

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕЗЕРВОВ ОПТИМИЗАЦИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ КАЧЕСТВА ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ОТ БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: интегралы от быстроосциллирующих функций, квадратурные формулы, оптимальные алгоритмы, характеристики качества, тестирование, ε -решение задачи.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается задача вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций вида

$$I(\omega) = \int_a^b f(x) \begin{cases} e^{-i\omega x} \\ \sin \omega x \\ \cos \omega x \end{cases} dx \quad (1)$$

в предположении, что $f(x) \in F$ (F — некоторый класс функций), ω — произвольное действительное число ($|\omega| \geq 2\pi(b-a)$).

Пусть информация об $f(x)$ задана N значениями в узловых точках $\{x_i\}_0^{N-1}$ из ее области определения: $\{f_i\}_0^{N-1} = \{f(x_i)\}_0^{N-1}$; ε_i характеризует точность задания $f(x_i) = f_i$: $|\tilde{f}_i - f_i| \leq \varepsilon_i$, $i = 0, N-1$. Если параметр ω — большое число, то функции $e^{-i\omega x}$, $\sin \omega x$, $\cos \omega x$ быстро осциллируют.

Интегралы (1) имеют широкий спектр приложений: задачи цифровой обработки сигналов, теории автоматического регулирования, математической физики, прикладной статистики, информационной безопасности, моделирования оптических систем и синтезированных голограмм, медицинской электроники, гидрологии, бесконтактного осмотра багажа, компьютерной томографии и др. Приближенное вычисление $I(\omega)$ для $f(x)$ из некоторых классов и анализ качества соответствующих квадратурных формул являются актуальными задачами вычислительной и прикладной математики, поэтому затраты на построение качественных алгоритмов их вычисления оправданы.

Разработана теория вычисления интегралов (1), позволяющая решить исследуемую задачу, включая построение и обоснование оптимальных по точности и (или) близких к ним квадратурных формул вычисления интегралов (1) для разных классов подынтегральных функций при использовании сеточного информационного оператора проекции подынтегральной функции, технологию тестирования известных и предложенных алгоритмов вычисления $I(\omega)$ с целью анализа качества и определения областей их дифференцированного поведения, определение оптимальных параметров рассматриваемых алгоритмов, обеспечивающих заданное качество решения задачи [1–8]. Полученные в работе результаты базируются на теории вычислений, теории оптимальных алгоритмов, теоретических основах и практических аспектах тестирования качества разработанных алгоритмов — программ решения задачи (1) с заданными значениями характеристик качества, а также на компьютерной технологии построения T -эффективных алгоритмов вычисления ε -решений задач вычислительной и прикладной математики [9].

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Комплексный подход к построению и обоснованию квадратурных формул решения задачи (1) основан на анализе трех основных характеристик соответствующих квадратурных формул — точности, времени реализации, необходимой памяти ЭВМ. По данным характеристикам выполняется сравнительный анализ квадратурных формул и их оптимизация.

Будем считать, что для решения задачи (1) используется алгоритм $A(X)$, реализуемый на ЭВМ $C(Y)$ и ориентированный на использование информации I_0 о классе подынтегральных функций F и информации $I_N(f)$ о конкретной функции класса $f(x) \in F$. Таким образом, для построения вычислительного алгоритма (в.а.) и соответствующей программы (в.а.-программы) решения задачи (1) используется модель вычислений, описываемая с помощью векторов $I = \{I_0, I_N(f)\}$, X, Y , где I, X, Y — конечные множества (векторы) параметров, от которых существенно зависит алгоритм решения A и вычисления на ЭВМ C . В число компонент вектора I могут входить данные об априорных свойствах решения задачи, например константы, ограничивающие абсолютные значения ряда производных от заданных функций, данные о точности задания исходных величин, количество узлов квадратурной формулы и др. Среди компонент вектора X могут быть число итераций алгоритма, степень аппроксимации, шаг сетки и т.п. Вектор Y может содержать: число разрядов ячеек памяти ЭВМ, общий объем оперативной памяти, время выполнения операций, количество процессоров, характеристики используемых операционных систем и трансляторов и др. В практике численного решения задач сложились следующие характеристики задач, алгоритмов и ЭВМ: $E(I, X, Y)$ — полная погрешность решения задачи (1) на ЭВМ C с помощью алгоритма A (включая погрешность за счет неточности исходных данных, или неустраняемую погрешность (E_H), погрешность метода (E_M) и погрешность округления (E_τ)); $T(I, X, Y)$ — время, необходимое для получения решения задачи; $M(I, X, Y)$ — необходимая память ЭВМ. В [1, 2] приведены методы получения оценок данных характеристик. В [1] содержатся результаты по оптимизации характеристики $E(I, X, Y)$ некоторых предложенных алгоритмов вычисления (1) и анализ различных источников погрешностей, которые имеют место при вычислительном процессе. Остановимся на исследовании E_M более детально. Отметим, что при получении абсолютной погрешности E_H можно рассматривать случаи, когда $f(x)$ задана (или вычисляется) приближенно в узлах интегрирования с некоторой максимальной погрешностью или когда погрешности задания подынтегральной функции в узлах являются взаимно независимыми случайными величинами [1]. Последний вариант позволяет находить более точные оценки E_H . Для получения мажорантной оценки погрешности округления (E_τ) предложенных в.а. решения задачи (1) используются оценки Уилкинсона [18] для погрешностей округления при выполнении основных арифметических операций в предположении, что вычисления выполняются на ЭВМ в режиме плавающей запятой с округлением результатов арифметических операций по классическому правилу до τ двоичных разрядов в нормализованных мантиссах чисел.

Одним из основных критериев оптимальности приближенного решения задачи (1) является требование его максимальной точности (или минимальной погрешности) при заданных ресурсах, которые можно использовать в процессе решения. В начале исследования в такой постановке естественно рассмотреть вопрос о «потенциальной разрешающей способности» в.а., т.е. о максимальной точности решения, которая может быть достигнута при данной исходной информации о задаче.

Известно [1, 4], что каждый в.а. решения задачи (1) использует только конечное число исходных данных $I_N(f)$ о $f(x) \in F$, и тем самым автоматически является в.а. решения (1) для тех функций $f(x)$, которые имеют те же исходные данные. На классе F всегда найдутся две функции, на которых достигаются наилучшая и наилучшая грани оптимизируемой характеристики (например, E_M). По-

этому каждый, в том числе оптимальный, в.а. решения задачи (1) будет иметь определенную «потенциальную разрешающую способность». Если, например, существуют две функции с одинаковыми исходными данными, точные значения $I(\omega)$ от которых I_1 и I_2 являются элементами метрического пространства, причем расстояние между ними $\rho(I_1, I_2) \geq d > 0$, то для каждого в.а. решения задачи (1) на классе подынтегральных функций F получим решение, имеющее свойство

$$\max_{i=1,2} \rho(I, I_i) \geq \frac{d}{2}. \quad (2)$$

Это означает, что не существует в.а., который бы давал решение рассматриваемой задачи с гарантированной точностью, меньшей, чем $d/2$. Если нужно повысить точность решения задачи, необходимо иметь дополнительные сведения о ней. Тогда задача (1) рассматривается на новом, более «узком», классе F и в.а. ее решения будет иметь более сильную, «потенциальную разрешающую способность».

Важное значение имеет получение неуплощаемых характеристик типа (2). Знак равенства будет достигаться на оптимальном в.а., и разница между правой и левой частями в (2) для каждого в.а. является характеристикой разрыва между данным и оптимальным в.а.

Таким образом, под оптимальным решением задачи будем понимать решение с максимально возможной точностью при данной информации, а под оптимальным в.а. — алгоритм, который дает оптимальное решение.

Конкретизируем общее определение оптимального по точности алгоритма для задачи приближенного вычисления $I(\omega)$.

Обозначим $R = R(f, A, \{x_i\}_0^{N-1}, \{\varepsilon_i\}_0^{N-1}, \omega)$ результат приближенного вычисления $I(\omega)$ с помощью квадратурной формулы A . Введем следующие характеристики:

$$\begin{aligned} V(f, A, \{x_i\}_0^{N-1}, \{\varepsilon_i\}_0^{N-1}, \omega) &= \rho(I(\omega), R), \\ V(F, A, \{\varepsilon_i\}_0^{N-1}, \omega) &= \sup_{f \in F} V(f, A, \{x_i\}_0^{N-1}, \{\varepsilon_i\}_0^{N-1}, \omega), \\ V &= V(F, \{\varepsilon_i\}_0^{N-1}, \omega) = \inf_A V(F, A, \{\varepsilon_i\}_0^{N-1}, \omega), \\ V(F, \omega) &= V(F, 0, \omega), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\rho(I(\omega), R) = \rho(\omega) = |I(\omega) - R(f, A, \{x_i\}_0^{N-1}, \{\varepsilon_i\}_0^{N-1}, \omega)| = |I - R|$ — погрешность численного интегрирования.

Алгоритм A , на котором достигается $V = V(F, \{\varepsilon_i\}_0^{N-1}, \omega)$, назовем оптимальным по точности. Если для алгоритма \bar{A} имеет место $V(F, \bar{A}, \{\varepsilon_i\}_0^{N-1}, \omega) \leq V + \eta$, то \bar{A} назовем оптимальным с точностью до η . Если $\eta = o[V]$ или $\eta = O[V]$, то \bar{A} назовем соответственно асимптотическим оптимальным или оптимальным по порядку точности.

Для построения оптимальных по точности и близких к ним квадратурных формул используются методы «шапочек», граничных функций, невязки и квази-решений [1, 2, 4, 10–13].

