, упаковка,  $n$ -мерный параллелепипед, Ф-функция, NP-трудная задача.

### ВВЕДЕНИЕ

Задачи упаковки параллелепипедов встречаются во многих областях научной и практической деятельности, таких как геометрическое проектирование [1], контейнерная упаковка [2], управление проектами, исследование операций, искусственный интеллект.

Данному направлению посвящены многие публикации. В [2] вводится классификация задач размещения, раскроя, упаковки и покрытия (Cutting&Packing). Самой главной характеристикой таких задач авторы называют размерность, выделяя два типа задач: с размерностью  $n \leq 3$  и  $n > 3$ , в которых размерность увеличена за счет непространственных величин: время, вес, затраты финансовых ресурсов, объем памяти для хранения информации и др.

Многие работы посвящены упаковке 2D и 3D объектов. Отметим некоторые из них. В [3] описываются подходы к решению двумерных задач упаковки прямоугольников, дается обзор недавних публикаций в этой области. В [4] рассматривается задача размещения двумерных прямоугольных элементов на электронной плате малых размеров с возможностью изменения их ортогональной ориентации. Предлагается метод на основе анализа деревьев решений, которые представляют возможные варианты размещения элементов. Статья [5] посвящена размещению прямоугольников с возможностью изменения их ортогональной ориентации. Предлагается алгоритм последовательно-одиночного размещения, который изменяет последовательность элементов размещения на основе случайного поиска. В [6] описаны результаты исследований, связанных с решением задач упаковки максимального количества трехмерных коробок в форме параллелепипедов в багажник автомобиля, имеющий сложную геометрию. При этом допускается произвольная ориентация коробок. Для решения задачи авторы предлагают комбинацию комбинаторного алгоритма с алгоритмом имитационного отжига.

Немногие публикации предлагают универсальные подходы к упаковке  $n$ -мерных параллелепипедов. В [7] описан рекурсивный алгоритм для решения проблемы упаковки  $n$ -мерных коробок в контейнер. При этом авторы главным образом останавливаются на трехмерном случае задачи. В [8] предлагается метод размещения ориентированных  $n$ -мерных параллелепипедов, который использует механизм Ф-функций [9, 10] для математического описания поставленной задачи и метод сужающихся окрестностей [12] для отыскания глобального экстремума. В настоящей работе продолжаются исследования, изложенные в [8, 10], и обобщается задача на случай разрешения изменения ортогональной ориентации  $n$ -мерных параллелепипедов.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу упаковки  $n$ -мерных параллелепипедов в параллелепипеде, которая является обобщением и развитием задачи упаковки, исследованной в [10], и состоит в следующем. Имеется  $N$  прямоугольных  $n$ -мерных параллелепипедов

( $n$ -параллелепипедов)  $P_i \subset R^n$  вида

$$P_i = \{x \in R^n : x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_k \leq a_{ik}, k \in J_n = \{1, 2, \dots, n\}\},$$

где  $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$  — вектор метрических характеристик (линейных размеров)  $n$ -параллелепипеда  $P_i$ ,  $i \in J_N$ ,  $J_N = \{1, 2, \dots, N\}$ . Полагаем, что  $n$ -параллелепипеды  $P_i$  могут поворачиваться на угол  $\pi/2$  относительно координатных плоскостей пространства  $R^n$ . Задана область размещения в виде  $n$ -параллелепипеда  $D_0$ , который определяется как

$$D_0 = \{x \in R^n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_k \leq b_{0k}, k \in J_n\},$$

где  $b_{01} = d$  — переменная величина,  $b_0 = (b_{01}, b_{02}, \dots, b_{0n})$  — вектор метрических характеристик  $n$ -параллелепипеда  $D_0$ .

При этом грани  $n$ -параллелепипедов  $P_i$ ,  $i \in J_N$ , параллельны соответствующим граням  $n$ -параллелепипеда  $D_0$ . Линейные размеры  $D_0$  позволяют разместить все  $n$ -параллелепипеды  $P_i$ ,  $i \in J_N$ , т.е.  $b_{0k} \geq \max_{i \in J_N, j \in J_n} a_{ij}$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$ .

**Задача.** Необходимо упаковать  $n$ -параллелепипеды  $P_i$ ,  $i \in J_N$ , с учетом возможности их поворотов на угол  $\pi/2$  в  $n$ -параллелепипеде  $D_0$  так, чтобы параллелепипеды попарно не пересекались и длина  $d$  ребра  $b_{01}$ , характеризующая занятую часть области  $D_0$ , была минимальной.

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ И ЕЕ СВОЙСТВА

Для построения математической модели поставленной задачи используем математический аппарат Ф-функций [9, 10].

С каждым  $n$ -параллелепипедом  $P_i$ ,  $i \in J_N$ , свяжем ортогональную подвижную систему координат  $O_i x_{i1} x_{i2} \dots x_{in}$ , а с областью  $D_0$  — неподвижную систему координат  $O x_1 x_2 \dots x_n$ . Начало собственной (подвижной) системы координат  $n$ -параллелепипеда  $P_i$  — точку  $O_i$  — примем в качестве его полюса,  $i \in J_N$ . Координаты  $u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in})$  полюса  $n$ -параллелепипеда  $P_i$ ,  $i \in J_N$ , относительно неподвижной системы координат  $O x_1 x_2 \dots x_n$  являются его параметрами размещения и определяют положение  $n$ -параллелепипеда в пространстве  $R^n$ . Тогда вектор  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in R^{Nn}$  определяет размещение параллелепипедов  $P_1, P_2, \dots, P_N$  в пространстве  $R^n$ .

