УДК 510.644

В.Я. БУРДЮК

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ ДОВЕРИЯ

Ключевые слова: *многозначная логика, законы логики, логика доверия.*

ВВЕДЕНИЕ

Пропозициональные переменные двузначной логики L_2 принимают либо значение «истина», обозначаемое числом 1, либо значение «ложь», обозначаемое числом 0. В трехзначной логике Лукасевича появляется промежуточное значение истинности, обозначаемое числом $1/2$. Оно вызывает недоверие к себе и побуждает к созданию логики (логик) доверия.

Многие утверждения, в том числе и математические, воспринимаются на уровне доверия–недоверия, причем как степень доверия, так и степень недоверия могут быть разными. Измеряем эту степень числом tt (trust), считая, что должно выполняться $1/2 < tt \le 1$. Утверждения, вызывающие безразличие, логикой доверия игнорируются.

Уяснив эту ситуацию, автор выносит на суд читателей семейство пропозициональных логик доверия. В разд. 1 данной статьи представлены основные определения и введена унарная операция отрицания. В разд. 2 по аналогии с логикой L_2 введены бинарные операции импликации, дизъюнкции, конъюнкции, эквиваленции и исследованы их свойства. В разд. 3 дано определение формул и законов логик доверия; доказано, что формулы логик доверия будут законами этих логик, если и только если они (формулы) являются тавтологиями логики L_2. В разд. 4 рассмотрены конечнозначные логики доверия, фактически совпадающие с известными $2k$-значными логиками $(k = 1, 2, \dots)$; рассмотрена также счетнозначная логика доверия, отличающаяся от бесконечнозначной логики Клини (см. [1, с. 79]) более узкой областью интерпретации пропозициональных переменных.

Чтение статьи требует минимального знания по логике L_2 из [2] и по многозначным логикам из [1].

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для натурального $m = 2, 3, \dots$ и рационального $tt \in (1/2, 1]$ строим пропозициональную m-уровневую **логику доверия** степени tt, сокращенно **логику** $L(m, tt)$. Пропозициональные переменные $p, p_1, p_2, \dots$ логики $L(m, tt)$ принимают значения логических m-распределений $a, b, c, d, e, a_1, b_1, c_1, \dots$ **Логическое *m*-распределение** — это такой числовой m-мерный вектор $a = (a[1], a[2], \dots, a[m])$, что его компоненты $a[i]$ — неотрицательные рациональные числа, причем $a[1] + \dots + a[m] = 1$ и $a[1] \ge tt \vee a[m] \ge tt$. Однако если $m > 3$, то $a[2] = \dots = a[m-1] = (1 - a[1] - a[m]) / (m-2)$.

Логическое m-распределение a называем tt-**истинным**, если $a[1] \ge tt$, и tt-**ложным**, если $a[m] \ge tt$. Логические m-распределения $(1, 0, \dots, 0)$ и $(0, \dots, 0, 1)$ обозначаем 1_m и 0_m, называя их соответственно **абсолютно истинным** и **абсолютно ложным**, так как они соответствуют наивысшей степени доверия $(tt = 1)$ и недоверия $(tt = 0)$.

Имеем $1_2 = (1, 0)$ и $0_2 = (0,1)$. Получаем естественную биекцию $1_2 \to 1$ и $0_2 \to 0$ множеств $\{1_2, 0_2\}$ и $\{1, 0\}$, интерпретируя $\{1, 0\}$ как множество логических значений переменных $p, p_1, p_2, \dots$ логики L_2. Поэтому логику $L(m, tt)$ строим так, чтобы логики $L(2, 1)$ и L_2 по существу не различались.

Рассмотрим поясняющий пример. Пусть в некотором коллективе, состоящем из $n > 2$ индивидов, путем голосования принимается некоторое жизненно важное правило поведения R, причем каждый индивид голосует либо «ЗА», **доверяя** правилу R (их v_+), либо «ПРОТИВ», **не доверяя** правилу R (их v_-), либо «ВОЗДЕРЖИВАЕТСЯ» (и таких $v_= = n - v_+ - v_-$). В итоге появляется логическое 3-распределение $a = (a[1], a[2], a[3])$, в котором $a[1] = v_+ / n$, $a[2] = v_= / n$, $a[3] = v_- / n$, и правило поведения R либо принимается (для этого надо иметь $a[1] \ge tt > 1/2$), либо не принимается, но в случае $a[3] \ge tt > 1/2$ правило R отвергается, а во всех остальных случаях оно может быть усовершенствовано и еще раз проголосовано.