Для получения оценок снизу погрешности численного интегрирования $I(\omega)$ на классах подынтегральных функций F можно применить метод «шапочек» [1, 2, 12–14]. Он основан на том факте, что среди функций, на которых оптимальный алгоритм имеет наибольшую погрешность, есть функция, равная нулю в узлах интегрирования [14]. Суть его заключается в построении на отрезках $\Delta_k^p = [x_k^p, x_{k+1}^p]$, $k = 0, [|\omega|(b-a)/\pi] - 1$, $p = 0, m-1$, $m = [2N / (|\omega|(b-a)/\pi) + 1]$ ($[|\omega|(b-a)/\pi]$ — число полувольт функции $\sin \omega x (\cos \omega x)$ на отрезке $[a, b]$) «пло-

хой» функции $f^*(x) \in F$, которая на отрезках Δ_k^p , где имеются узлы интегрирования, максимально удалена от нуля в пределах класса F , а на остальных отрезках Δ_k^p равняется нулю. Оценку снизу погрешности численного интегрирования

вычисляют путем оценки интегралов $\left| \int_a^b f^*(x) \sin \omega x dx \right|$ и $\left| \int_a^b f^*(x) \cos \omega x dx \right|$. Ме-

тод «шапочек» позволяет получить оценку V , а не ее точное значение. Это обуславливает применимость данного метода для построения и обоснования лишь оптимальной с точностью до η квадратурной формулы.

Повышение «потенциальной разрешающей способности» квадратурных формул можно осуществить путем «сужения» классов F подынтегральных функций. Практически важным является рассмотрение случая, когда $\{x_i\}_0^{N-1}$ и $\{f_i\}_0^{N-1} = \{f(x_i)\}_0^{N-1}$ фиксированы (например, когда функция задана таблицей значений из ее области определения). Такой способ представления исходной информации ведет к значительному «сужению» соответствующего класса F на интерполяционные классы F_N [1], которые определяются принадлежностью класса F и еще $2N$ фиксированными числами: x_i и $f(x_i)$, $i=0, N-1$, и приближают к реальной ситуации, возникающей при решении конкретной задачи. Класс F_N — пучок функций из F , интерполирующих заданную функцию в узлах x_i , $i=0, N-1$. В этом случае можно ввести по аналогии с (3) соответствующие характеристики и определить оптимальные по точности, асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку точности квадратурные формулы на классе F_N [1, 4].

Поскольку квадратурная формула использует значения $f(x_i)$, $i=0, N-1$, все функции $f(x) \in F_N$ ею не различаются. Таким образом, приближенные значения $I(\omega)$ будут одинаковыми для всех $f(x) \in F_N$, а точные значения — разными.

Вместе с классами F_N рассмотрим также классы $F_{N,\varepsilon}$, соответствующие приближенному заданию исходной информации из области $|\tilde{f}_i - f_i| \leq \varepsilon$, $i=0, N-1$, и реально решаемым задачам.

Для построения и обоснования оптимальных по точности и близких к ним квадратурных формул вычисления $I(\omega)$ в классах $F_N, F_{N,\varepsilon}$ применяется метод граничных функций [4], который заключается в следующем.

Строятся верхняя (мажоранта) и нижняя (миноранта) границы области возможных значений интеграла $I(\omega)$ на функциях класса F_N :

$$I^+(\omega) = \sup_{f \in F_N} I(\omega), \quad I^-(\omega) = \inf_{f \in F_N} I(\omega). \quad (4)$$

Значения $I^\pm(\omega)$ достигаются на $f^\pm(x) \in F_N$ — соответственно мажоранте и миноранте класса $F_N \subset F$.

Таким образом, задача сводится к построению функций $f^\pm(x) \in F_N$, значения которых в узлах $\{x_i\}_0^{N-1}$ должны совпадать со значениями f_i , $i=0, N-1$. Функции $f^\pm(x_i) = f_i$, $i=0, N-1$, необходимо строить с учетом поведения осциллирующих функций ($\sin \omega x, \cos \omega x$). Далее, находятся чебышевский центр $I^*(\omega)$ и чебышевский радиус $\rho^*(\omega)$ области неопределенности решения задачи (1),

$$I^*(\omega) = \frac{I^+(\omega) + I^-(\omega)}{2}, \quad \rho^*(\omega) = \frac{I^+(\omega) - I^-(\omega)}{2}, \quad (5)$$

представляющие собой соответственно оптимальную по точности квадратурную формулу вычисления $I(\omega)$ и оптимальную оценку погрешности численного интегрирования $I(\omega)$ на классе F_N . Квадратурная формула вычисления $R(\omega)$, для которой $\sup_{f \in F_N} |R(\omega) - I(\omega)| \leq \rho^*(\omega) + \eta$, $\eta > 0$, $\eta = o(\rho^*)$, $O(\rho^*)$,

$\rho^*(\omega) \rightarrow 0$, будет соответственно асимптотически оптимальной или оптимальной по порядку точности. При данной информации о задаче никакая квадратурная формула не может дать точность меньше, чем $\rho^*(\omega)$.

В качестве F , F_N , $F_{N,\varepsilon}$ рассматриваются следующие классы функций различной степени гладкости:

C_L — класс определенных на $[a, b]$ непрерывных функций, удовлетворяющих условию Липшица $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$, $x_1, x_2 \in [a, b]$;

$C_{L,N}$ — класс функций $f(x) \in C_L$, заданных фиксированными значениями $\{f_i\}_0^{N-1}$ в узлах фиксированной сетки $\{x_i\}_0^{N-1}$;

$C_{L,N,\varepsilon}$ — класс функций $f(x) \in C_{L,N}$, заданных фиксированными значениями $\{\tilde{f}_i\}_0^{N-1}$: $|\tilde{f}_i - f_i| \leq \varepsilon_i$;

$W_{2,L}$ — класс определенных на $[a, b]$ непрерывных функций $f(x)$, имеющих абсолютно непрерывную первую производную, причем $f'(x) \in C_L$;

$W_{2,N,L}$ — класс функций $f(x) \in W_{2,L}$, заданных фиксированными значениями функции $\{f_i\}_0^{N-1}$ и ее первой производной $\{f'_i\}_0^{N-1}$ в узлах фиксированной сетки $\{x_i\}_0^{N-1}$;

$W_{2,N,L,\varepsilon,\delta}$ — класс функций $f(x) \in W_{2,N,L}$, заданных фиксированными значениями функции $\{\tilde{f}_i\}_0^{N-1}$: $|\tilde{f}_i - f_i| \leq \varepsilon_i$ и ее первой производной $\{\tilde{f}'_i\}_0^{N-1}$: $|\tilde{f}'_i - f'_i| \leq \delta_i$.

Общую ситуацию обеспечения заданного качества решения задачи вычисления $I(\omega)$ можно описать следующим образом [6, 7].

Необходимо разработать или выбрать среди известных такую в.а.-программу $a \in A$, где A — множество в.а.-программ, ориентированных на решение задачи (1) с использованием информации I , которая обеспечивает при выбранной архитектуре компьютера вычисление $I(\omega)$ с заданными характеристиками качества, а именно:

$$E(I, X, Y) \leq \varepsilon, \quad (6)$$

$$T(I, X, Y, \varepsilon) \leq T_0(\varepsilon), \quad (7)$$

$$M(I, X, Y, \varepsilon) \leq M_0(\varepsilon), \quad (8)$$

где $E(I, X, Y) \leq E_H(I, X, Y) + E_M(I, X, Y) + E_T(I, X, Y)$; ε , $T_0(\varepsilon)$, $M_0(\varepsilon)$ — ограничения, заданные на основе свойств исходной информации (объема, точности, структуры, способа вычисления и т.п.) и обусловленные практическими потребностями математического моделирования.

Наряду с задачей (6)–(8) целесообразно рассматривать также задачу минимизации $E(I, X, Y)$ при выполнении ограничений на M, T , которую можно представить в виде

$$E(I, X, Y) = \min_{I, X, Y}, \quad (9)$$

$$T(I, X, Y) \leq T_0(\varepsilon), \quad (10)$$

$$M(I, X, Y) \leq M_0(\varepsilon). \quad (11)$$

Далее будем считать, что $A(\varepsilon)$ ($A(\varepsilon) \in A$) — множество в.а., для которых выполняется условие (6), т.е. алгоритмов вычисления ε -решения задачи (1), а $A(\varepsilon, T_0)$ ($A(\varepsilon, T_0) \in A(\varepsilon)$) — множество T -эффективных в.а., т.е. алгоритмов, для которых вы-

полняются условия (6), (7). Приближенное решение задачи (1), удовлетворяющее условию (6), называется ε -решением. В.а.-программа, удовлетворяющая условиям (6), (7) (а также (9), (10)), называется T -эффективной в данной компьютерной модели вычислений. Таким образом, рассматриваемая задача состоит в построении T -эффективного алгоритма $a \in A(\varepsilon, T_0)$ [7].

Поскольку характеристики $E, E_H, E_M, E_\tau, T(I, X, Y), M(I, X, Y)$, как правило, точно не известны, рассматриваются некоторые их оценки. В дальнейшем ограничение (8) можно снять, так как память M расширяется до нужного объема (возможно, за счет увеличения значения T).

В.а.-программы, обеспечивающие решение задачи (1) с заданными значениями характеристик качества (6)–(8) ((9)–(11)), могут быть двух типов:

- в.а.-программы вычисления ε -решения: значения их управляющих параметров X для обеспечения необходимой точности (6) из некоторого диапазона точности $D(\varepsilon), \varepsilon \in D(\varepsilon)$, обеспечиваются в.а.-программами соответствующим подбором их управляющих параметров с использованием апостериорных оценок погрешностей вычисленного приближенного решения;

- в.а.-программы вычисления приближенного решения задачи (1) (без вычисления оценки погрешности): заданная точность $\varepsilon \in D(\varepsilon)$ обеспечивается пользователем соответствующим выбором управляющих параметров X в.а.-программ с использованием оценок погрешности, полученных в процессе их тестирования.