Следуя [10], обозначим  $P_i(u_i)$   $n$ -параллелепипед  $P_i$ ,  $i \in J_N$ , транслированный на вектор параметров размещения  $u_i$ ,  $i \in J_N$ . Рассмотрим  $n$ -параллелепипеды  $P_i(u_i) \subset R^n$  и  $P_j(u_j) \subset R^n$  с параметрами размещения  $u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in})$  и  $u_j = (u_{j1}, u_{j2}, \dots, u_{jn})$  соответственно. Согласно [10] Ф-функцию двух одинаково ориентированных, не допускающих поворотов  $n$ -параллелепипедов  $P_i(u_i)$  и  $P_j(u_j)$ , можно определить как непрерывную, всюду определенную функцию  $\Phi_{ij}(u_i, u_j): R^{2n} \rightarrow R^1$ , обладающую следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(u_i, u_j) &> 0, \text{ если } \text{cl } P_i(u_i) \cap \text{cl } P_j(u_j) = \emptyset, \\ \Phi_{ij}(u_i, u_j) &= 0, \text{ если } \text{int } P_i(u_i) \cap \text{int } P_j(u_j) = \emptyset, \text{ fr } P_i(u_i) \cap \text{fr } P_j(u_j) \neq \emptyset, \\ \Phi_{ij}(u_i, u_j) &< 0, \text{ если } \text{int } P_i(u_i) \cap \text{int } P_j(u_j) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Здесь  $\text{cl}$ ,  $\text{int}$ ,  $\text{fr}$  — соответственно замыкание, внутренность и граница точечного множества.

Таким образом, Ф-функция  $\Phi_{ij}$  позволяет формально описать условия взаимного непересечения двух ориентированных  $n$ -параллелепипедов  $P_i(u_i)$  и  $P_j(u_j)$  в виде  $\Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0$ . Условие размещения  $n$ -параллелепипеда  $P_j(u_j)$  в области  $D_0$  можно представить в виде  $\Phi_{0j}(u_0, u_j) \geq 0$ , где  $\Phi_{0j}(u_0, u_j)$  — Ф-функция объ-

ектов  $D_0^* = \text{cl}(R^n \setminus D_0)$  и  $P_j(u_j)$ ,  $u_0 = (u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0n})$  — параметры размещения объектов  $D_0$  и  $D_0^*$ . Ф-функции  $\Phi_{ij}$  и  $\Phi_{0j}$  ориентированных, не допускающих поворотов  $n$ -параллелепипедов, построены в [10] и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & \Phi_{ij}(u_i, u_j) = \\ & = \max\{u_{j1} - u_{i1} - a_{i1}, -u_{j1} + u_{i1} - a_{j1}, \dots, u_{jn} - u_{in} - a_{in}, -u_{jn} + u_{in} - a_{jn}\}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \Phi_{0j}(u_0, u_j) = \\ & = \min\{u_{j1} - u_{01}, -u_{j1} + u_{01} + b_{01} - a_{j1}, \dots, u_{jn} - u_{0n}, -u_{jn} + u_{0n} + b_{0n} - a_{jn}\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для математического моделирования условия размещения  $n$ -параллелепипедов  $P_i$ ,  $i \in J_N$ , в области  $D_0$  и условия их попарного непересечения с учетом возможностей поворотов  $n$ -параллелепипедов  $P_i$ ,  $i \in J_N$ , на угол  $\pi/2$  относительно координатных плоскостей пространства  $R^n$ , модифицируем Ф-функции (1) и (2).

С этой целью каждому  $n$ -параллелепипеду  $P_i$  поставим в соответствие вектор его линейных размеров  $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ ,  $i \in J_N$ . Различные повороты каждого  $n$ -параллелепипеда  $P_i$  на угол  $\pi/2$  опишем с помощью упорядочения линейных размеров  $P_i$ . Перестановка

$$a_{it} = (a_{ik_{i1}}, a_{ik_{i2}}, \dots, a_{ik_{in}}), \quad (3)$$

где  $\{k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{in}\}$  — перестановка элементов индексного множества  $J_n$ ,  $t \in J_M$ ,  $M = n!$ , соответствует всевозможным поворотам  $n$ -параллелепипеда  $P_i$  на угол  $\pi/2$ ,  $i \in J_N$ .

Рассмотрим  $n$ -параллелепипеды  $P_i(u_i)$  и  $P_j(u_j)$ . Зададим всевозможные ортогональные ориентации  $n$ -параллелепипеда  $P_i(u_i)$ , задав перестановки его линейных размеров как  $a_{it} = (a_{ik_{i1}}, a_{ik_{i2}}, \dots, a_{ik_{in}})$ ,  $t \in J_M$ ,  $M = n!$ . Соответствующие ориентированные параллелепипеды обозначим как  $P_i(u_i, v_i)$ ,  $v_i = (k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{in})$ . Тогда Ф-функцию двух  $n$ -параллелепипедов  $P_i(u_i, v_i)$  и  $P_j(u_j, v_j)$  запишем

$$\begin{aligned} & \Phi_{ij}(u_i, u_j, v_i, v_j) = \\ & = \max\{u_{j1} - u_{i1} - a_{ik_{i1}}, -u_{j1} + u_{i1} - a_{jk_{j1}}, \dots, u_{jn} - u_{in} - a_{ik_{in}}, -u_{jn} + u_{in} - a_{jk_{jn}}\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Функция вида (4) удовлетворяет свойствам Ф-функции, поскольку отличается от Ф-функции (1) только порядком следования линейных размеров  $n$ -параллелепипедов. Другими словами,  $\Phi_{ij}(u_i, u_j, v_i, v_j)$  — это функция вида (1), которая вычисляется для разных пар  $n$ -параллелепипедов с различной ортогональной ориентацией и одинаковыми наборами линейных размеров с полюсами в точках  $u_i, u_j$  соответственно.