Множество всех tt-истинных (всех tt-ложных) m-распределений обозначим $T(m, tt)$ (соответственно $F(m, tt)$). Получим $1_m \in T(m, tt)$ и $0_m \in F(m, tt)$. Образуем множество $D(m, tt) = T(m, tt) \cup F(m, tt)$.

Лемма 1. Если $a \in T(m, tt)$, то $a[m] < tt$; если $a \in F(m, tt)$, то $a[1] < tt$.

Доказательство. Пусть $a \in T(m, tt)$, значит, $a[1] \ge tt$; и если бы выполнялось $a[m] \ge tt$, то получили бы $a[1] + a[m] \ge tt + tt > 1$, ибо $tt > 1/2$. Однако по определению имеем $a[1] + a[m] \le 1$, так что должно быть $a[m] < tt$. Вторая часть леммы доказывается аналогично. ■

Лемма 2. Если для $a, b \in D(m, tt)$ вычислить

$$c_1 = \max(a[m], b[1]),\ c_2 = \min(a[1], b[m]),$$

$$c_3 = \min(a[1] + a[m], a[m] + b[m]),\ c_4 = \min(a[1] + b[1], b[1] + b[m]),$$

то получим $c_1 + c_2 = \max(c_3, c_4) \le 1$, причем либо $c_1 \ge tt$, либо $c_2 \ge tt$, но если $a[1] + a[m] = 1$ и $b[1] + b[m] = 1$, то $c_1 + c_2 = 1$.

Доказательство. Сначала покажем, что $c_1 + c_2 = \max(c_3, c_4)$. Имеем

$$c_1 + c_2 = \max(a[m] + c_2, b[1] + c_2) =$$

$$= \max(\min(a[1] + a[m], b[m] + a[m]), \min(a[1] + b[1], b[m] + b[1])) = \max(c_3, c_4),$$

а также $a[1] + a[m] \le 1$ и $b[1] + b[m] \le 1$, поэтому $c_3 \le 1$ и $c_4 \le 1$. Получили $c_1 + c_2 = \max(c_3, c_4) \le 1$.

Теперь покажем, что либо $c_1 \ge tt$, либо $c_2 \ge tt$. Если $c_1 \ge tt$, то из $tt > 1/2$ и только что полученного $c_1 + c_2 \le 1$ следует $c_2 < tt$, иначе $c_1 = \max(a[m], b[1]) < tt$, поэтому $a[m] < tt$ и $b[1] < tt$, так что (см. лемму 1) $a[1] \ge tt$ и $b[m] \ge tt$. Отсюда следует, что $\min(a[1], b[m]) \ge tt$, т.е. что $c_2 \ge tt$.

Пусть теперь выполняются условия $a[1] + a[m] = 1$ и $b[1] + b[m] = 1$. Тогда

$$c_3 = \min(1, a[m] + b[m]),\ c_4 = \min(a[1] + b[1], 1),$$

однако $(a[m] + b[m]) + (a[1] + b[1]) = a[1] + a[m] + b[1] + b[m] = 2$. Поэтому если $(a[m] + b[m]) \le (a[1] + b[1])$, то $a[1] + b[1] \ge 1$. Отсюда

$$c_4 = \min(a[1] + b[1], 1) = 1;$$

но тогда $\max(c_3, c_4) \ge 1$, что вместе с ранее полученным $\max(c_3, c_4) \le 1$ дает $c_1 + c_2 = \max(c_3, c_4) = 1$. Если же $(a[m] + b[m]) \ge (a[1] + b[1])$, то $a[m] + b[m] \ge 1$, и поэтому $c_3 = \min(1, a[m] + b[m]) = 1$. Однако тогда, как и ранее, $\max(c_3, c_4) \ge 1$, так что имеем $c_1 + c_2 = \max(c_3, c_4) = 1$. ■

Введем на множестве $D(m, tt)$ унарную операцию отрицания $\neg$, а именно $\neg(a[1], a[2], \dots, a[m]) = (a[m], a[m-1], \dots, a[1])$ для $a \in D(m, tt)$, т.е. $\neg a$ — это записанное в обратном порядке m-распределение a. Имеем $\neg 1_m = 0_m$, $\neg 0_m = 1_m$ (аналоги $\neg 1 = 0$, $\neg 0 = 1$ в логике L_2), $\neg\neg a = a$; если $a \in T(m, tt)$, то $\neg a \in F(m, tt)$; если $a \in F(m, tt)$, то $\neg a \in T(m, tt)$.