Отметим, что потребности в решении задачи с заданными значениями характеристик качества (E, T, M) и получении информации о возможности обеспечения такого решения с помощью соответствующей программы возникают в случаях, когда:

- следует обеспечить решение задачи с заданной (или гарантированной) точностью при некоторых заданных ограничениях на необходимое процессорное время и оперативную память компьютера;

- нужна диагностика качества получаемого приближенного решения задачи по точности и времени;

- необходимо предварительно знать о возможности построения решения задачи с заданными значениями характеристик качества E, T, M , например с целью выбора (или разработки) в.а.-программы для включения ее в проблемно-ориентированную систему прикладных программ.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО ТОЧНОСТИ И БЛИЗКИЕ К НИМ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ И ОЦЕНКИ ИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассмотрим некоторые оптимальные по точности и близкие к ним квадратурные формулы вычисления интегралов $I(\omega)$ в определенных выше классах и приведем оценки их точности. В силу громоздкости выкладок доказательства опустим, поскольку они базируются на результатах, достаточно полно изложенных в работах [1, 2, 13, 15]. Основные результаты приведены для интеграла

$$I_1(\omega) = \int_a^b f(x) \sin \omega x dx. \quad (12)$$

Отметим, что аналогичные результаты получены и для интеграла

$$I_2(\omega) = \int_a^b f(x) \cos \omega x dx.$$

Сформулируем условия, которые понадобятся в дальнейшем:

1) $[|\omega|/\pi] + 1$ нулей функции $\sin \omega x$ ($\cos \omega x$) на $[a, b] \equiv [0, 1]$ входят в число узлов $x_i, i = 1, N$, квадратурной формулы;

2) $\left| \frac{f'_i + f'_{i+1}}{2} \Delta x_i - \Delta f_i \right| = \frac{L}{4} \left| \Delta x_i^2 - \frac{\Delta f'_i}{L^2} \right|$.

Имеют место следующие результаты [1, 2, 13, 15].

Класс C_L . Рассмотрим квадратурную формулу вычисления интеграла $I_1(\omega)$

вида

$$R_1(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} f_i \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \sin \omega x dx, \quad (13)$$

где $x_{i-1/2} = x_i - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, $x_{i+1/2} = x_i + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$, $x_{-1/2} = x_0$, $x_{N-1/2} = x_N$.

Теорема 1. Пусть $f(x) \in C_L$ задана таблицей значений в узлах равномерной сетки $x_i = i\Delta x$, $\Delta x = 1/N$, $i=0, N-1$, $[a, b] \equiv [0, 1]$, возможные погрешности ξ_i задания функции $f(x)$ в узлах x_i распределены равномерно на $[0, \delta]$ и вычисления производятся на ЭВМ в режиме с плавающей запятой с τ двоичными разрядами в мантиссах чисел. Тогда при выполнении условия 1 квадратурная формула $R_1(\omega)$ приближенного вычисления $I_1(\omega)$ является оптимальной по точности для $N \geq |\omega|$ и $N = \lceil |\omega|/\pi \rceil + 1$ и асимптотически оптимальной по точности для $N \leq |\omega|$. При этом с вероятностью 0,96 и с точностью до величин второго порядка малости относительно $2^{-\tau}$ справедлива оценка полной абсолютной погрешности квадратурной формулы $R_1(\omega)$ вида

$$E \leq E_H + E_M + E_\tau,$$

где $E_H \leq \frac{5\delta}{\sqrt{3N}}$,

$$E_M \leq \begin{cases} L \left[\frac{1}{2\pi N} + \left| \frac{4 \cos(\omega(1-1/4N)) \sin \omega / 4N - \cos \omega}{\omega^2} - \frac{\cos \omega}{\omega N} \right| \right], & N \geq |\omega|, \\ \frac{L}{|\omega|} \left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{N} \right), & N = \left\lceil \frac{|\omega|}{\pi} \right\rceil + 1, \\ \frac{2L}{\omega^2} \left(\left\lceil \frac{|\omega|}{\pi} \right\rceil + 1 \right), & N < |\omega|, \end{cases}$$

$$E_\tau \leq 2^{-\tau} \left\{ N \left(|f_0| + \frac{L}{2} \right) + |\omega| (|f_0| + L + |f_{N-1}|) + \lambda (|f_0| + L + |f_{N-1}|) + \right. \\ \left. + 2|f_0| + \frac{7}{2}L + 3|f_{N-1}| - \frac{|\omega| + \lambda + 4}{N}L \right\},$$

$\tau_1 = \tau - \log_2(1,06) = \tau - 0,08406$, $\lambda > 0$ — константа, зависящая от способа вычисления синусов и косинусов.

Следует отметить, что в случае невыполнения условия 1 квадратурная формула $R_1(\omega)$ будет оптимальной по порядку точности с константой, не превосходящей 2.

Классы $C_{L,N}$ и $C_{L,N,\varepsilon}$. Рассмотрим квадратурные формулы вычисления интеграла $I_1(\omega)$ вида

$$R_2(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_1^*(x) \sin \omega x dx, \quad (14)$$

$$R_3(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_{1,\varepsilon}^*(x) \sin \omega x dx, \quad (15)$$

где

$$f_1^*(x) = \begin{cases} f_i, & x_i \leq x \leq \bar{x}_i, \\ f_i + L(x - x_i) \text{sign}(\Delta f_i), & \bar{x}_i \leq x \leq \bar{\bar{x}}_i, \\ f_{i+1}, & \bar{\bar{x}}_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ x \notin [x_{N-1}, x_N], & \\ f_{N-1}, & x_{N-1} \leq x \leq x_N, \end{cases}$$

$$\bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1} - |\Delta f_i|}{2}, \quad \bar{x}_i^- = \frac{x_i + x_{i+1} + |\Delta f_i|}{2L},$$

$$f_{1,\varepsilon}^*(x) = \begin{cases} \tilde{f}_i + \frac{\xi_i^+ + \xi_i^-}{2}, & x_i \leq x \leq \bar{x}_i^-, \\ \frac{1}{2} \left[\tilde{f}_i + \tilde{f}_{i+1} + \frac{\xi_i^+ + \xi_{i+1}^-}{2} (1 + \text{sign}(\Delta \tilde{f}_i)) + \frac{\xi_i^- + \xi_{i+1}^+}{2} \times \right. \\ \left. \times (1 - \text{sign}(\Delta \tilde{f}_i)) + L(2x - x_i - x_{i+1}) \text{sign}(\Delta \tilde{f}_i) \right], & \bar{x}_i^- \leq x \leq \bar{x}_i^+, \\ \tilde{f}_{i+1} + \frac{\xi_{i+1}^+ + \xi_{i+1}^-}{2}, & \bar{x}_i^- \leq x \leq x_{i+1}, \\ \tilde{f}_{N-1} + \frac{\xi_{N-1}^+ + \xi_{N-1}^-}{2}, & x_{N-1} \leq x \leq x_N, \end{cases}$$

$$\bar{x}_i^\pm = \frac{x_i + x_{i+1} \pm 2|\Delta \tilde{f}_i| + \Delta \xi_i^+ (\text{sign}(\Delta \tilde{f}_i) \pm 1) \mp \Delta \xi_i^- (\text{sign}(\Delta \tilde{f}_i) \mp 1)}{4L},$$

ξ_i^+, ξ_i^- — соответственно минимально и максимально допустимые значения решения системы линейных неравенств

$$\begin{cases} -\xi_i \leq \varepsilon_i \leq \xi_i, \quad i = \overline{0, N-1}, \\ -L\Delta x_i - \Delta \tilde{f}_i \leq \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \leq L\Delta x_i - \Delta \tilde{f}_i, \quad i = \overline{0, N-2}. \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть $f(x) \in C_{L,N}$, выполняется условие 1 и вычисления производятся на ЭВМ в режиме с плавающей запятой с τ двоичными разрядами в мантиссах чисел. Тогда квадратурная формула $R_2(\omega)$ приближенного вычисления $I_1(\omega)$ является оптимальной по точности для $N \geq |\omega|$ и $N = \lceil |\omega|/\pi \rceil + 1$, при этом с точностью до величин второго порядка малости относительно $2^{-\tau}$ справедлива оценка полной абсолютной погрешности квадратурной формулы $R_2(\omega)$

$$E \leq E_H + E_M + E_\tau,$$

где $E_H = 0$,

$$E_M = \begin{cases} \frac{4L}{\omega^2} \sum_{v=0}^{N-1} \left\{ \sin^2 \frac{\omega \Delta x_v}{4} - \sin^2 \frac{\omega |\Delta f_v|}{4L} \right\} \left| \sin \left(\frac{\omega}{2} (x_v + x_{v+1}) \right) \right| + P(\omega), \quad N \geq |\omega|, \\ \frac{L}{\omega} \left\{ \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{\omega + \pi} - \frac{4}{\omega} \sum_{v=0}^{\omega/\pi} \sin^2 \frac{\omega |\Delta f_v|}{4L} \right\}, \quad N = \left\lceil \frac{\omega}{\pi} \right\rceil + 1, \end{cases}$$

$$P(\omega) = \frac{L}{\omega} \left| \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega \Delta x_{N-1}}{2} \cos \left(\omega \left(1 - \frac{\Delta x_{N-1}}{2} \right) \right) - (1 - x_{N-1}) \cos \omega \right|,$$

$$E_\tau \leq 2^{-\tau_1} \left[\frac{1+LC}{\omega^2} N^2 + \left(\frac{1}{|\omega|} (|f_0| + 4(1+LC)) + \frac{1}{\omega^2} ((1+LC)(4\lambda + 11 + 3C) + 3LC) \right) N + |f_0| + \right.$$

$$+ |f_{N-1}| + \frac{1}{|\omega|} (|f_0|(\lambda + 4) - 4(1+LC) + |f_{N-1}|(\lambda + 3)) - \left. \frac{1}{\omega^2} ((1+LC)(4\lambda + 12 + 3C) + 3LC) \right], \quad (16)$$

$\tau_1 = \tau - \log_2(1,06) = \tau - 0,08406$, $\max_i \Delta x_i = \frac{C}{N}$, $\lambda > 0$ — константа, зависящая от способа вычисления синусов и косинусов.

