УДК 519.81

В.М. МИХАЛЕВИЧ

К ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ РЕШЕНИЯ С ДЕНЕЖНЫМИ ДОХОДАМИ

Ключевые слова: *статистическая закономерность, схема ситуации, правило выбора предпочтения.*

Настоящая статья является продолжением исследований, проведенных в работах [1, 2]. Цель этих исследований — обобщение результатов анализа «общей задачи решения», полученных в монографии [3].

Обозначим $B_0(\Theta)$, или просто B_0 в контексте Θ, множество всех конечнозначных Σ-измеримых функций на Θ, т.е.

$$B_0(\Theta) \overset{\text{def}}{=} \{f \in B(\Theta) \colon Card\, f(\Theta) < \infty\},$$

а через $B_0(a, b)$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $(-a)$, $b > 0$, — множество всех конечнозначных Σ-измеримых функций на Θ со значениями в интервале (a, b):

$$B_0(a, b) := \{f \in \mathbb{R}^{\Theta} \colon f \in B_0,\ f(\Theta) = (a, b)\}.$$

Пусть L — произвольное выпуклое множество таких Σ-измеримых ограниченных функций на Θ, обозначаемых B, что найдутся $a, b \in \mathbb{R}$, для которых множество $B_0(a, b)$ содержится в L:

$$B_0(a, b) \subseteq L = \operatorname{co} L \subseteq B. \qquad (1)$$

Далее обозначим $V(L)$ класс всех функционалов v на L, т.е. $v: L \to \mathbb{R}$, а через $V_0(L) \subset V(L)$ — его подкласс, удовлетворяющий для любых $f_1, f_2 \in L$ следующим условиям.

V1. Если $f_1(\theta) \le f_2(\theta)$ $\forall \theta \in \Theta$, то $v(f_1) \le v(f_2)$.

V2. Если $a', b' \in \mathbb{R}$, $a' \ge 0$ и $f_1(\theta) = a' f_2(\theta) + b'$ $\forall \theta \in \Theta$, то $v(f_1) = a' v(f_2) + b'$.

V3. Имеет место $v(f_1) + v(f_2) \ge 2v\left(\frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2\right)$.

Лемма 1. Условие V2 эквивалентно следующему условию.

V2′. Если $\alpha, b_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, 1)$, $\left(\frac{b_1}{1-\alpha}\right)_\Theta \in B_0(a, b)$ и $f_1(\theta) = \alpha f_2(\theta) + b_1$ $\forall \theta \in \Theta$, то $v(f_1) = \alpha(f_2) + b_1$.

Доказательство. Условие V2′ следует из условия V2 тривиальным образом.

Покажем, что из условия V2′ вытекает условие V2. Действительно, из условия $f_1(\theta) = \alpha f_2(\theta) + b_1$ следует, что

$$f_2(\theta) = \frac{1}{\alpha} f_1(\theta) - \frac{b_1}{\alpha}.$$

Тогда в силу условия V2′ имеем

$$v(f_2) = \frac{1}{\alpha} v(f_1) - \frac{b_1}{\alpha}.$$

Ввиду произвольности $\alpha \in [0, 1)$ и $b_1 \in \mathbb{R}$ получено, что условие V2 выполняется для $a' \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$. Убедимся в справедливости условия V2 и при $a' = 1$.

Пусть $f_1(\theta) = f_2(\theta) + b'$, тогда $f_1(\theta) = 2\left[\frac{1}{2} f_1(\theta)\right] + b'$, ибо если $f \in L$, то $\frac{1}{2} f = \frac{1}{2} f + \frac{1}{2} \cdot 0_\Theta \in L$. На основании этого получим

$$v(f_1) = 2v\left(\frac{1}{2} f_2\right) + b'.$$

Но тогда в силу условия V2′ при $b_1 = 0$ имеем $v\left(\frac{1}{2} f_2\right) = \frac{1}{2} v(f_2)$. Отсюда $v(f_1) = v(f_2) + b'$ и условие V2 при $a' = 1$ также справедливо.

Лемма доказана.