Зафиксируем ориентацию  $n$ -параллелепипеда  $P_i(u_i)$ , задав последовательность его линейных размеров в виде  $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ . В этом случае Ф-функция двух  $n$ -параллелепипедов  $P_j(u_j)$  и  $P_j(u_j, v_j)$  примет вид

$$\begin{aligned} & \Phi_{ij}(u_i, u_j, v_j) = \\ & = \max\{u_{j1} - u_{i1} - a_{i1}, -u_{j1} + u_{i1} - a_{jk_{j1}}, \dots, u_{jn} - u_{in} - a_{in}, -u_{jn} + u_{in} - a_{jk_{jn}}\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, Ф-функцию вида (4) можно использовать для моделирования условий непересечения двух  $n$ -параллелепипедов, допускающих повороты на угол  $\pi/2$ , Ф-функцию вида (5) — для случая, когда один из двух  $n$ -параллелепипедов ориентирован, а другой может поворачиваться на угол  $\pi/2$ .

Условие размещения в области  $D_0$   $n$ -параллелепипеда  $P_j(u_j, v_j)$ , допускающего повороты на угол  $\pi/2$ , может быть описано с помощью модификации Ф-функции (2) вида

$$\begin{aligned} & \Phi_{0j}(u_0, u_j, v_j) = \\ & = \min\{u_{j1} - u_{01}, -u_{j1} + u_{01} + b_{01} - a_{jk_{j1}}, \dots, u_{jn} - u_{0n}, -u_{jn} + u_{0n} + b_{0n} - a_{jk_{jn}}\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Исходя из приведенной постановки задачи и средств аналитического описания условий попарного непересечения и размещения  $n$ -параллелепипедов в области  $D_0$ , математическую модель задачи представим так:

$$X^* = \arg \min_{X \in W \subset R^{2N+1}} F(X), \quad (7)$$

где  $F(X) = d$ ,  $d = b_{01}$ ,  $X = (u, v, d)$ ,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ,  $W$  — область допустимых решений, которая описывается системой неравенств

$$\begin{cases} \Phi_{ij}(u_i, u_j, v_i, v_j) \geq 0, & i, j \in J_N, & i < j, \\ \Phi_{0j}(u_0, u_j, v_j) \geq 0, & j \in J_N. \end{cases} \quad (8)$$

Математическая модель (7), (8) обладает рядом особенностей:

- 1) задача (7), (8) обратно выпуклая;
- 2) множество  $W$  в общем случае несвязно, а каждая компонента связности многосвязна;
- 3) поскольку целевая функция  $F(X)$  линейна, то локальные минимумы целевой функции достигаются в крайних точках  $W$ ;
- 4) в общем случае локальные минимумы нестрогие;
- 5) задача (7), (8) относится к классу многоэкстремальных  $NP$ -трудных задач [11].

#### МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

**Построение локальных минимумов.** Для получения локальных минимумов задачи (7), (8) используется метод последовательно-одиночного размещения заданной последовательности  $n$ -параллелепипедов  $P_i$ ,  $i \in J_N$ , в  $n$ -параллелепипеде  $D_0$ . Для получения размещения учтем, что  $n$ -параллелепипед  $P_k$  включает  $n$ -параллелепипед  $P_t$ , если выполняется условие

$$\begin{cases} u_{ki} > u_{ti}, \\ u_{ki} + u_{ki} < u_{t1} + a_{ti}, & i \in J_n. \end{cases} \quad (9)$$

Обозначим включение  $n$ -параллелепипеда  $P_t$  в  $P_k$  как  $P_t \subseteq P_k$ . Также введем понятие контейнера — части области размещения  $D_0$ , в которой можно разместить  $n$ -параллелепипед. Обозначим множество контейнеров через  $C$ . Каждый контейнер из  $C$  представляет собой  $n$ -параллелепипед  $c_l = (u_l^c, a_l^c)$ , где  $a_l^c = (a_{l1}^c, \dots, a_{ln}^c)$  — вектор линейных размеров контейнера,  $u_l^c = (u_{l1}^c, \dots, u_{ln}^c)$  — вектор координат его полюса,  $l \in J_m$ ,  $m$  — количество контейнеров.

Пусть задана последовательность  $n$ -параллелепипедов  $P_i$ ,  $i \in J_N$ , которые необходимо упаковать в область  $D_0$ , и для каждого  $P_i$ ,  $i \in J_N$ , задана перестановка его линейных размеров. Тогда алгоритм получения локального минимума согласно методу последовательно-одиночного размещения можно представить в виде следующих шагов.

1. *Установка счетчика параллелепипедов.* Положим  $c_p = 1$ ,  $C = \{D_0\}$ .