Теорема 3. В условиях теоремы 2, когда возможные погрешности задания функции ограничены условиями $|f(x_i) - \tilde{f}(x_i)| \leq \varepsilon_i$, $i = 0, N$, на классе функций $f(x) \in C_{L, N, \varepsilon}$ оценка полной абсолютной погрешности квадратурной формулы $R_3(\omega)$ имеет вид

$$E \leq E_H + E_M + E_\tau,$$

где

$$E_H + E_M = \frac{1}{2|\omega|} \left| \sum_{i=0}^{N-2} \text{sign}(\sin \omega x_i) \left[\cos \omega x_i (\xi_i^+ - \xi_i^-) - \cos \omega x_{i+1} (\xi_{i+1}^+ - \xi_{i+1}^-) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2L}{\omega} (\sin \omega \bar{x}_i^- + \sin \omega \bar{x}_i^+ - \sin \omega x_i - \sin \omega x_{i+1}) \right] + \text{sign}(\sin \omega x_{N-1}) \times \right. \\ \left. \times \left[\cos \omega x_{N-1} (\xi_{N-1}^+ - \xi_{N-1}^-) + \cos \omega x_N (\xi_N^+ + \xi_N^- - 2L\Delta x_{N-1}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2L}{\omega} (\sin \omega x_N - \sin \omega x_{N-1}) \right] \right|, \quad N \geq |\omega|, \\ E_H + E_M = \frac{L}{2|\omega|} \left| \sum_{i=0}^{[\omega/\pi]-1} \text{sign}(\sin \omega x_i) \left[\frac{2}{\omega} (\sin \omega \bar{x}_i^- + \sin \omega \bar{x}_i^+) + \Delta \xi_i^- - \Delta \xi_i^+ \right] - \right. \\ \left. - \text{sign}(\sin \omega x_{N-1}) \frac{2\pi}{|\omega| + \pi} \right|, \quad N = [|\omega|/\pi] + 1,$$

E_τ оценивается соотношением (16).

Класс $W_{2,L}$. Рассмотрим квадратурную формулу вида

$$R_4(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S_3(x) \sin \omega x \, dx, \quad (17)$$

где $S_3(x)$ — эрмитовый кубический сплайн, $S_3(x_i) = f_i$, $S_3'(x_i) = f_i'$, $i = 0, N$.

Известно [14], что $S_3(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ можно записать в виде $S_3(x) = \varphi_1(t)f_i + \varphi_2(t)f_{i+1} + \varphi_3(t)hf_i' + \varphi_4(t)hf_{i+1}'$, где $\varphi_1(t) = (1-t)^2(1+2t)$, $\varphi_2(t) = t^2(3-2t)$, $\varphi_3(t) = t(1-t)^2$, $\varphi_4(t) = -t^2(1-t)$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $t = (x - x_i)/h_i$.

Теорема 4. Пусть $f(x) \in W_{2,L}$ задана таблицей значений $\{f_i\}_0^N$, $\{f_i'\}_0^N$ в узлах равномерной сетки $x_i = ih$, $h = 1/N$, $i = 0, N$, и вычисления выполняются на ЭВМ в режиме с плавающей запятой с τ двоичными разрядами в мантиссах чисел. Тогда квадратурная формула $R_4(\omega)$ приближенного вычисления $I_1(\omega)$ является оптимальной по порядку точности в классе $W_{2,L}$ для $N \geq |\omega|$, при этом с точностью до величин второго порядка малости относительно $2^{-\tau}$ справедлива следующая оценка полной абсолютной погрешности квадратурной формулы $R_4(\omega)$ [1, 13, 15]:

$$E \leq E_H + E_M + E_\tau.$$

Здесь

$$E_H = 0, \quad E_M \leq \frac{L}{16N^2} \sqrt{\frac{1 - \sin 2\omega}{2 - 4\omega}}, \quad (18)$$

$$E_\tau \leq 2^{-\tau_1} \left\{ N^5 \frac{6L}{\omega^4} + N^4 \left(\frac{6L}{|\omega|^3} + \frac{12L}{\omega^4} (\lambda + 20 + |\omega|) \right) \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + N^3 \left(\frac{L}{|\omega|^3} (12\lambda + 175 + 12|\omega|) + \frac{36L}{\omega^4} (\delta + 19 + |\omega|) \right) + \\
& + N^2 \left(\frac{|f_0|}{\omega^2} + \frac{5L}{|\omega|^3} - \frac{12L}{\omega^4} \right) + N \left(|f_0| \left(\frac{1}{|\omega|} + \frac{1}{\omega^2} (\delta + 8 + |\omega|) \right) + \frac{|f_N|}{\omega^2} (\lambda + 9 + |\omega|) + \right. \\
& \left. + \frac{6L}{|\omega|^3} (\lambda + 15 + |\omega|) \right) + \frac{|f_0|}{|\omega|} (\lambda + 4 + |\omega|) + \frac{|f_N|}{|\omega|} (\lambda + 5 + |\omega|) \Big\}, \quad (19)
\end{aligned}$$

где $\tau_1 = \tau - \log_2(1,06) = \tau - 0,08406$, $\lambda > 0$ — константа, зависящая от способа вычисления синусов и косинусов.

Теорема 5. В условиях теоремы 4, когда $f(x) \in W_{2,L}$, а возможные погрешности задания функций $f(x)$, $f'(x)$ в узлах x_i не превышают соответственно Δ , Δ' , оценка полной абсолютной погрешности квадратурной формулы $R_4(\omega)$ имеет вид

$$E \leq E_H + E_M + E_\tau,$$

где

$$\begin{aligned}
E_H \leq & \left(\frac{N}{|\omega|} \right)^4 12(4\Delta + \Delta') + \left(\frac{N}{|\omega|} \right)^3 12(\Delta + \Delta') + \\
& + \frac{1}{|\omega|} \left(\frac{N}{|\omega|} 2\Delta' + 2\Delta - \left(\frac{N}{|\omega|} \right)^2 6\Delta' - \left(\frac{N}{|\omega|} \right)^3 24\Delta \right),
\end{aligned}$$

E_M определяется соотношениями (18). Для E_τ имеет место соотношение (19) [13, 15].

Классы $W_{2,L,N}$ и $W_{2,L,N,\varepsilon,\delta}$. Для вычисления интеграла $I_1(\omega)$ в случае, когда $f(x) \in W_{2,L,N}$, в [1, 2] построена квадратурная формула вида

$$\begin{aligned}
R_5(\omega) &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_2^*(x) \sin \omega x dx, \quad (20) \\
f_2^*(x) &= \begin{cases} f_i + f'_i(x - x_i), & x_i \leq x \leq \tilde{x}_i, \\ \frac{1}{2} [f_i + f'_i(x - x_i) + f_{i+1} + f'_{i+1}(x - x_{i+1})] + \\ + \frac{L}{4} \text{sign}(\Delta f'_i) [(x - x_i)^2 + (x - x_{i+1})^2], & \tilde{x}_i \leq x \leq \tilde{\tilde{x}}_i, \\ f_{i+1} + f'_{i+1}(x - x_{i+1}), & \tilde{\tilde{x}}_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ x \notin [x_{N-1}, x_N], & \\ f_{N-1} + f'_{N-1}(x - x_{N-1}), & x \in [x_{N-1}, x_N], \end{cases} \\
\tilde{x}_i &= \frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \frac{|\Delta f'_i|}{2L}, \quad \tilde{\tilde{x}}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \frac{|\Delta f'_i|}{2L}.
\end{aligned}$$

Теорема 6. Пусть $f(x) \in W_{2,L,N}$, выполняются условия 1 и 2 и вычисления производятся на ЭВМ в режиме с плавающей запятой с τ двоичными разрядами в мантиссах чисел. Тогда квадратурная формула $R_5(\omega)$ приближенного вычисления $I_1(\omega)$ является оптимальной по точности для $N \geq |\omega|$ и $N = \lceil |\omega| / \pi \rceil + 1$, при этом с точностью до величин второго порядка малости относительно $2^{-\tau}$ справедлива оценка полной абсолютной погрешности квадратурной формулы $R_5(\omega)$ вида