Следуя терминологии, введенной в работе [1], условие, что параметрическая задача решения (ЗР) с денежными потерями, а отображение последствий есть функция потерь, означает принадлежность схемы ситуации задачи решения (ССЗР) $((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g)$ классу $\mathbf{Z}((\mathbb{R}, \le))$, где $(\mathbb{R}, \le)$ — множество действительных чисел с естественнным порядком $(\le)$ и на Θ зафиксирована некоторая алгебра подмножеств Σ, а $g: \Theta \times U \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, удовлетворяющая двум условиям:

а) $\inf \{g(\theta, u);\ \theta \in \Theta,\ u \in U\} > -\infty$;

б) $\sup \{g(\theta, u);\ \theta \in \Theta\} < +\infty$ $\forall u \in U$.

Обозначая (Θ, U, g), будем подразумевать именно указанное соответствие и под $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}(\Theta))$ подразумевать $\mathbf{Z}(\mathbb{R}, \le)$ $(\mathbf{Z}((\mathbb{R}, \le), \Theta))$. Аналогично условие, что параметрическая ЗР с денежными доходами означает принадлежность ССЗР $((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g)$ классу $\mathbf{Z}(\mathbb{R}, \ge)$.

Следующее определение обобщает соответствующее ему определение в [3] на подклассы $\mathbb{Z}'(\Theta)$ класса $\mathbb{Z}(\Theta)$.

Определение 1. Правилом выбора критерия (ПВК) для ССЗР из класса $\mathbb{Z}'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(\Theta)$ будем называть любое отображение π, определенное на $\mathbb{Z}'(\Theta)$ и сопоставляющее каждой $Z=(\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$ некоторую действительную функцию $g_Z^*(\cdot)$, определенную на U.

Класс всех ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$ обозначим $\Pi(\mathbb{Z}'(\Theta))$ и при этом будем относить к $\Pi_0(\mathbb{Z}'(\Theta)) \subset \Pi(\mathbb{Z}'(\Theta))$ все ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, удовлетворяющие следующим условиям.

У1. Если $Z_1=(\Theta, U_1, g_1) \in \mathbb{Z}'(\Theta), Z_2=(\Theta, U_2, g_2) \in \mathbb{Z}'(\Theta), U_1 \subseteq U_2$ и $g_1(\theta, u)= =g_2(\theta, u)\ \forall \theta \in \Theta,\ \forall u \in U_1$, то

$$g_{Z_1}^*(u)=g_{Z_2}^*(u) \quad \forall u \in U_1.$$

У2. Если $Z=(\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $u_i \in U$, $i=\overline{1,2}$, и $g(\theta, u_1) \leq g(\theta, u_2)\ \forall \theta \in \Theta$, то

$$g_Z^*(u_1) \leq g_Z^*(u_2).$$

У3. Если $Z=(\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $u_i \in U$, $i=\overline{1,2}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, и $g(\theta, u_1)= =a g(\theta, u_2)+b\ \forall \theta \in \Theta$, то

$$g_Z^*(u_1)=a g_Z^*(u_2)+b.$$

У4. Если $Z=(\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $u_i \in U$, $i=\overline{1,3}$, и $g(\theta, u_1)+g(\theta, u_2)=2 g(\theta, u_3)$ $\forall \theta \in \Theta$, то

$$g_Z^*(u_1)+g_Z^*(u_2) \geq 2 g_Z^*(u_3).$$

Определение 2. ССЗР $Z=(\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(\Theta)$ будем называть определяющей, если найдутся $a,\ b \in \mathbb{R}$, что

$$B_0(a, b) \subseteq g(\cdot, U)=\operatorname{co}[g(\cdot, U)] \subseteq B. \tag{2}$$

Далее, для ССЗР $\mathbb{Z}'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(\Theta)$ будем относить к классу $\overline{\Pi}_0(\mathbb{Z}'(\Theta)) \subseteq$ $\subseteq \Pi(\mathbb{Z}'(\Theta))$ все ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, которые для любой определяющей ССЗР $Z=(\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$ удовлетворяют условиям У2, У4. Таким образом, ослабленные условия будем обозначать У2$'$ и У4$'$ соответственно. Очевидно, что $\overline{\Pi}_0(\mathbb{Z}'(\Theta)) \supseteq \Pi_0(\mathbb{Z}'(\Theta))$. А через $\Pi_{01}(\mathbb{Z}'(\Theta)) \subseteq \overline{\Pi}_0(\mathbb{Z}'(\Theta))$ обозначим все ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, которые удовлетворяют также следующим условиям.