В следующем разделе введем новые операции на множестве $D(m, tt)$ — аналоги операций $\Rightarrow, \vee, \wedge, \Leftrightarrow$ логики L_2. Порядок выполнения новых операций при отсутствии скобок, регулирующих этот порядок, будет таким же, как и в логике L_2, т.е. $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

2. БИНАРНЫЕ ОПЕРАЦИИ

Для произвольных $a, b \in D(m, tt)$ строим m-мерный вектор c, где $c[1] = c_1$, $c[m] = c_2$, а если $m > 2$, то $c[2] = \dots = c[m-1] = (1 - (c_1 + c_2)) / (m-2)$, предварительно определив числа c_1 и c_2 так, как в лемме 2, т.е. $c_1 = \max(a[m], b[1])$, $c_2 = \min(a[1], b[m])$.

Из леммы 2 следует, что построенный m-мерный вектор c — это логическое m-распределение; обозначим $c = a \Rightarrow b$ и назовем m-распределение $a \Rightarrow b$ импликацией m-распределений a и b. Такое название естественно, ибо

$$1_m \Rightarrow 1_m = 1_m,\ 1_m \Rightarrow 0_m = 0_m,\ 0_m \Rightarrow 1_m = 1_m,\ 0_m \Rightarrow 0_m = 1_m, \tag{1}$$

$$1 \Rightarrow 1 = 1,\ 1 \Rightarrow 0 = 0,\ 0 \Rightarrow 1 = 1,\ 0 \Rightarrow 0 = 1, \tag{2}$$

причем вычисления соотношений (2) проведены в логике L_2.

Теорема 1. Для любых $a, b \in D(m, tt)$ выполняются следующие утверждения:

1) $a \Rightarrow b = (\max(a[m], b[1]), \ldots, \min(a[1], b[m]))$;

2) если $a \in T(m, tt)$ и $b \in T(m, tt)$, то $a \Rightarrow b = b$;

3) если $a \in T(m, tt)$ и $b \in F(m, tt)$, то $a \Rightarrow b \in F(m, tt)$;

4) если $a \in F(m, tt)$ и $b \in T(m, tt)$, то $a \Rightarrow b \in T(m, tt)$;

5) если $a \in F(m, tt)$ и $b \in F(m, tt)$, то $a \Rightarrow b = \neg a$.

Доказательство. Обозначив $c = a \Rightarrow b$, докажем утверждения 1)–5):

1) это утверждение непосредственно следует из определения;

2) пусть $a \in T(m, tt)$ и $b \in T(m, tt)$, значит, $a[1] \geq tt$ и $b[1] \geq tt$; тогда $a[m] < tt$ и $b[m] < tt$ (см. лемму 1), поэтому получаем

$$c[1] = \max(a[m], b[1]) = b[1], \quad c[m] = \min(a[1], b[m]) = b[m],$$

так что окончательно имеем $c = b$, т.е. $(a \Rightarrow b) = b$;

3) пусть $a \in T(m, tt)$ и $b \in F(m, tt)$, значит, $a[1] \geq tt$ и $b[m] \geq tt$; тогда $c[m] = \min(a[1], b[m]) \geq tt$, поэтому $a \Rightarrow b \in F(m, tt)$;

4) пусть $a \in F(m, tt)$ и $b \in T(m, tt)$, значит, $a[m] \geq tt$ и $b[1] \geq tt$; тогда $c[1] = \max(a[m], b[1]) \geq tt$, поэтому $(a \Rightarrow b) \in T(m, tt)$;

5) пусть $a \in F(m, tt)$ и $b \in F(m, tt)$, значит, $a[m] \geq tt$ и $b[m] \geq tt$; тогда $a[1] < tt$ и $b[1] < tt$ (см. лемму 1); отсюда следует, что $c[1] = \max(a[m], b[1]) = a[m]$ и $c[m] = \min(a[1], b[m]) = a[1]$, т.е. что $a \Rightarrow b = \neg a$. ■

Теорема 2. Импликация $a \Rightarrow b$ будет tt-ложной, если и только если a есть tt-истинное, а b — tt-ложное логические m-распределения.

Доказательство. Если $a \in T(m, tt)$ и $b \in F(m, tt)$, то $a \Rightarrow b \in F(m, tt)$ в силу п. 3) теоремы 1. В остальных случаях (см. пп. 2), 4), 5) той же теоремы) выполняется $a \Rightarrow b \in T(m, tt)$. ■

Из теоремы 2 непосредственно следует важная для дальнейшего теорема.

Теорема 3. Если $a \in T(m, tt)$ и $a \Rightarrow b \in T(m, tt)$, то $b \in T(m, tt)$.