2. *Размещение  $n$ -параллелепипеда.* Из списка  $P$  выбираем  $n$ -параллелепипед  $P_{c_p}$  и размещаем в первый контейнер из множества  $C$ , если  $C \neq \emptyset$ . Иначе выходим из алгоритма с сообщением об ошибке и пустом списке контейнеров. Возможность размещения  $n$ -параллелепипеда в  $l$ -й контейнер обеспечивается выполнением условия

$$a_{c_p i} \leq a_{li}^c, \quad \forall i \in J_n. \quad (10)$$

Если условие (10) выполняется, то  $n$ -параллелепипед размещается так, что  $u_{c_p i}^c = u_{li}^c$ ,  $i \in J_n$ . В этом случае устанавливаем  $c_p = c_p + 1$  и переходим к шагу 3.

Если условие (10) не выполняется, переходим к следующему контейнеру  $l = l + 1$  и повторяем шаг 2. Если условие (10) не выполняется для всех контейнеров из  $S$ , выходим из алгоритма с сообщением о невозможности разместить  $n$ -параллелепипеды в заданной области размещения.

3. *Процедура построения новых контейнеров.* После размещения  $P_{c_p}$  контейнер  $c_l$  разбиваем на максимальные по включению контейнеры (рис. 1).

Разбиение проходит по следующей схеме.

- Если  $u_{c_p,k} + a_{c_p,k} < u_{lk}^c + a_{lk}^c$ , то существует контейнер  $c_z = \{u_z^c, a_z^c\}$ ,  $u_z = \{u_{z1}^c, \dots, u_{zn}^c\}$ ,  $u_{zk}^c = u_{c_p,k} + a_{c_p,k}$ ,  $u_{zj}^c = u_{lj}^c$ ,  $a_z^c = \{a_{z1}^c, \dots, a_{zn}^c\}$ ,  $u_{zk}^c = (u_{lk}^c + a_{lk}^c) - (x_{c_p,k} + a_{c_p,k})$ ,  $u_{zj}^c = u_{lj}^c$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $j \neq k$ ;  $k = 1, \dots, n$ . Добавляем новый контейнер  $c_z$  в множество  $S_{zh}$ .

- Если  $u_{lk}^c < u_{c_p,k}$ , то существует контейнер  $c_h = \{u_h^c, a_h^c\}$ ,  $u_h = \{u_{h1}^c, \dots, u_{hn}^c\}$ ,  $u_{hj}^c = u_{lj}^c$ ,  $\forall j \in J_n$ ,  $a_h^c = \{a_{h1}^c, \dots, a_{hn}^c\}$ ,  $a_k^h = (u_{lk}^c - u_{c_p,k})$ ,  $a_{ht}^c = a_{lt}^c$ ,  $t = 1, \dots, n$ ,  $t \neq k$ ;  $k = 1, \dots, n$ . Добавляем новый контейнер  $c_h$  в множество  $S_{zh}$ . Удаляем контейнер  $c_l$  из  $S$ .

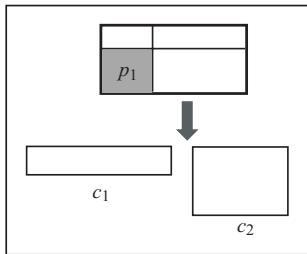


Рис. 1. Схема разбиения контейнера на максимальные по включению контейнеры,  $p_1$  — размещенный  $n$ -параллелепипед,  $c_1, c_2$  — максимальные по включению контейнеры, полученные в результате размещения

4. *Удаление включенных контейнеров.* В результате выполнения шага 3 во множестве  $S_{zh}$  возникает некоторое множество новых контейнеров. Каждый новый контейнер проверяем на включение в каждый контейнер из множества  $S$ . Если контейнер  $c_z \subseteq c_j$ , удаляем контейнер  $c_j$  из  $S$ . Если  $c_j \subseteq c_z$ , удаляем контейнер  $c_z$  из  $S_{zh}$ ,  $z = 1, \dots, |S_{zh}|$ ,  $j = 1, \dots, |S|$ .

5. *Разбиение пересекающихся контейнеров.* Все оставшиеся в множестве  $S_{zh}$  контейнеры проверяем на пересечение с уже размещенными  $n$ -параллелепипедами из  $P$ . Таким образом, если  $c_z \cap p_j \neq \emptyset$ ,  $j = 1, \dots, c_p - 1$ , то необходимо пройти процедуру построения новых контейнеров (шаг 3) для контейнера  $c_z$  и  $n$ -параллелепипеда  $p_j$ , дополнить множество  $S_{zh}$  контейнерами, полученными в результате разбиения всех контейнеров, пересекающих установленные  $n$ -параллелепипеды, добавить все контейнеры из  $S_{zh}$  в множество  $S$ .

6. *Сортировка списка контейнеров.* Отсортируем дополненный список контейнеров  $S$  таким образом, чтобы на первом месте во множестве  $S$  был контейнер с наименьшим значением линейного размера с индексом 1. Сбросить указатель на текущий контейнер:  $l = 1$ .

7. *Выбор следующего n-параллелепипеда из P.* Если множество  $P$  содержит неразмещенные  $n$ -параллелепипеды, т.е.  $c_p < |P| - 1$ , задать  $c_p = c_p + 1$  и перейти к шагу 2. Иначе выходим из алгоритма с сообщением об успешной упаковке  $n$ -параллелепипедов в  $D_0$ .