У1$'$. Если $Z_1=(\Theta, U_1, g_1) \in \mathbb{Z}'(\Theta), Z_2=(\Theta, U_2, g_2) \in \mathbb{Z}'(\Theta), u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2$, $g_1(\theta, u_1)=g_2(\theta, u_2)\ \forall \theta \in \Theta$, то

$$g_{Z_1}^*(u_1)=g_{Z_2}^*(u_2).$$

У3$'$. Если $Z=(\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$ — определяющая, $u_i \in U$, $i=\overline{1,3}$, $\alpha \in[0,1]$, $g(\cdot, u_3)=c_\Theta$ и $g(\theta, u_1)=\alpha g(\theta, u_2)+(1-\alpha) c$ для любых $\theta \in \Theta$, то

$$g_Z^*(u_1)=\alpha g_Z^*(u_2)+(1-\alpha) c.$$

Замечание. В случае, когда $\mathbb{Z}'(\Theta)$ совпадает с $\mathbf{Z}((\mathbb{R}, \leq), \Theta)$ и $\Sigma=2^\Theta$, условие У1$'$ следует из условий У1, У2, У3, У4.

Кроме того, очевидно, что из условий У2, У3, У4 следуют условия У2$'$, У3$'$, У4$'$ соответственно.

Класс всех ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, которые удовлетворяют условию У1$'$, а также условиям У2$'$, У3$'$, У4$'$, ослабленным тем, что требования этих условий распространяются лишь на $g \in B_0(\Theta)$, будем обозначать $\Pi_{02}(\mathbb{Z}'(\Theta))$, а соответствующие ослабленные таким образом условия обозначать У2$''$, У3$''$, У4$''$.

Очевидно, что $\Pi_{01}(\mathbb{Z}'(\Theta)) \subseteq \Pi_{02}(\mathbb{Z}'(\Theta))$.

Выберем теперь ССЗР $Z=(\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(\Theta)$ следующим образом. В качестве множества U возьмем множество L, а $g(\theta, f):=f(\theta)\ \forall f \in L, \forall \theta \in \Theta$. Такую ССЗР обозначим $Z_0(L)$ (или просто Z_0) в контексте фиксированного множества L.

Наконец, введем в рассмотрение отображение $\chi: V(L) \to \Pi(\{Z_0(L)\})$, которое определим следующим образом. Если $\pi=\chi(v)$, $v \in V(L)$, то

$$[\pi(Z_0)](f)=v(f)\quad \forall f \in L.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для любого L, определенного согласно (1),

$$\chi(V_0(L))=\Pi_{01}(\{Z_0(L)\}).$$

Доказательство. Покажем, что $\chi(V_0(L)) \subseteq \Pi_{01}(\{Z_0(L)\})$.

Действительно, пусть $\pi=\chi(v)$, где $v \in V_0(L)$. Проверим для $\pi \in \Pi(\{Z_0(L)\})$ выполнимость условий У2′, У3′, У4′.

Если $f_1, f_2 \in L$ и $f_1(\theta) \le f_2(\theta)\ \forall \theta \in \Theta$, то согласно условию V1 имеем $v(f_1) \le v(f_2)$. Тогда в силу определения χ имеем $[\pi(Z_0)](f_1)=v(f_1) \le v(f_2)=$ $=[\pi(Z_0)](f_2)$. Отсюда следует выполнение условия У2′.

Если α, b_1 — действительные числа, $\alpha \in [0,1)$, $\left(\dfrac{b_1}{1-\alpha}\right)_\Theta \in B_0(a,b)$ и $f_1(\theta)=$ $=\alpha f_2(\theta)+b_1\quad \forall \theta \in \Theta$, $f_1, f_2 \in L$, то согласно условию V2′ имеем $v(f_1)=\alpha v(f_2)+b_1$. Следовательно, используя определение χ, получаем

$$[\pi(Z_0)](f_1)=v(f_1)=\alpha v(f_2)+b_1=\alpha[\pi(Z_0)](f_2)+b_1,$$

т.е. выполняется условие У3′.