На основании этой теоремы правилом выведения modus ponens можно пользоваться и в логике $L(m, tt)$. Следующей теоремой введем операции дизъюнкции $\vee$, конъюнкции $\wedge$ и эквиваленции $\Leftrightarrow$.

Теорема 4. Если для $a, b \in D(m, tt)$ определим $a \vee b = \neg a \Rightarrow b$, $a \wedge b = \neg(a \Rightarrow \neg b)$, $a \Leftrightarrow b = (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$, то получим законы де Моргана $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$, $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$, а также следующие утверждения:

1) $a \vee b = (\max(a[1], b[1]), \ldots, \min(a[m], b[m]))$;

2) $a \wedge b = (\min(a[1], b[1]), \ldots, \max(a[m], b[m]))$;

3) $a \Leftrightarrow b = (\min(\alpha, \beta), \ldots, \max(\chi, \delta))$, где $\alpha = \max(a[1], b[m])$, $\beta = \max(a[m], b[1])$, $\chi = \min(a[1], b[m])$, $\delta = \min(a[m], b[1])$;

4) если $a, b \in T(m, tt)$, то $(a \vee b) \in T(m, tt)$, $(a \wedge b) \in T(m, tt)$, $a \Leftrightarrow b = b \Rightarrow a$;

5) если $a \in T(m, tt)$, $b \in F(m, tt)$, то $(a \Leftrightarrow b) \in F(m, tt)$, $a \vee b = a$, $a \wedge b = b$;

6) если $a \in F(m, tt)$, $b \in T(m, tt)$, то $(a \Leftrightarrow b) \in F(m, tt)$, $a \vee b = b$, $a \wedge b = a$;

7) если $a, b \in F(m, tt)$, то $(a \vee b), (a \wedge b) \in F(m, tt)$ и $a \Leftrightarrow b = \neg(a \vee b)$.

Доказательство. Из $a \vee b = \neg a \Rightarrow b$ и $\neg\neg a = a$ получаем $\neg a \vee b = \neg\neg a \Rightarrow b = a \Rightarrow b$. Поэтому $\neg a \vee \neg b = a \Rightarrow \neg b$. Отсюда имеем $\neg(\neg a \vee \neg b) = \neg(a \Rightarrow \neg b) = a \wedge b$, поэтому $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$, а также $\neg(\neg a \wedge \neg b) = \neg\neg a \vee \neg\neg b = a \vee b$, так что $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$.

Теперь проверим соотношения 1) – 3) теоремы 4.

1) имея $\neg a = (a[m], a[m-1], \ldots, a[1])$ и теорему 1, получаем

$$a \vee b = \neg a \Rightarrow b = (\max(a[1], b[1]), \ldots, \min(a[m], b[m]));$$

2) из 1) имеем $\neg a \vee \neg b = (\max(a[m], b[m]), \ldots, \min(a[1], b[1]))$, поэтому $a \wedge b = \neg(\neg a \vee \neg b) = (\min(a[1], b[1]), \ldots, \max(a[m], b[m]))$;

3) из соотношений 1) теоремы 1 и проверенного п. 2) получаем непосредственно соотношение 3);

(обозначив $d = a \vee b$, $c = a \wedge b$, $e = a \Leftrightarrow b$, докажем утверждения пп. 4)–7))

4) пусть $a, b \in T(m, tt)$, значит, $a[1] \geq tt$ и $b[1] \geq tt$, тогда имеем (в силу леммы 1) $a[m] < tt$ и $b[m] < tt$, поэтому $d[1] = \max(a[1], b[1]) \geq tt$, $c[1] = \min(a[1], b[1]) \geq tt$; итак, $d, c \in T(m, tt)$;

(из теоремы 1 имеем: если $a, b \in T(m, tt)$, то $a \Rightarrow b = b$ и $b \Rightarrow a = a$; отсюда получаем $a \Leftrightarrow b = (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a) = b \Rightarrow a$)

5) пусть $a \in T(m, tt)$, $b \in F(m, tt)$, значит, $a[1] \geq tt$, $b[m] \geq tt$; тогда $a[m] < tt$ и $b[1] < tt$; следовательно, $d[1] = \max(a[1], b[1]) = a[1]$, $c[1] = \min(a[1], b[1]) = b[1]$, $d[m] = \min(a[m], b[m]) = a[m])$, $c[m] = \max(a[m], b[m]) = b[m])$, поэтому $d = (a \vee b) = a$, $c = (a \wedge b) = b$; кроме того, вы-