Таким образом, параллелепипеды помещаются в область  $D_0$  путем последовательно-одиночного размещения. После размещения  $i$ -го параллелепипеда текущий список контейнеров дополняется новыми путем разбиения вновь занятого контейнера на максимальные по включению контейнеры. Процесс размещения заканчивается, если все параллелепипеды размещены или список контейнеров пуст. Результатом выполнения алгоритма будет набор параметров размещения каждого  $n$ -параллелепипеда из  $P$ .

**Поиск приближения к глобальному экстремуму.** Один из способов решения многоэкстремальных задач — перебор локальных экстремумов. Однако даже для сравнительно небольшого числа размещаемых объектов осуществить прямой перебор локальных экстремумов невозможно. Случайный перебор локальных экстремумов при соответствующей его организации дает возможность получения близкого

к глобальному экстремуму решения за сравнительно малое время.

В задаче (7), (8) существует возможность установить соответствие между перестановками  $n$ -параллелепипедов и локальными экстремумами. В работе [12] предложен метод сужающихся окрестностей (МСО), который представляет собой направленный случайный перебор и ориентирован на оптимизацию функций, заданных на множестве перестановок. МСО основан на свойствах вероятностного распределения локальных экстремумов функции цели. Для его реализации необходимо ввести определенную метрику на пространстве перестановок. Поиск лучших значений функции цели осуществляется в окрестностях, заданных на множестве перестановок. На каждом шаге МСО, исходя из накопленной в процессе работы МСО информации, выбираются центры и радиусы новых окрестностей. Если при переходе к очередному шагу МСО значение целевой функции не улучшается, то радиус окрестностей уменьшается. На рис. 2 представлена схема МСО.

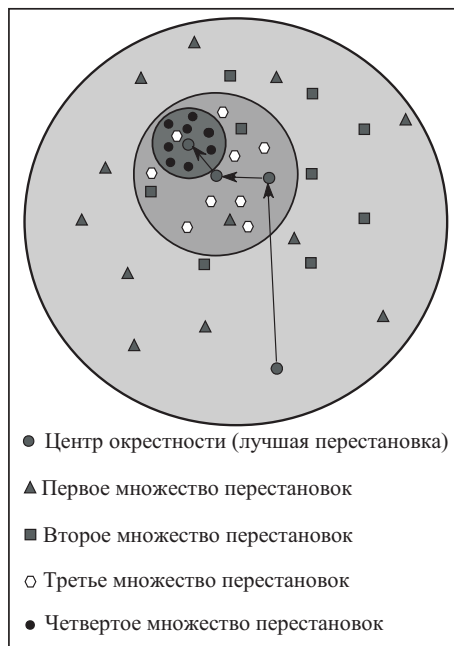


Рис. 2. Схема МСО

Для реализации МСО воспользуемся тем, что каждому  $n$ -параллелепипеду  $P_i$ ,  $i \in J_N$ , поставлен в соответствие вектор его линейных размеров  $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ , а перестановки вида (3) соответствуют всевозможным поворотам  $n$ -параллелепипеда  $P_i$  на угол  $\pi/2$ . Тогда каждой последовательности размещаемых  $n$ -параллелепипедов соответствует вектор  $p^j = (p_1^j, p_2^j, \dots, p_N^j) \in R^{Nn}$ , где  $p_i^j = a_{it}^j$ ,  $i \in J_N$ ,  $t \in J_M$ . Количество векторов  $p^j$  совпадает с числом различных последовательностей  $n$ -параллелепипедов и с учетом количества перестановок  $a_{it}^j$  равно  $N!n!$ .

Различные перестановки  $n$ -параллелепипедов определяются различными реализациями векторов  $p^j$ . Множество всевозможных векторов  $p^j$  представляет собой комбинаторное множество  $\Pi \subset R^m$ ,  $m = nN$ , перестановок элементов  $p_i^j$ , каждый из которых содержит набор упорядоченных линейных размеров  $n$ -параллелепипедов. Элементы множества  $\Pi$  отличаются друг от друга порядком следования элементов  $p_i^j$  и порядком следования элементов  $a_{ik_1}^j, a_{ik_2}^j, \dots, a_{ik_m}^j$  в наборе  $a_{it}^j = p_i^j$ ,  $i \in J_N$ ,  $t \in J_M$ . Множество  $\Pi$  представляет собой комбинаторное множество композиции перестановок  $PW_n$ , введенное и исследованное в [13].

Расстояние между двумя точками  $p^j$  и  $p^i$  множества  $\Pi$  определим следующим образом:

$$d(p^j, p^i) = \sqrt{\sum_{k=1}^N \left( c_k^s \sum_{l=1}^n (a_{kl}^j - a_{kl}^i)^2 \right)}, \quad (11)$$

где  $c_k^s = \left( \frac{n+1-k}{n} \right)^s$  — весовой коэффициент элементов последовательности, который придает наибольший вес первым элементам последовательности,  $s$  — степень усиления весового коэффициента,  $s \in \{1, 2, 3\}$ . Используя неравенство Коши–Буняковского, легко проверить, что выражение (11) является метрикой.