$$E \leq E_H + E_M + E_\tau,$$

где $E_H = 0$,

$$\begin{aligned}
E_M &= \frac{L}{2|\omega|} \left| \sum_{i=0}^{N-2} \left\{ \cos \frac{\omega}{2}(x_i + x_{i+1}) \left(\sin^2 \frac{\omega \Delta x_i}{4} - \sin^2 \frac{\omega \Delta f'_i}{4L} - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \left(\frac{\Delta x_i^2}{4} - \frac{(\Delta f'_i)^2}{4L} \right) \cos \frac{\omega \Delta f'_i}{4L} + \text{sign}(\Delta f'_i) [\Delta x_i (f'_i + f'_{i+1}) - 2\Delta f_i] \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \times \sin \frac{\omega}{2}(x_i + x_{i+1}) \sin \frac{\omega \Delta f'_i}{4L} \right) \text{sign} \sin \omega x_i \right\} + A_{N-1} \right|, \quad N \geq |\omega|, \\
E_M &= \frac{1}{2|\omega|} \left| \sum_{i=0}^{[\frac{|\omega|}{\pi}] + 1} \text{sign}(\Delta f'_i) \left[\frac{\pi}{|\omega| + \pi} (f'_i - f'_{i+1}) - 2\Delta f_i \right] \sin \frac{\omega \Delta f'_i}{4L} + A(\omega) \right|, \\
N &= \left[\frac{|\omega|}{\pi} \right] + 1, \\
A_{N-1} &= \text{sign}(\sin \omega x_{N-1}) \left| \frac{2}{\omega} \Delta x_{N-1} \sin \omega - \Delta x_{N-1}^2 \cos \omega + \frac{2}{\omega^2} (\cos \omega - \cos \omega x_{N-1}) \right|, \\
A(\omega) &= \text{sign}(\sin \omega x_{[\omega/\pi]}) \left[\frac{2\pi}{\omega(|\omega| + \pi)} \sin \omega - \frac{\pi^2}{(|\omega| + \pi)^2} \cos \omega + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\omega^2} \left(\cos \omega - \cos \frac{\omega|\omega|}{|\omega| + \pi} \right) \right], \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_\tau &\leq \frac{2^{-\tau_1}}{|\omega|} \left(N^2 L \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\omega^2} \right) + N \left(|f_0| + L \left(4|\omega| + \lambda + \frac{23}{2} \right) + LC + \frac{L}{\omega^2} (9|\omega| + 2\lambda + 21) \right) + \right. \\
&\quad \left. + |f_0| (|\omega| + \lambda + 4) + LC(8|\omega| + 2\lambda + 21) - L(4|\omega| + \lambda + 13) + \frac{L}{|\omega|} (|\omega| + 2\lambda + 9) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{L}{\omega^2} (8|\omega| + 2\lambda + 22) + |f_{N-1}| (|\omega| + \lambda + 5) + \frac{1}{N} \left(LC^2 \left(2|\omega| + \frac{\lambda}{2} + \frac{23}{4} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - LC(7|\omega| + \lambda + 15) \right) - LC^2 \left(2|\omega| + \frac{\lambda}{2} + 6 \right) \right), \quad (22)
\end{aligned}$$

$\max_i \Delta x_i = \frac{C}{N}$, $\lambda > 0$ — константа, зависящая от способа вычисления синусов и косинусов [1, 2, 13].

Рассмотрим случай, когда $f(x) \in W_{2,N,L,\varepsilon,\delta}$, и приведем на отрезках $[x_\nu, x_{\nu+1}]$, $\nu = 0, N-1$, функции $f^\pm(x)$, на которых достигаются соответственно $I^\pm(\omega)$ на классе $W_{2,N,L,\varepsilon,\delta}$ и соотношения для чебышевского центра и радиуса:

$$\begin{aligned}
&f^\pm(x) = \\
&\left\{ \begin{aligned}
&\tilde{f}_\nu^\pm \pm \varepsilon_\nu \text{sign}(\sin \omega x_\nu) + \left\{ \tilde{f}'_\nu + \frac{\eta_\nu^+ + \eta_\nu^-}{2} \pm \frac{\eta_\nu^+ - \eta_\nu^-}{2} \text{sign}(\sin \omega x_\nu) \right\} \times \\
&\times (x - x_\nu) \pm \frac{L}{2} (x - x_\nu)^2 \text{sign}(\sin \omega x_\nu), \quad x \in [x_\nu, \tilde{x}_\nu^\pm], \\
&\tilde{f}_{\nu+1}^\pm \pm \varepsilon_{\nu+1} \text{sign}(\sin \omega x_{\nu+1}) + \left\{ \tilde{f}'_{\nu+1} + \frac{\eta_{\nu+1}^+ + \eta_{\nu+1}^-}{2} \pm \frac{\eta_{\nu+1}^+ - \eta_{\nu+1}^-}{2} \text{sign}(\sin \omega x_{\nu+1}) \right\} \times \\
&\times (x - x_{\nu+1}) \pm \frac{L}{2} (x - x_{\nu+1})^2 \text{sign}(\sin \omega x_{\nu+1}), \quad x \in [\tilde{x}_\nu^\pm, x_{\nu+1}].
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Здесь $\tilde{x}_i^\pm = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \pm \varphi_i$, $\varphi_i = \frac{s_i}{p_i}$, $s_i = \frac{\Delta x_i}{2} \left[\tilde{f}'_i + \tilde{f}'_{i+1} + \frac{1}{2}(\eta_i^+ + \eta_i^- + \eta_{i+1}^+ + \eta_{i+1}^-) + \frac{1}{2} \text{sign}(\sin \omega x_i)(\eta_i^+ - \eta_i^- + \eta_{i+1}^+ - \eta_{i+1}^-) \right] - (\Delta \tilde{f}_i - \Delta \varepsilon_i)$, $p_i = \Delta \tilde{f}'_i + \frac{1}{2}(\Delta \eta_i^+ + \Delta \eta_i^-) \times (1 + \text{sign}(\sin \omega x_i)) + L \text{sign}(\sin \omega x_i) \Delta x_i$, η_i^+ , η_i^- — максимально и минимально допустимые решения системы линейных неравенств

$$\begin{cases} -\delta_i \leq \eta_i \leq \delta_i, & i = \overline{0, N-1}, \\ L\Delta x_i - \Delta \tilde{f}'_i \leq \eta_{i+1} - \eta_i \leq L\Delta x_i - \Delta \tilde{f}'_i, & i = \overline{0, N-2}. \end{cases}$$

Алгоритм решения данной системы приведен в [1].

Совокупности функций $f^+(x)$, $f^-(x)$ на $[a, b] \equiv [0, 1]$ обозначим соответственно $f_{\varepsilon, \delta}^+(x)$, $f_{\varepsilon, \delta}^-(x)$,

$$f_3^*(x) = \frac{1}{2}[f^+(x) + f^-(x)] = \begin{cases} \tilde{f}_v + \left(\tilde{f}'_v + \frac{1}{2}(\eta_v^+ + \eta_v^-) \right)(x - x_v), & x \in [x_v, \bar{x}_v], \\ \frac{1}{2}[\tilde{f}_v + \tilde{f}'_v(x - x_v) + \tilde{f}'_{v+1}(x - x_{v+1}) + \tilde{f}_{v+1}] + \frac{L}{4} \text{sign}(\Delta \tilde{f}'_v) \times \\ \times \left[\frac{L}{2}(x - x_v)^2 + \frac{L}{2}(x - x_{v+1})^2 \right] + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_v + \frac{1}{4} \{ [(1 + \text{sign}(\Delta \tilde{f}'_v))\eta_v^+ + \\ + (1 - \text{sign}(\Delta \tilde{f}'_v))\eta_v^-](x - x_v) + [(1 + \text{sign}(\Delta \tilde{f}'_v))\eta_{v+1}^- + \\ + (1 - \text{sign}(\Delta \tilde{f}'_v))\eta_{v+1}^+](x - x_{v+1}) \}, & x \in [\bar{x}_v, \bar{\bar{x}}_v], \\ \tilde{f}_{v+1} + \left(\tilde{f}'_{v+1} + \frac{1}{2}(\eta_{v+1}^+ + \eta_{v+1}^-) \right)(x - x_{v+1}), & x \in [\bar{\bar{x}}_v, x_{v+1}], \end{cases}$$

$$\varphi_{\varepsilon, \delta}(x) = \frac{1}{2}[f^+(x) - f^-(x)] = \begin{cases} \varepsilon_i + \frac{1}{2}(\eta_i^+ - \eta_i^-)(x - x_i) + \frac{L}{2}(x - x_i)^2, & x_i \leq x \leq \bar{x}_i, \\ \frac{L}{4}[(x - x_i)^2 - (x - x_{i+1})^2] + \frac{1}{2}(\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}) + \frac{1}{4} \{ [(1 - \text{sign}(\Delta \tilde{f}'_i))\eta_i^+ - \\ - (1 - \text{sign}(\Delta \tilde{f}'_i))\eta_i^-](x - x_i) + [(1 - \text{sign}(\Delta \tilde{f}'_i))\eta_{i+1}^+ - \\ - (1 - \text{sign}(\Delta \tilde{f}'_i))\eta_{i+1}^-](x - x_{i+1}) \} + \frac{1}{2} \text{sign}(\Delta \tilde{f}'_i) \times \\ \times [\tilde{f}_i + \tilde{f}'_i(x - x_i) - \tilde{f}_{i+1} - \tilde{f}'_{i+1}(x - x_{i+1})], & \bar{x}_i \leq x \leq \bar{\bar{x}}_i, \\ \varepsilon_{i+1} + \frac{1}{2}(\eta_{i+1}^+ - \eta_{i+1}^-)(x - x_{i+1}) - \frac{L}{2}(x - x_{i+1})^2, & \bar{\bar{x}}_i \leq x \leq x_{i+1}, \end{cases}$$

$$\bar{x}_v = \min(\tilde{x}_v^-, \tilde{x}_v^+), \quad \bar{\bar{x}}_v = \max(\tilde{x}_v^-, \tilde{x}_v^+).$$

Теорема 7 [1, 15]. Пусть $f(x) \in W_{2, N, L, \varepsilon, \delta}$, выполняются условия 1 и 2 и используется информация о фиксированных значениях функции и ее производной, приближенно заданных в N фиксированных узлах произвольной сетки, возможные погрешности задания функции и ее производной ограничены условиями $|f(x_i) - \tilde{f}(x_i)| \leq \varepsilon_i$, $|f'(x_i) - \tilde{f}'(x_i)| \leq \delta_i$, $i = \overline{0, N}$. Тогда квадратурная формула приближенного вычисления $I_1(\omega)$ вида

$$R_6(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_3^*(x) \sin \omega x dx \quad (23)$$

является оптимальной по точности при $N \geq |\omega|$ и $N = [|\omega|/\pi] + 1$.