полняется $\max(a[1], b[m]) \geq tt$ и $\max(a[m], b[1]) < tt$; поэтому $e[1] = \min(\max(a[1], b[m]), \max(a[m], b[1])) < tt$; отсюда получаем $(a \Leftrightarrow b) \in F(m, tt)$, так как $e = (a \Leftrightarrow b)$;

6) пусть $a \in F(m, tt)$, $b \in T(m, tt)$, значит, $a[m] \geq tt$, $b[1] \geq tt$, тогда $a[1] < tt$ и $b[m] < tt$; следовательно, $d[1] = \max(a[1], b[1]) = b[1]$, $c[1] = \min(a[1], b[1]) = a[1]$, $d[m] = \min(a[m], b[m]) = b[m]$, $c[m] = \max(a[m], b[m]) = a[m]$, поэтому $d = (a \vee b) = b$, $c = (a \wedge b) = a$; кроме того, выполняется $\max(a[1], b[m]) < tt$ и $\max(a[m], b[1]) \geq tt$; поэтому $e[1] = \min(\max(a[1], b[m]), \max(a[m], b[1])) < tt$; отсюда получаем $e = (a \Leftrightarrow b) \in F(m, tt)$;

7) пусть $a, b \in F(m, tt)$, значит, $a[m] \geq tt$, $b[m] \geq tt$; отсюда получаем $d[m] = \min(a[m], b[m]) \geq tt$ и $c[m] = \max(a[m], b[m]) \geq tt$, поэтому $(a \vee b) \in F(m, tt)$ и $(a \wedge b) \in F(m, tt)$.

Из теоремы 1 имеем: если $a, b \in F(m, tt)$, то $(a \Rightarrow b) = \neg a$ и $(b \Rightarrow a) = \neg b$, отсюда получаем $(a \Leftrightarrow b) = (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a) = \neg a \wedge \neg b = \neg(a \vee b)$. ■

Теорема 5. Для произвольных $a, b, c \in D(m, tt)$ выполняются следующие соотношения:

$a \vee a = a$, $a \wedge a = a$, $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$,

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$,

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,

$a \vee 0_m = a$, $a \wedge 1_m = a$, $a \wedge 0_m = 0_m$, $a \vee 1_m = 1_m$,

$(a \vee \neg a) \in T(m, tt)$, $(a \wedge \neg a) \in F(m, tt)$.

Доказательство. Проверим взаимную дистрибутивность конъюнкции и дизъюнкции, а также последние два соотношения теоремы 5. Проверка остальных соотношений тривиальная. Итак,

$$a \vee \neg a = (\max(a[1], a[m]), \ldots, \min(a[m], a[1])),$$

$$a \wedge \neg a = (\min(a[1], a[m]), \ldots, \max(a[m], a[1])).$$

Но $\max(a[1], a[m]) \geq tt$, поэтому $(a \vee \neg a) \in T(m, tt)$ и $(a \wedge \neg a) \in F(m, tt)$.

Обозначив $d = a \wedge (b \vee c)$, $e = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, получим:

$d[1] = \min(a[1], \max(b[1], c[1]))$, $d[m] = \max(a[m], \min(b[m], c[m]))$,

$e[1] = \max(\min(a[1], b[1]), \min(a[1], c[1]))$,

$e[m] = \min(\max(a[m], b[m]), \max(a[m], c[m]))$.

Необходимо показать, что $d[1] = e[1]$ и $d[m] = e[m]$. Для этого докажем лемму 3.

Лемма 3. Если на множестве X задано отношение линейного порядка $\leq$, то

$$A := (\forall x, y, z \in X) \min(x, \max(y, z)) = \max(\min(x, y), \min(x, z));$$

$$B := (\forall x, y, z \in X) \max(x, \min(y, z)) = \min(\max(x, y), \max(x, z)).$$

Доказательство. Как видим, утверждения A и B двойственные, поэтому доказываем только A, проверив все шесть вариантов линейного упорядочения для элементов $x, y, z \in X$ (см. схему записи, в которой результат выполнения бинарной операции помещен под именем операции):

	$\min$	$(x, \max(y,z))$	$= \max$	$(\min(x,y),$	$\min(x,z))$
$x \leq y \leq z$	x	z	x	x	x
$x \leq z \leq y$	x	y	x	x	x
$y \leq x \leq z$	x	z	x	y	x
$y \leq z \leq x$	z	z	z	y	z
$z \leq x \leq y$	x	y	x	x	z
$z \leq y \leq x$	y	y	y	y	z

Из схемы видно, что утверждение A истинно. ■

Продолжим доказательство теоремы 5. Положив $x = a[1]$, $y = b[1]$, $z = c[1]$, по утверждению A леммы 3 получим $d[1] = e[1]$. Положив $x = a[m]$, $y = b[m]$, $z = c[m]$, по утверждению B леммы 3 получим $d[m] = e[m]$. Итак, имеем первую дистрибутивность.