Множество  $\Pi$  состоит из вершин выпуклого многогранника, вписанного в гиперсферу, т.е. множество  $\Pi$  содержится в некоторой гиперсфере [1,13]. Расстояние между любыми двумя точками множества не превышает диаметра гиперсферы, на которой лежат точки множества  $\Pi$ . В [13] выполнено отображение множества  $PW_n$  в евклидово пространство и определен его диаметр. Это дает возможность использовать исследованные свойства композиции перестановок в МСО при решении поставленной задачи.

Выбор перспективных перестановок (центров новых окрестностей) основывается на вероятности получения меньших значений функции цели. Для вычисления вероятности получения лучшего значения целевой функции необходимо задаться гипотезой о характере распределения значений целевой функции в локальных минимумах. Предположим, что каждый локальный экстремум — случайная величина и зависит от перестановки размещаемых объектов. Гистограммы значений целевой функции (7), полученные в результате численных экспериментов, в которых генерировались случайные последовательности объектов и их линейных размеров, показали, что распределение значений целевой функции близко к нормальному.

Очевидно, что перспективность перестановки зависит от выборочной средней и от выборочной дисперсии значений функции цели в окрестности рассматриваемого радиуса. В работе [12] показано, что при переходе от «слепого» случайного перебора перестановок к формированию случайных перестановок в окрестностях рассматриваемых центров, полученных специальным образом, происходит уменьшение математического ожидания. Рассмотрим на примере, как данный факт влияет на вероятность получения меньших значений целевой функции для случая нормального распределения значений целевой функции. Пусть  $b$  — наименьшее полученное значение функции цели и пусть в окрестностях двух разных центров получены математические ожидания  $m_1, m_2$  и дисперсии  $\sigma_1, \sigma_2$  соответственно. Тогда при одинаковом математическом ожидании для различных двух центров окрестностей вероятность получения значения целевой функции меньше  $b$  будет для центра с большей дисперсией (рис. 3). При разных математических ожиданиях и равной дисперсии вероятность получения значения целевой функции меньше  $b$  будет для центра с меньшим математическим ожиданием (рис. 3).

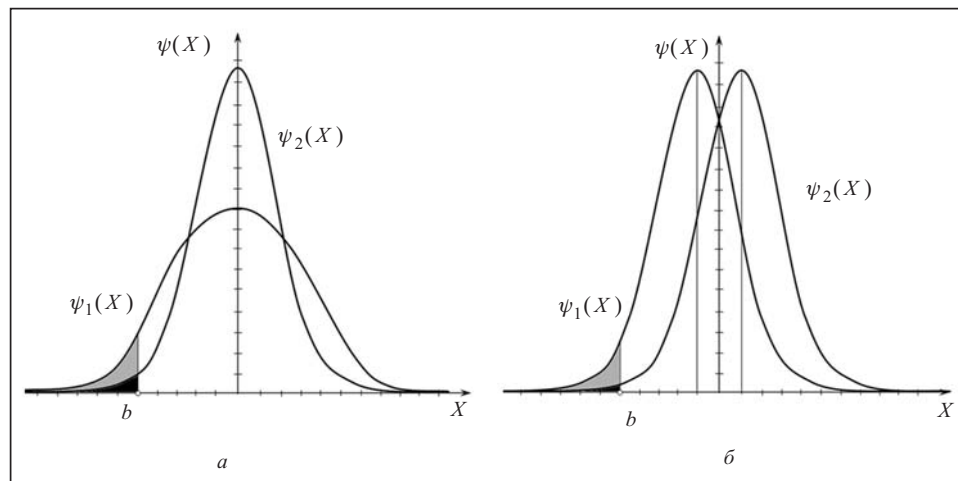


Рис. 3. Функция, описывающая дифференциальные законы распределения  $\psi(X)$  случайной величины  $X$ :  $m_1 = m_2, \sigma_1 > \sigma_2$  (а);  $m_1 < m_2, \sigma_1 = \sigma_2$  (б)

Описанные свойства позволяют построить сходящийся алгоритм, осуществляющий направленный сдвиг математического ожидания функции цели в сторону ее глобального минимума. Для «направленного» перебора локальных экстремумов на множестве  $\Pi$  используется модификация алгоритма МСО. Опишем кратко ее схему.

### 1. Этап настройки МСО.

1. Проводится случайная генерация перестановок, в соответствии с которыми определяются локальные минимумы задачи (7), (8).

2. Из множества сгенерированных перестановок выбирается 10 перестановок, которые соответствуют локальным экстремумам с наименьшими полученными значениями целевой функции.

3. Исследуется «поведение» значений целевой функции «вблизи» выбранных последовательностей. Для этого в окрестностях с центрами в выбранных 10 точках множества  $\Pi$  генерируются равномерно распределенные случайные выборки перестановок из  $\Pi$ . При этом радиус окрестностей принимается равным четверти диаметра множества  $\Pi$ .

4. В соответствии с перестановками, сгенерированными в окрестностях выбранных центров, определяются локальные экстремумы задачи (7), (8).

5. Вычисляются математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение значений целевой функции на множествах локальных экстремумов, соответствующих сгенерированным выборкам в окрестностях выбранных центров.

6. Выбираются «перспективные» перестановки (центры окрестностей для следующей итерационного этапа). Выбор центров основывается на вероятности получения меньших значений функции цели.

### 2. Итерационный этап МСО.

1. Проводится генерация случайных выборок перестановок в окрестностях текущих центров.

2. В соответствии с перестановками, сгенерированными в окрестностях текущих центров, определяются локальные минимумы задачи (7), (8).