Оценка полной абсолютной погрешности квадратурной формулы $R_G(\omega)$ имеет вид

$$E \leq E_H + E_M + E_\tau,$$

где $E_H + E_M = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{\varepsilon, \delta}(x) \sin \omega x dx$.

Для оценки E_τ имеет место соотношение (22).

В работах [1, 2] при построении оптимальных по точности и близких к ним квадратурных формул вычисления (1) рассматриваются также более сложные для исследования случаи, а именно:

- различные виды осцилляции, в том числе когда ω — большое число; на примере $I_1(\omega)$ строятся функции $f_i^\pm(x)$ для отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$, оптимальные и близкие к ним квадратурные формулы и оценки погрешности;
- произвольная сетка узлов $\{x_i\}_0^{N-1}$, не связанная с нулями $\sin \omega x$, $\cos \omega x$ (без ограничений условий 1 и 2).

СЛУЧАЙ НЕТОЧНО ЗАДАННОЙ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Последующее улучшение «потенциальной разрешающей способности» в.а. связано с выявлением и уточнением априорной информации о задаче: чем качественнее информация о задаче, тем на более качественное приближенное решение можно рассчитывать. Максимальное использование всей имеющейся информации о задаче дает возможность сузить класс решаемых задач и тем самым улучшает «потенциальную разрешающую способность» в.а.: чем точнее исходная информация, тем точнее оценки погрешности и тем меньше область неопределенности приближенного решения задачи. Для получения качественных решений задачи (1) необходима соответствующая априорная информация. Если она задана с достаточно большой погрешностью, то неточными будут и выводы о качестве решения задачи. Например, если аппроксимируется функция из интерполяционного класса Липшица $F_N \equiv C_{L,N,\varepsilon}$ и известны не сами L и ε , а лишь приближения к ним, то оценка погрешности вычисления $I(\omega)$ может быть большой. В этих случаях полезны квадратурные формулы, которые не являются в точности оптимальными, но в некоторой степени свободны от указанного недостатка. Такие формулы могут быть построены на основе методов невязки и квазирешений [3, 14].

В квадратурной формуле, построенной по методу квазирешений для класса $F \equiv C_{L,N,\varepsilon}$, подынтегральная функция $f(x)$ аппроксимируется функцией, которая является решением задачи

$$\min_{f \in F} \max_i \varepsilon_i. \quad (24)$$

Другими словами, метод квазирешений заключается в нахождении функции, минимально отклоняющейся от заданного набора точек (x_i, \tilde{f}_i) , $\tilde{f}_i = f_i + \varepsilon_i$, $i = \overline{0, N-1}$.

Решением задачи (24) является линейный сплайн $S(x, L)$, у которого максимальное отклонение от заданных точек (x_i, f_i) , $i = \overline{0, N-1}$, минимальное:

$$S(x, L) = \tilde{f}_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} (\tilde{f}_{i+1} - \tilde{f}_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{0, N-1},$$

$$\tilde{f}_i = \frac{\tilde{f}_i^+ + \tilde{f}_i^-}{2}, \quad \tilde{f}_i^\pm = \max_{1 \leq j \leq N} [\pm (\tilde{f}_j \mp L|x_j - x_i|)], \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Часто количественная априорная информация, задействованная в определении класса F , задается в виде ограничений на некоторый функционал $\Phi(f)$. Для

классов $C_{L,N}$ и $C_{L,N,\varepsilon}$ в качестве такого функционала выступает равномерная норма производной. В квадратурной формуле, построенной по методу невязки, подынтегральная функция $f(x)$ аппроксимируется функцией, которая является решением задачи

$$\min_{f \in F} \Phi(f). \quad (25)$$

Решение задачи (25) — линейный сплайн $S(x, M)$, определяемый соотношениями для $S(x, L)$ с заменой константы Липшица константой M [10], где

$$M = \max_{1 \leq j \leq N} \left(0; \max_{j > i} \frac{|f_j - f_i| - \varepsilon_j - \varepsilon_i}{x_j - x_i} \right).$$

Квадратурные формулы, построенные с использованием методов невязки и квазирешений для интеграла $I_1(\omega)$, имеют соответственно вид

$$R_7(\omega) = \int_a^b S(x, L) \sin \omega x \, dx, \quad R_8(\omega) = \int_a^b S(x, M) \sin \omega x \, dx.$$

Рассмотренные алгоритмы оптимальны по порядку точности с константой, не превышающей 2 (даже если сравнивать со случаем точного задания L и ε). Однако приближения, полученные по методу невязки или квазирешений, могут оказаться намного точнее оптимального по точности решения, потому что поиск этих решений направлен на уточнение априорной информации. Применение методов невязки и квазирешений является одним из способов использования резервов оптимизации по точности.

Таким образом, при рассмотрении неточного задания исходной информации (классы $F_{N,\varepsilon}$) возможны два случая. Если неточно заданы значения сеточного информационного оператора $\{\tilde{f}_i\}_0^{N-1}: |\tilde{f}_i - f_i| \leq \varepsilon_i, i = 0, N-1$, то для построения граничных функций $f^\pm(x) \in F_{N,\varepsilon}$ предварительно осуществляется сглаживание входных данных и уточнение $\varepsilon_i, i = 0, N-1$, путем решения некоторой системы линейных неравенств [1]. При неточно заданной априорной информации о классе (например, константа Липшица L) предлагаются близкие к оптимальным по точности квадратурные формулы на основе методов невязки и квазирешений.

Отметим особенности предлагаемого подхода к решению задачи (1).

- Обоснование качества квадратурных формул осуществляется на основе получения оценок их полной погрешности. Это позволяет дать гарантированную оценку качества приближенного значения интеграла, поскольку при таком подходе учитываются все источники погрешностей, присущих вычислительному процессу.

- Построение оптимальных квадратурных формул происходит в условиях наиболее полного использования имеющейся информации о подынтегральной функции. Наряду с классами подынтегральных функций, применяемыми в функциональном анализе, рассматриваются более узкие классы функций, которые лучше описывают подынтегральную функцию и тем самым повышают «потенциальную разрешающую способность» численного метода.

- Методы выявления и уточнения априорной информации о подынтегральной функции применяются в случаях, когда информация о ней задана приближенно. Это важно, поскольку априорная информация входит в квадратурные формулы, а также в оценки погрешностей. Использование этих методов позволяет улучшить качество приближенного решения задачи.

НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ε -РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Известно [6, 8, 13], что для в.а.-программы решения (1) в случае, когда

$I_N(f) = \{f_i\}_0^{N-1}$ и вычисления выполняются в режиме плавающей запятой с τ разрядами в мантиссах чисел в двоичном представлении, в общем виде справедливости оценки

$$E_M(I_N(f)) = E_M(N) = O(N^{-p}), \quad (26)$$

$$E_\tau(I_N(f)) = E_\tau(N) = O(N2^{-\tau}), \quad (27)$$

где p — порядок точности численного метода, зависящий от гладкости класса F . При этом

$$\varepsilon_{M\tau}^0(\tau) = \min_N (E_{M\tau}(I_N(f), a, C) = O(N_0^{-p}(\tau)), \quad (28)$$

где $E_{M\tau} = E_M + E_\tau$, $N_0(\tau) = O(2^{\tau/(p+1)})$, а $E_M(N_0(\tau)) = O(N_0^{-p}(\tau))$, $E_\tau(N_0(\tau)) = O(N_0^{-p}(\tau))$.

При $N \ll N_0$ доминирует погрешность метода E_M . Она может быть уменьшена путем использования оптимальных наборов I_N , увеличения N (с учетом (28)), использования оптимальных по точности и близких к ним в.а., перехода к другому классу исходных данных I_N (в целях повышения порядка точности) и соответствующего ему в.а.

При $N \gg N_0$ доминирует погрешность округления. Уменьшение величины E_τ может быть достигнуто непосредственным уменьшением N (с учетом (28)) или использованием тех же возможностей, что и при $N \ll N_0$ (кроме увеличения N), а также увеличением τ .

В работах [8, 11, 13] рассмотрено влияние возможных распределений составляющих полной погрешности на возможность выполнения условий (6), (7) и показано, как неудачное распределение может существенно осложнить выполнение этих условий.

Пусть $E_H + E_M + E_\tau \leq \varepsilon$ с учетом условия (7). Заменим это условие такими оценками: $E_H \leq \delta_1$, $E_M \leq \delta_2$, $E_\tau \leq \delta_3$, где $\delta_i = \alpha_i \varepsilon$, $\sum_i \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$.

Распределение оценок составляющих полной погрешности определяется числами $\{\alpha_i\}$. При $0 \leq \varepsilon - E_H \ll \varepsilon$ необходимо наложить жесткие условия на две другие составляющие E , а именно:

$$E_M + E_\tau \leq \varepsilon_1 = \varepsilon - E_H \ll \varepsilon. \quad (29)$$

Как видно из (28), для каждого τ при некотором $N_0(\tau)$ достигается $\min \varepsilon_{M\tau}^0(\tau)$. При этом выполнение необходимого условия ε -решения (29) связано с условиями

$$N = O(\varepsilon_1^{1/p}), \quad \tau = O(\log \varepsilon_1^{-1}), \quad \varepsilon_1 \rightarrow 0. \quad (30)$$

Пусть ε -решение вычисляется на одном процессоре с помощью линейного в.а. за время

$$T(\varepsilon) = N(\varepsilon)\beta(\varepsilon)\alpha(\tau), \quad (31)$$

где $\beta(\varepsilon)$ — среднее количество операций вычисления функционала из набора $I_N(f)$ и использования его для реализации в.а., $\alpha(\tau)$ — средняя цена одной операции при вычислении ε -решения. Если положить $\alpha(\tau) = O(\tau)$ (при распараллеливании операции умножения двух чисел [16]), то, учитывая (30), имеем

$$T(\varepsilon_1) = O(\varepsilon_1^{1/p}) \log \varepsilon_1^{-1}, \quad \varepsilon_1 \rightarrow 0. \quad (32)$$

Как видно из (32), условие (7) может не выполняться вследствие неточности исходной информации. Условие (29) предъявляет жесткие требования к N и τ , а следовательно, к процессорному времени. Чтобы обеспечить выполнение условия (7) в этом случае, возможно, достаточно использовать исходные данные с более высокой точностью.