Обозначив $d_1 = a \vee (b \wedge c)$ и $e_1 = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, получим

$$d_1[1] = \max(a[1], \min(b[1], c[1])), \ d_1[m] = \min(a[m], \max(b[m], c[m])),$$

$$e_1[1] = \min(\max(a[1], b[1]), \max(a[1], c[1])),$$

$$e_1[m] = \max(\min(a[m], b[m]), \min(a[m], c[m])).$$

Необходимо показать, что $d_1[1] = e_1[1]$ и $d_1[m] = e_1[m]$. Положив $x = a[1]$, $y = b[1]$, $z = c[1]$, по утверждению B леммы 3 получим $d_1[1] = e_1[1]$. Положив $x = a[m]$, $y = b[m]$, $z = c[m]$, по утверждению A леммы 3 получим $d_1[m] = e_1[m]$. Итак, имеем вторую дистрибутивность. ■

3. ФОРМУЛЫ И ЗАКОНЫ ЛОГИКИ $L(m,tt)$

Формулы логики $L(m,tt)$ — это все переменные p, p_1, $p_2, \dots$, а также $\neg\alpha$, $\alpha \Rightarrow \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \Leftrightarrow \beta$, (α), (β), но при условии, что α и β — формулы логики $L(m,tt)$. Других формул логика $L(m,tt)$ не имеет.

Напомним, что формулы логики L_2 определяются аналогично, так что различие между логиками $L(m,tt)$ и L_2 только в интерпретации их формул.

Для интерпретации формул логики $L(m,tt)$ выбирается множество $D(m,tt)$. Каждая переменная, как формула, может принимать в качестве своего значения любой элемент $a \in D(m,tt)$. Если формулы α и β приняли значения a и b соответственно, то формулы $\neg\alpha$, $\alpha \Rightarrow \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$ и $\alpha \Leftrightarrow \beta$, (α), (β) принимают значения $\neg a$, $a \Rightarrow b$, $a \vee b$, $a \wedge b$ и $a \Leftrightarrow b$, a, b соответственно.

Для записи формулы α, построенной из переменных $p_1, p_2, \dots, p_n$ и символов операций $\neg$, $\Rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\Leftrightarrow$, используем выражение $\alpha(p_1, p_2, \dots, p_n)$, воспринимая его как формулу.

Формулу $\alpha(p_1, p_2, \dots, p_n)$ называем **законом логики** $L(m,tt)$, если эта формула при произвольных значениях ее переменных $p_1, p_2, \dots, p_n$ принимает значения только из множества $T(m,tt)$.

Пример закона логики $L(m,tt)$ — это формула $\alpha \vee \neg\alpha$ (см. теорему 5).

Теорема 6. Законами логики $L(m,tt)$ являются следующие формулы:

$A_1 := \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$, $A_2 := (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow (\chi)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \chi)))$,
$A_3 := (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha) \Rightarrow ((\neg\beta \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta)$.

Доказательство. Пусть при заданных значениях переменных, входящих в формулы α, β, χ, эти формулы приняли значения a, b, c соответственно. Тогда формулы A_1, A_2, A_3 примут значения d_1, d_2, d_3 соответственно.

Надо показать, что $d_1, d_2, d_3 \in T(m,tt)$. По теореме 2 выполнение $(a_1 \Rightarrow b_1) \in F(m,tt)$ равносильно выполнению $a_1 \in T(m,tt)$ и $b_1 \in F(m,tt)$. Воспользуемся этим фактом. Итак, $d_1 = a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$. Пусть $d_1 \in F(m,tt)$, а значит, $a \in T(m,tt)$ и $(b \Rightarrow a) \in F(m,tt)$, но тогда $a \in F(m,tt)$, что противоречит полученному ранее $a \in T(m,tt)$, поэтому $d_1 \in T(m,tt)$.

Имеем $d_2 = (a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c))$. Если $d_2 \in F(m,tt)$, то:

1) $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \in T(m,tt)$ и 2) $((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)) \in F(m,tt)$. Но из 2) следуют 3) $(a \Rightarrow b) \in T(m,tt)$ и 4) $(a \Rightarrow c) \in F(m,tt)$, а из 4) следуют 5) $a \in T(m,tt)$ и 6) $c \in F(m,tt)$. Теперь из 3) и 5) следует 7) $b \in T(m,tt)$, а из 7) и 6) следует 8) $(b \Rightarrow c) \in F(m,tt)$. Но тогда из 5) и 8) следует $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \in F(m,tt)$, а это противоречит 1). Значит, $d_2 \in T(m,tt)$.