3. Вычисляются математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение значений целевой функции на множествах локальных экстремумов, соответствующих сгенерированным выборкам в окрестностях текущих центров.

4. Выбираются центры новых трех окрестностей для следующей итерации (выбор новых центров основывается на вероятности получения меньших значений функции цели).

5. Вычисляется радиус новых окрестностей для следующей итерации. Если на текущей итерации улучшено значение целевой функции, то радиус окрестностей увеличивается, иначе уменьшается.

6. Проверяются условия остановки МСО. Если количество локальных минимумов с одинаковыми значениями функции цели превышает 60 %, то поиск прекращается, иначе осуществляется переход к следующей итерации (если радиус окрестностей приближается к минимальному значению, то количество одинаковых локальных минимумов либо локальных минимумов с равными значениями функции цели значительно увеличивается).

В итоге в качестве приближения к глобальному минимуму задачи выбирается локальный экстремум с наименьшим значением целевой функции.

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

На основе предложенного метода решения поставленной задачи разработано программное обеспечение и проведены вычислительные эксперименты, цель которых — проверка эффективности предложенного подхода к решению задачи и сравнение полученных результатов с аналогами. Поскольку найти в публикациях задачи в рассмотренной постановке не удалось, сравнение проводилось с результатами размещения ориентированных параллелепипедов [8]. В качестве одного из примеров решена задача упаковки 50 параллелепипедов в контейнер, имеющий размеры основания [567, 234]. В результате использования предложенного метода решения для этой задачи смогли улучшить значение целевой функции на 3,33 % и получить значение, равное 573 (в [8] получено значение 593). Исходные данные и результаты решения задачи приведены в табл. 1.



Таблица 1

Исходные данные		Результаты решения	
Номер параллелепипеда	Линейные размеры	Номер параллелепипеда	[Полос]: [Линейные размеры]
1	[24; 102; 35]	49	[0; 0; 0]: [130; 44; 195]
2	[195; 116; 37]	2	[0; 44; 0]: [37; 195; 116]
3	[185; 157; 130]	26	[0; 0; 195]: [39; 42; 24]
4	[143; 179; 85]	36	[0; 239; 0]: [118; 65; 139]
5	[34; 60; 42]	39	[0; 44; 116]: [134; 118; 129]
6	[30; 172; 83]	14	[37; 44; 0]: [75; 188; 86]
7	[15; 124; 39]	5	[0; 162; 116]: [60; 34; 42]
8	[68; 148; 74]	3	[134; 0; 0]: [130; 185; 157]
9	[95; 44; 153]	6	[0; 162; 158]: [172; 30; 83]
10	[196; 143; 26]	12	[0; 196; 139]: [132; 94; 89]
11	[146; 6; 154]	25	[172; 185; 0]: [138; 158; 174]
12	[94; 89; 132]	22	[0; 290; 139]: [42; 14; 28]
13	[67; 96; 198]	17	[0; 192; 228]: [22; 76; 16]
14	[86; 75; 188]	27	[118; 290; 0]: [29; 47; 151]
15	[6; 45; 99]	15	[0; 268; 228]: [99; 45; 6]
16	[25; 18; 7]	38	[37; 44; 86]: [2; 125; 21]
17	[76; 16; 22]	18	[172; 0; 157]: [129; 178; 29]
18	[129; 29; 178]	29	[172; 0; 186]: [117; 176; 18]
19	[94; 87; 159]	37	[264; 0; 0]: [125; 181; 104]
20	[185; 16; 33]	20	[0; 290; 174]: [185; 16; 33]
21	[115; 34; 72]	40	[301; 0; 104]: [90; 174; 113]
22	[42; 14; 28]	8	[310; 174; 104]: [148; 68; 74]
23	[73; 61; 29]	23	[39; 44; 86]: [61; 73; 29]
24	[141; 87; 138]	7	[0; 0; 219]: [124; 39; 15]
25	[138; 174; 158]	35	[22; 192; 234]: [46; 86; 10]
26	[39; 42; 24]	13	[132; 192; 178]: [198; 96; 67]
27	[151; 47; 29]	21	[0; 304; 0]: [115; 34; 72]
28	[70; 96; 130]	19	[310; 181; 0]: [94; 159; 87]
29	[117; 18; 176]	43	[0; 306; 72]: [117; 37; 113]
30	[136; 59; 26]	28	[389; 0; 0]: [70; 130; 96]
31	[148; 5; 132]	32	[132; 185; 0]: [23; 51; 150]
32	[23; 150; 51]	4	[404; 130; 0]: [143; 179; 85]
33	[137; 94; 48]	48	[172; 0; 217]: [151; 182; 11]
34	[68; 56; 116]	24	[391; 0; 96]: [87; 138; 141]
35	[46; 86; 10]	50	[458; 138; 85]: [21; 148; 107]
36	[118; 139; 65]	46	[132; 236; 0]: [12; 47; 148]
37	[181; 104; 125]	30	[134; 0; 157]: [26; 136; 59]
38	[2; 125; 21]	9	[479; 0; 85]: [44; 153; 95]
39	[134; 118; 129]	1	[0; 306; 185]: [102; 35; 24]
40	[174; 113; 90]	16	[0; 196; 116]: [7; 25; 18]
41	[9; 136; 108]	31	[155; 185; 0]: [5; 148; 132]
42	[101; 145; 71]	33	[330; 174; 178]: [94; 137; 48]
43	[117; 37; 113]	34	[185; 288; 174]: [116; 56; 68]
44	[27; 194; 97]	44	[424; 138; 192]: [97; 194; 27]
45	[46; 28; 164]	45	[323; 0; 217]: [46; 164; 28]
46	[47; 12; 148]	41	[310; 332; 87]: [136; 9; 108]
47	[107; 27; 82]	42	[479; 153; 85]: [71; 145; 101]
48	[182; 11; 151]	47	[424; 242; 85]: [27; 82; 107]
49	[195; 44; 130]	10	[547; 0; 0]: [26; 143; 196]
50	[21; 148; 107]	11	[134; 0; 228]: [154; 146; 6]