Рассмотрим задачу (6)–(8) относительно вычисления интеграла $I(\omega)$ и предложим некоторые подходы к ее решению. Следующая теорема позволяет определить значения параметров в.а., которые гарантируют решение задачи (6)–(8).

Теорема 8. Пусть $h = 1/N$. Значение $h^* \in D$, обеспечивающее решение задачи (6)–(8) относительно вычисления интеграла $I(\omega)$, находится в области

$$D: \left[\frac{1}{2^i} \left(\frac{\varepsilon_1}{C_1} \right)^{1/p}, \frac{1}{2^{i-1}} \left(\frac{\varepsilon_1}{C_1} \right)^{1/p} \right], \quad (33)$$

где значение $i = 1, 2, \dots$ выбирается наименьшим таким, что удовлетворяет условию

$$E_\tau(h_i) \leq (1 - 2^{-pi})\varepsilon_1, \quad (34)$$

ε_1 определяется из (29), константа C_1 — из оценки E_M исследуемой в.а.-программы $a \in A(\varepsilon, T_0)$.

Доказательство. Запишем уравнения (26), (27) в виде

$$E_M(N) = \frac{C_1}{N^p}, \quad E_\tau(N) = C_\tau 2^{-\tau} N.$$

Обозначим $C_\tau 2^{-\tau} = C_2$. Тогда условие (6) имеет вид

$$E_H + \frac{C_1}{N^p} + C_2 N \leq \varepsilon, \quad \text{или} \quad \frac{C_1}{N^p} + C_2 N \leq \varepsilon - E_H = \varepsilon_1. \quad (35)$$

Запишем (35) в виде

$$S(h) = C_1 h^{p+1} - \varepsilon_1 h + C_2 \leq 0. \quad (36)$$

Для определения области D значений h , которая удовлетворяла бы неравенству (35), необходимо найти действительные корни полинома $S(h)$.

В качестве верхней границы корней полинома $S(h)$ выберем решение уравнения

$$C_1 h^{p+1} - \varepsilon_1 h = 0,$$

которое получено из (36), причем оценка (36) будет иметь достаточно высокую степень точности, поскольку $C_2 = O(2^{-\tau})$ — малое. Имеем

$$h_0 = \left(\frac{\varepsilon_1}{C_1} \right)^{1/p}. \quad (37)$$

Следовательно, точное решение уравнения находится в области $0 < h^* \leq h_0$.

Оценка (37) может не удовлетворить (5). Для нахождения оценки снизу значения h^* , которое обеспечивает точность ε , применим метод половинного деления. Рассмотрим следующий алгоритм определения h (или N) для вычисления $I(\omega)$ с точностью ε :

1) вычисляем $h_1 = \frac{1}{2} h_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_1}{C_1} \right)^{1/p}$;

2) проверяем условие

$$E_M(h_1) + E_\tau(h_1) \leq \varepsilon_1, \quad \text{или} \quad E_\tau(h_1) \leq (1 - 2^{-p})\varepsilon_1. \quad (38)$$

Если условие (36) выполняется, то h_1 обеспечивает заданную точность ε и $h^* = h_1$. Если при этом выполняется и условие (7), то исследуемый алгоритм T -эффективен. Если h^* обеспечивает решение задачи (6), но не удовлетворяет

условию (7), то уточняется значение h^* , которое находится в области $h_1 \leq h^* < h_0$. Для определения более точного его значения применим метод половинного деления области $D_1: [h_1, h_0]$ и проверим условие (38).

Если $h^* = h_1$ не обеспечивает выполнения условия (36), значит, $h^* \notin D_1$. Тогда по методу дихотомии [17] вычисляем следующее приближение оценки снизу $h_2 = \frac{1}{2}h_1 = \frac{1}{2^2} \left(\frac{\varepsilon_1}{C_1} \right)^{1/p}$ и проверяем условие (34) для h_2 . Дальнейшие рассуждения аналогичны. Отметим, что уточнять значение h^* необходимо в области $D_2: [h_2, h_1]$.

Далее на основании метода математической индукции для i -го шага дискретизации $h_i = \frac{1}{2^i} \left(\frac{\varepsilon_1}{C_1} \right)^{1/p}$ проверяется выполнение условия (34). Если существует такое $i=1, 2, \dots$, что h_i обеспечивает выполнение условия (34), то h_i гарантирует заданную точность ε и тогда $h^* = h_i$. Если h^* обеспечивает решение задачи (6), но не гарантирует условие (7), то можно уточнить значение h^* , которое находится в области $D_i: \left[\frac{1}{2^i} \left(\frac{\varepsilon_1}{C_1} \right)^{1/p}, \frac{1}{2^{i-1}} \left(\frac{\varepsilon_1}{C_1} \right)^{1/p} \right]$, применяя метод половинного деления области D_i и проверяя условие (37). Доказательство завершено.

Замечание 1. Если невозможно найти h_i , удовлетворяющее условию (34), значит, слишком большая либо оценка E_τ (поскольку $E_M \leq 2^{-p} \varepsilon_1$), либо оценка E_H . Если найдено h_i , удовлетворяющее условию (34), но $i \gg 1$, это означает, что для вычисления решения задачи (1) с заданной точностью ε необходимо использовать большое количество $N_i = \left\lceil \frac{1}{h_i} \right\rceil + 1$ значений функционала $I_N(f) = \{f_i\}_0^{N-1}$ и исследуемый алгоритм не T -эффективен.

Предложенный подход позволяет найти оценку N — количества необходимой исходной информации для получения ε -решения задачи (1) в общем виде. Для вычисления значений действительных корней полинома $S(h)$ (а не их оценки) можно применять или численные методы (например, дихотомии, хорд, Кардано, εs -алгоритм [17, 18] и т.п.), или воспользоваться известными программными системами (например, Mathematica, MatLab, MathCad).

Для решения задачи (9), (10) необходимо найти действительные корни уравнения

$$S_1(h) = \frac{d}{dh}(S(h)) = 0,$$

откуда

$$(p+1)C_1 h^p - \varepsilon_1 = 0, \quad h^* = \sqrt[p]{\frac{\varepsilon_1}{(p+1)C_1}}. \quad (39)$$

Очевидно, что h^* , определяемое соотношением (39), обеспечивает минимум $S(h)$.

Приведем примеры применения теоремы 8 для некоторых классов F . Для классов подынтегральных функций, рассматриваемых в работе, соотношение (36) имеет следующий вид.

Пример 1. Пусть $F \equiv C_L$. В этом случае $p=1$ и соотношение (36) имеет вид

$$C_1 h + C_2 h^{-1} \leq \varepsilon_1, \quad \text{или} \quad C_1 h^2 - \varepsilon_1 h + C_2 \leq 0, \quad (40)$$

$$h_{1,2} = \frac{\varepsilon_1 \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 - 4C_1C_2}}{2C_1}.$$

Для существования корней необходимо выполнение условия $\varepsilon_1 \geq 2\sqrt{C_1C_2}$. Тогда область $D = \{h_1, h_2\}$ гарантирует решение задачи (6).

Если выполняется условие (29), то $N = \left\lceil \frac{1}{h_1} \right\rceil + 1$, где $h_1 = \frac{\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - 4C_1C_2}}{2C_1}$, гарантирует ε -решение задачи (1). Очевидно, что заданное значение ε на данном классе функций не может быть меньше ε_1^* , где

$$\varepsilon_1^* = \min \varepsilon_1 = 2\sqrt{C_1C_2}, \quad (41)$$

и достигается при $N = \left\lceil \frac{2C_1}{\varepsilon_1} \right\rceil + 1$. Таким образом, ε_1^* гарантирует решение задачи (9).

Пример 2. Пусть $F \equiv W_{2,L}$. В этом случае $p = 2$ и соотношение (36) имеет вид

$$C_1h^2 + \frac{C_2}{h} \leq \varepsilon_1, \text{ или } C_1h^3 - \varepsilon_1h + C_2 \leq 0. \quad (42)$$

Рассмотрим кубическое уравнение

$$S_3(h) = C_1h^3 - \varepsilon_1h + C_2 = 0. \quad (43)$$

Это уравнение имеет хотя бы один действительный корень. Для нахождения всех корней над полем комплексных чисел применим формулу Кардано [16], которая имеет вид

$$\begin{aligned} h_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{-\frac{\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{-\frac{\Delta}{108}}}, \\ h_2 &= \gamma \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{-\frac{\Delta}{108}}} + \gamma^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{-\frac{\Delta}{108}}}, \\ h_3 &= \gamma^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{-\frac{\Delta}{108}}} + \gamma \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{-\frac{\Delta}{108}}}, \end{aligned}$$

где $\gamma = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\Delta = -27q^2 - 4p^3$, $q = \frac{C_2}{C_1}$, $p = -\frac{\varepsilon_1}{C_1}$.

Характер корней кубического уравнения зависит от знака выражения $\Delta_1 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{\Delta}{128}$.

Исследуем знак полинома $S_3(h)$ в зависимости от значений его действительных корней. Для этого применим графический метод. Возможны следующие случаи (рис. 1, а-г).