Также имеем $d_3 = (\neg b \Rightarrow \neg a) \Rightarrow ((\neg b \Rightarrow a) \Rightarrow b)$. Если $d_3 \in F(m,tt)$, то:

1) $(\neg b \Rightarrow \neg a) \in T(m,tt)$ и 2) $((\neg b \Rightarrow a) \Rightarrow b) \in F(m,tt)$. Но из 2) следуют 3) $(\neg b \Rightarrow a) \in T(m,tt)$ и 4) $b \in F(m,tt)$, а из 4) получаем 5) $\neg b \in T(m,tt)$. Из 3) и 5) имеем 6) $a \in T(m,tt)$, а из 6) имеем 7) $\neg a \in F(m,tt)$. Имея 5) и 7), получаем $(\neg b \Rightarrow \neg a) \in F(m,tt)$, а это противоречит 1). Значит, $d_3 \in T(m,tt)$. ■

Известно (см. [2]), что формулы A_1, A_2, A_3 — это аксиомы исчисления высказываний. Так как на основании теоремы 3 правилом выведения modus ponens можно пользоваться и в логике $L(m,tt)$, то каждая формула логики $L(m,tt)$, выведенная из ее законов A_1, A_2, A_3, будет законом.

Ответ на вопрос: все ли законы логики $L(m,tt)$ можно вывести из законов A_1, A_2, A_3, как это имеет место в логике L_2, дает следующая теорема.

Теорема 7. Формула $\alpha(p_1, p_2, \dots, p_n)$ логики $L(m,tt)$ будет законом этой логики, если и только если она (формула) — тавтология логики L_2.

Доказательство. Пусть формула $\alpha(p_1, p_2, \dots, p_n)$ — закон логики $L(m,tt)$. Тогда при произвольных значениях $a_1, a_2, \dots, a_n \in D(m,tt)$ переменных $p_1, p_2, \dots, p_n$ соответственно получаем $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) \in T(m,tt)$. Но ведь имеет место включение $D(m,1) \subseteq D(m,tt)$. Поэтому при произвольных значениях $a_1, a_2, \dots, a_n \in D(m,1)$ переменных $p_1, p_2, \dots, p_n$ получим $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) \in T(m,1)$, ибо операции $\neg$, $\Rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\Leftrightarrow$, примененные к элементам из $D(m,1)$, дают результат из этого же множества. Итак, если формула $\alpha(p_1, p_2, \dots, p_n)$ — закон логики $L(m,tt)$ при некотором значении для tt, то эта же формула будет законом логики $L(m,1)$. Поэтому исследуем только законы логики $L(m,1)$. Пусть формула $\alpha(p_1, p_2, \dots, p_n)$ — закон логики $L(m,1)$ при некотором значении для m. Тогда при произвольных значениях $a_1, a_2, \dots, a_n \in D(m,1)$ соответственно переменных $p_1, p_2, \dots, p_n$ получаем $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) \in T(m,1)$. Однако выполняется $D(m,1) = \{1_m, 0_m\}$, $D(2,1) = \{1_2, 0_2\}$, так что между $a_1, a_2, \dots, a_n \in D(m,1)$ и $a_1, a_2, \dots, a_n \in D(2,1)$ имеется естественная биекция $1_m \to 1_2$, $0_m \to 0_2$, дающая $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) \in T(m,1)$, если только $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) \in T(2,1)$, ибо в обоих случаях производятся одинаковые вычисления над элементами множества $\{1, 0\}$. Итак если формула $\alpha(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — закон логики $L(m, 1)$ при некотором значении для m, то эта же формула будет законом логики $L(2, 1)$. Поэтому исследуем только законы логики $L(2, 1)$.