Общий вид размещения параллелепипедов, соответствующее полученному результату, приведена на рис. 4.

Кроме того, решены задачи различной размерности (от 10 до 200 параллелепипедов), для которых исходные данные генерировались случайным образом. Решение показало, что использование метода сужающихся окрестностей позволяет получить лучшее решение по сравнению с решением, полученным путем однократной последовательно-одиночной упаковки параллелепипедов.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные в работе математическая модель и метод решения задачи упаковки  $n$ -мерных параллелепипедов в параллелепипеде с возможностью их ортогональной ориентации позволяют улучшить результаты упаковки ориентированных  $n$ -мерных параллелепипедов, что подтверждается вычислительными экспериментами.

Применение модифицированного МСО для поиска приближения к глобальному минимуму задачи более эффективно и оправдано по сравнению с классическим методом Монте-Карло, поскольку поиск осуществляется на таких перестановках, что вероятность получения лучших значений целевой функции, по крайней мере, не уменьшается. Важно и то, что при использовании МСО результат решения получается за конечное число шагов. Однако следует отметить, что поскольку МСО является вероятностным методом, результат поиска неоднозначен и зависит от того, какие случайные перестановки будут сгенерированы. Вместе с тем при использовании того же датчика случайных чисел при прежнем взводе будут получены те же значения целевой функции. Таким образом, метод сужающихся окрестностей дает вполне воспроизводимые результаты.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — Киев: Наук. думка, 1986. — 268 с.
2. Dyckhoff H., Finke U. Cutting and packing in production and distribution. — Berlin: Physica Verlag, 1992. — 205 p.
3. Hopper E., Turton B. C. H. A review of the application of meta-heuristic algorithms to 2d regular and irregular strip packing problems // Artificial Intelligence Review. — 2001. — N 16. — P. 257–300.
4. Berger M., Schruder M., Kufer K.-H. A constraint programming approach for the two-dimensional rectangular packing problem with orthogonal orientation // Proc. Intern. Conf. «Oper. Res. 2008, OR and Global Business». — Augsburg, Germany. — 2008. — P. 194.
5. Lesh N., Marks J., McMahon A., Mitzenmacher M. New heuristic and interactive approaches to 2d rectangular strip packing // J. Exp. Algorithmic. — 2005. — 10.
6. Packing a trunk — now with a twist! / F. Eisenbrand, S. Funke, A. Karrenbauer, J. Reichel, E. Schömer // Proc. SPM 2005 ACM Symposium on Solid and Physical Modeling, New York, USA. — June, 2005. — P. 197–206.
7. Lins L., Lins S., Morabito R. An  $n$ -tet graph approach for non-guillotine packing of  $n$ -dimensional boxes into an  $n$ -container // Europ. J. of Oper. Res. — 2002. — N 141. — P. 421–439.
8. Гиль Н.И., Софронова М.С. Решение задач упаковки  $n$ -мерных параллелепипедов для оптимизации выполнения работ на машиностроительных предприятиях // Проблемы машиностроения. — 2005. — 8, № 4. — С. 55–66.
9. Стоян Ю.Г. Об одном обобщении функции плотного размещения // Докл. АН УССР. — 1980. — № 8. — С. 70–74.
10. Стоян Ю.Г., Гиль Н.И., Муравьева М.С. Ф-функция  $n$ -мерных параллелепипедов // Доп. НАН України. — 2005. — № 3. — С. 22–27.
11. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. — М.: Мир, 1985. — 512 с.
12. Стоян Ю.Г., Соколовский В.З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. — Киев: Наук. думка, 1980. — 208 с.
13. Гребенник И.В., Баранов А.В. Решение некоторых экстремальных задач на множестве композиций перестановок // Радиотехника. — 2007. — Вып. 149. — С. 12–17.
14. Гиль М.І., Софронова М.С. Комп'ютерна програма «Packing of  $n$ -parallepipeds». Свідство про реєстрацію авторського права на твір, № 14099. Державний департамент інтелектуальної власності, 09.09.05.

Поступила 08.07.2009

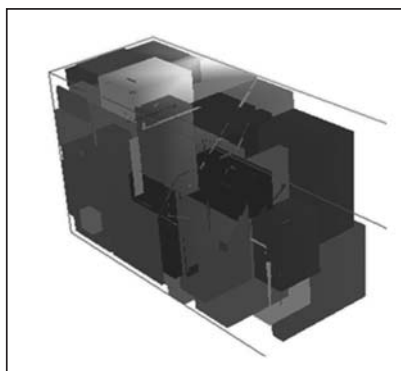


Рис. 4. Общий вид 50-ти параллелепипедов с возможностью изменения их ортогональной ориентации