1. Если $\Delta_1 > 0$, то кубическое уравнение имеет три разных корня: один из них действительный (например, h_1), два других — комплексно-сопряженные. В этом случае неравенство (42) имеет вид $(h - h_1)(ah^2 + bh + c) \leq 0$; его решением будет значение $h^* < h_1$ (рис. 1, а).

2. Если $\Delta_1 = 0$, то все три корня действительные, два из них равны. В этом случае неравенство (42) имеет вид $(h - h_1)(h - h_2)^2 \leq 0$; его решением будет значение $h^* < h_1$ (рис. 1, б, в).

3. Если $\Delta_1 < 0$, то все три корня действительные и разные. В этом случае не-

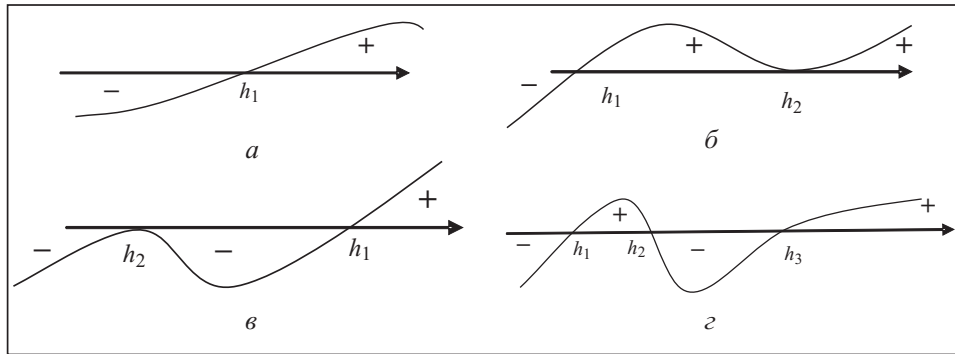


Рис. 1

равенство (42) имеет вид $(h-h_1)(h-h_2)(h-h_3) \leq 0$; его решением будет значение $h^* < \min_i h_i$ (рис. 1, г).

4. Если все три корня действительные и равные, то неравенство (42) имеет вид $(h-h_1)^3 \leq 0$; его решением будет значение $h^* < h_1$ (рис. 1, а).

Найденное значение h^* гарантирует решение задачи (42), а значит, и задачи (6). Если при этом выполняется условие (7), то исследуемый алгоритм T -эффективен.

Для вычисления наименьшего значения ε , при котором может быть решена задача (1) на данном классе функций, необходимо найти корни уравнения $\frac{d}{dh}(S_3(h)) = 0$.

Таким образом, имеем $3C_1h^2 - \varepsilon_1 = 0$, откуда

$$h^* = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{3C_1}}. \quad (44)$$

Из соотношения (42) получаем, что заданное значение ε на данном классе функций не может быть меньше, чем значение ε_1^* ,

$$\varepsilon_1^* = \min \varepsilon_1 = \sqrt[3]{\frac{9C_2^2C_1}{2}}, \quad (45)$$

которое достигается при $N = \left\lceil \frac{1}{h^*} \right\rceil + 1$. Очевидно, что h^* , определяемое соотношением (44), обеспечивает минимум $S_3(h)$, т.е. решение задачи (9) в рассматриваемом классе функций.

Замечание 2. Используя оценки полной погрешности E на классах C_L и $W_{2,L}$ соответственно квадратурных формул $R_1(\omega)$, $R_4(\omega)$, которые определяются соотношениями (12), (17) (теоремы 1, 4), можно получить значения констант C_1 , C_2 , а следовательно, и решения задач (6), (7) и (9), (10).

Замечание 3. Из теорем 2, 3, 6, 7 следует, что оценки полной погрешности E на классах функций $f \in F_N$ представляют собой в общем случае трансцендентные функции вида

$$E(N) = \varphi(\sin(\omega, N), \cos(\omega, N)). \quad (46)$$

Для решения уравнений такого вида используют численные методы (метод половинного деления (биссекции), метод хорд, метод касательных (Ньютона),

ε -алгоритм и др.) [17, 18]. Для получения решения трансцендентного уравнения с одной переменной (46) в аналитическом виде наиболее целесообразно применить разложение тригонометрических функций в степенные ряды (ограничиваясь для упрощения первыми членами ряда) и аппроксимацию трансцендентного уравнения полиномом вида $a_0 + a_1 N + \dots + a_p N^p$. Далее можно проводить исследования, аналогичные предыдущим.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В том случае, когда не удастся построить в.а. $a \in A(\varepsilon, T_0)$ вычисления ε -решения задачи (1) на классах функций $f \in F, F_N$, для окончательного вывода о возможности такого построения важно иметь точные (или близкие к ним) оценки снизу погрешности приближенного решения и вычислительной сложности задачи. Воспользовавшись этими оценками, можно определить: реально ли построить решение задачи с заданными значениями характеристик качества или нет; задачу (1) «погрузить» в более узкий класс (например F_N) или использовать компьютер другого класса.

Для улучшения качества реализации квадратурных формул вычисления интегралов от быстро осциллирующих функций целесообразно использовать следующие резервы оптимизации вычислений.

1. Уменьшение меры погрешностей:
 - а) уточнение исходных данных (E_H):
 - уточнение класса;
 - уточнение исходной информации;
 - повышение точности исходной информации;
 - б) уменьшение погрешности метода E_M :
 - использование оптимальных, асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку точности в.а.;
 - оптимизация информационного набора функционалов (например, оптимальная сетка узлов);
 - увеличение числа функционалов в информационном наборе;
 - переход в другой класс информационных операторов, обеспечивающий сужение области неопределенности решения задачи;
 - полное использование исходной информации для сужения класса функций;
 - в) уменьшение погрешности округления (E_τ):
 - использование методов оптимального порядка точности для высокоточных вычислений;
 - сужение классов (в целях уменьшения количества функционалов в информационном наборе);
 - использование схем вычислений, минимизирующих скорость накопления погрешности округления;
 - повышение оптимального порядка точности путем выбора класса информационных операторов;
 - увеличение длины разрядной сетки;
 - выбор и моделирование правил округления;
 - использование оптимизированного информационного оператора.
2. Сокращение процессорного времени:
 - использование точной исходной информации (как следствие — менее жесткие ограничения на погрешности метода и округления);
 - улучшение качества оценок погрешностей метода и округления;
 - повышение точности вычисления параметров вычислительного процесса;
 - использование быстрых ортогональных преобразований;
 - согласование в.а. с архитектурой компьютера;
 - распараллеливание вычислений.

Полученные результаты могут широко применяться для улучшения качества вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций, при тестирова-

нии качества разработанных вычислительных алгоритмов и учитываться при формулировке требований к точности решения различных задач цифровой обработки сигналов и других классов задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Задирака В.К., Мельникова С.С. Цифровая обработка сигналов. — Киев: Наук. думка, 1993. — 294 с.
2. Трауб Дж., Вожняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. — М.: Мир, 1983. — 382 с.
3. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ: Справ. пособ. — Киев: Наук. думка, 1986. — 584 с.
4. Характеристики задач, алгоритмов и ЭВМ в комплексах программ вычислительной математики / В.В. Иванов, М.Д. Бабич, А.И. Березовский и др. — Киев, 1984. — 54 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова; 84–36).
5. Разработать систему тестирования качества прикладного программного обеспечения ЭВМ / В.С. Михалевич, И.В. Сергиенко, В.К. Задирака и др. — Киев, 1989. — 256 с. — Деп. в ВНТНЦ; № 0290.037707.
6. Т-е ф е к т и в н і алгоритми наближеного розв'язання задач обчислювальної та прикладної математики / В.К. Задирака, М.Д. Бабич, А.І. Березовський та ін. — Тернопіль: Збруч, 2003. — 261 с.
7. Про технологію розв'язування задач прикладної і обчислювальної математики із заданими характеристиками якості / М.Д. Бабич, А.І. Березовський, П.М. Бесараб та ін. // Теорія обчислень. — К.: Ін-т кибернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 1999. — С. 16–20.
8. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. — М.: Наука, 1970. — 564 с.
9. Т-э ф ф е к т и в н ы е алгоритмы вычисления ϵ -решений задач вычислительной и прикладной математики. I; II / М.Д. Бабич, А.И. Березовский, П.Н. Бесараб и др. // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 2. — С. 49–70; 2001. — № 3. — С. 98–119.
10. Бахвалов Н.С. Численные методы. — М.: Наука, 1973. — Т. 1. — 632 с.
11. Жилейкин Я.М., Кукаркин А.Б. Приближенное вычисление интегралов от быстроосциллирующих функций: Учеб.-практ. пособ. — М.: МГУ, 1987. — 99 с.
12. Задирака В.К., Мельникова С.С., Луц Л.В. Оптимальные квадратурные и кубатурные формулы вычисления преобразования Фурье финитных функций одного класса (случай сильной осцилляции) // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 5. — С. 144–164.
13. Луц Л.В. Оцінка якості деяких квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій // Штуч. інтелект. — 2008. — № 4. — С. 671–682.
14. Березовский А.И., Кондратенко О.С. О выявлении и уточнении априорной информации // УСиМ. — 1997. — № 6. — С. 17–22.
15. Луц Л.В. Тестирование качества квадратурных формул вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций класса $W_{2,L,N}$ // Компьютер. математика. — 2007. — № 2. — С. 107–116.
16. Системы параллельной обработки / Под ред. Д. Ивенса. — М.: Мир, 1985. — 416 с.
17. Корн Г., Корн Е. Справочник по математике для научных работников и инженеров: определение, теоремы, формулы. — М.: Наука, 1984. — 831 с.
18. Б а б и ч М. Д. Об одном аппроксимационно-итерационном методе решения нелинейных операторных уравнений // Кибернетика. — 1991. — № 1. — С. 21–28.

Поступила 17.05.2010