Пусть формула $\alpha(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — закон логики $L(2, 1)$, поэтому $\alpha(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 1_2$ при произвольных значениях 1_2 или 0_2 переменных p_1, p_2, …, p_n. Воспользуемся естественной биекцией $1_2 \to 1$, $0_2 \to 0$ между множествами $D(2, 1) = \{1_2, 0_2\}$ и $E_2 = \{1, 0\}$, и, заставив переменные p_1, p_2, … , p_n принимать значения на множестве E_2, получим $\alpha(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 1$, ибо имеют место соотношения (1) и (2). Итак если формула $\alpha(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — закон логики $L(2, 1)$, то она — тавтология логики L_2. Обратное утверждение также имеет место, ибо «работает» естественная биекция $1_2 \to 1$, $0_2 \to 0$. ■

4. КОНЕЧНОЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ ДОВЕРИЯ

В предыдущем разделе было продемонстрировано, как согласуются логики L_2 и $L(2, 1)$. Следуя этому образцу, построим пропозициональную логику $L(tt)$, которая согласуется с логикой $L(2, tt)$. Для $a \in D(2, tt)$ выполняется $a = (a[1], a[2])$, причем либо $a[1] \geq tt$, либо $a[2] \geq tt$, и $a[1] + a[2] = 1$. Как видим, достаточно знать число $a[1]$, чтобы воссоздать 2-распределение $a = (a[1], a[2])$, ибо $a[2] = 1 - a[1]$. Переменные p логики $L(tt)$ принимают рациональные значения $a_1, b_1, \ldots$ из числового множества $D(tt) = [0, 1 - tt] \cup [tt, 1]$. Логики $L(tt)$ и $L(2, tt)$ имеют одинаковые формулы. Интерпретация формул логики $L(tt)$ соответствует интерпретации формул логики $L(2, tt)$ в следующем смысле. Пусть $a, b \in D(2, tt)$, $a_1 = a[1]$, $b_1 = b[1]$. Тогда если $a[1] \geq tt$, то $a_1 \in [tt, 1]$, поэтому $a_1 \in D(tt)$, но если $a[2] \geq tt$, то $a[1] = 1 - a[2] \leq 1 - tt$, так что $a_1 \in [0, 1 - tt]$, поэтому $a_1 \in D(tt)$. Так как $\neg a = (a[2], a[1])$, то $\neg a_1 = 1 - a_1$. Поскольку $a \Rightarrow b = (\max(a[2], b[1]), \min(a[1], b[2]))$, то $a_1 \Rightarrow b_1 = \max(1 - a_1, b_1)$. Отсюда $a_1 \vee b_1 = \max(a_1, b_1)$, $a_1 \wedge b_1 = \min(a_1, b_1)$.

Как видим, логика $L(tt)$ отличается от бесконечнозначной логики Клини (см. [1, с. 79]) только тем, что в последней для интерпретации используется сегмент $[0, 1]$, хотя логика доверия убеждает, что из сегмента $[0, 1]$ можно исключить число $1/2$ и все иррациональные числа, поскольку для интерпретации формул логики $L(tt)$ при любом $tt > 1/2$ оставшихся чисел достаточно.

Очевидно, что логика $L(tt)$ относится к классу счетно-бесконечных.

Для $k = 1, 2, \ldots$ образуем множество $V_{2k} = \{0, 1/2k - 1, \ldots, 2k - 2/2k - 1, 1\}$, используемое для интерпретации формул $2k$-значной логики, а логику $L(tt)$ со степенью доверия $tt = k/2k - 1$ и множеством V_{2k} для интерпретации назовем $2k$-значной логикой доверия, обозначая ее L_{2k}. Напомним, что для k-значной ($k \geq 2$) логики множеством интерпретации служит $V_k = \{0, 1/k - 1, \ldots$ $\ldots, k - 2/k - 1, 1\}$, и если k нечетное, то выполняется ненужное для логики доверия соотношение $1/2 \in V_k$. Поэтому логика L_{2k} является естественной конечнозначной логикой доверия для $k = 1, 2, \ldots$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье построены пропозициональные логики, работающие как с обычными утверждениями, так и с положениями, принимаемыми голосованием, причем утверждения (положения) могут иметь различную степень доверия либо недоверия к себе — от 100 % (абсолютное доверие либо недоверие) до 51 % (минимальное доверие либо недоверие). Доказано, что законы этих логик (по определению — аналоги тавтологий) и тавтологии двузначной логики описываются одинаковыми формулами. Показано также, что формулы-тавтологии — это общечеловеческие (на уровне доверия–недоверия), а не только математические (на уровне истинно–ложно) формы правильного мышления.

Отметим, что трехзначная логика Лукасевича, не являясь логикой доверия, может быть названа логикой ответов (ответ ДА — это 1, ответ НЕТ — это 0, ответ НЕ ЗНАЮ — это 1/2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карпенко А.С. Многозначные логики // Логика и компьютер. — М.: Наука, 1997. — Вып. 4. — 224 с.
2. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1971. — 320 с.

Поступила 05.05.2010