И, наконец, если $f_1, f_2, f_3 \in L$ и $f_1(\theta)+f_2(\theta)=2 f_3(\theta)\ \forall \theta \in \Theta$, то в силу условия V3 получим $v(f_1)+v(f_2) \ge 2v\left(\dfrac{1}{2} f_1+\dfrac{1}{2} f_2\right)=2v(f_3)$. Тогда согласно определению χ и условию V2 имеем

$$[\pi(Z_0)](f_1)+[\pi(Z_0)](f_2)=v(f_1)+v(f_2) \ge 2v(f_3)=2[\pi(Z_0)](f_3),$$

а значит, выполняется и условие У4.

Таким образом, показано, что $\chi(V_0(L)) \subseteq \Pi_{01}(\{Z_0(L)\})$.

Чтобы доказать обратное включение, для произвольного $\pi \in \Pi_{01}(\{Z_0(L)\})$ определим функционал $v_\pi: L \to \mathbb{R}$ согласно формуле

$$v_\pi(f) \overset{\text{def}}{=} [\pi(Z_0)](f)\quad \forall f \in L. \tag{3}$$

Для функционала v_π проверим выполнение свойств V1, V2′, V3.

Если $f_1(\theta) \le f_2(\theta)\ \forall \theta \in \Theta$, $f_1, f_2 \in L$, то в силу определения функционала v_π имеем $v_\pi(f_i)=[\pi(Z_0)](f_i)$, $i=\overline{1,2}$, где $\pi \in \Pi_{01}(\{Z_0(L)\})$. Но в силу условия У2 для π имеем $[\pi(Z_0)](f_1) \le [\pi(Z_0)](f_2)$, что согласно (3) равносильно $v_\pi(f_1) \le v_\pi(f_2)$. Таким образом, для v_π выполняется свойство V1.

Если $f_1, f_2 \in L$, $f_1(\theta)=\alpha f_2(\theta)+b_1\ \forall \theta \in \Theta$, где α, b_1 — действительные числа, $\alpha \in [0,1)$, $\left(\dfrac{b_1}{1-\alpha}\right)_\Theta \in B_0(a,b)$, то в силу (3) и условия У3′ получим

$$[\pi(Z_0)](f_1)=\alpha[\pi(Z_0)](f_2)+b_1$$

или

$$v_\pi(f_1)=\alpha v_\pi(f_2)+b_1,$$

т.е. для v_π выполняется также свойство V2′.

Наконец, если $f_1, f_2 \in L$, то, как и выше, воспользовавшись (3) и условием У4 для π, получим

$$[\pi(Z_0)](f_1)+[\pi(Z_0)](f_2)\geq 2[\pi(Z_0)]\left(\frac{1}{2}f_1+\frac{1}{2}f_2\right)$$

или

$$v_\pi(f_1)+v_\pi(f_2)\geq 2v_\pi\left(\frac{1}{2}f_1+\frac{1}{2}f_2\right).$$

Это неравенство и доказанные для v_π свойства V1 и V2′, а согласно лемме 1 и свойство V2 показывают, что $v_\pi \in V_0(L)$.

Кроме того, согласно (2) имеем $\chi(v_\pi)=\pi$. Тем самым в силу произвольности $\pi \in \Pi_{01}(\{Z_0(L)\})$ показано, что

$$\chi(V_0(L))\subseteq \Pi_{01}(\{Z_0(L)\}).$$

Теорема полностью доказана.

Из теорем 1 и 2 получаем следующий результат.

Следствие 1. Для любого L, определенного согласно (1),

$$\chi(V_0(L))=\Pi_{02}(\{Z_0(L)\}).$$

Из теорем 1 и 2 при $Z'=Z_0(L)$ также имеем следствие.

Следствие 2. Если для L выполняется (1), то $\eta_{\{Z_0(L)\}}(P(\Theta))=\chi(V_0(L))$.

Теорема 2. Существует единственное расширение $\overline{v}$ любого функционала $v \in V_0(B_0(a, b))$ на L, при котором $\overline{v} \in V_0(L)$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 3, доказанной в работе [2], и теоремы 1 настоящей статьи.

Теорема 3. Для произвольного непустого множества Θ функционал v на L удовлетворяет условиям V1, V2, а также следующему условию.

V3′. Если $f_1, f_2 \in L$, то

$$v(f_1)+v(f_2)\leq 2v\left(\frac{1}{2}f_1+\frac{1}{2}f_2\right)$$

(класс таких функционалов будем обозначать $V_0'(L)$) тогда и только тогда, когда существует статистическая закономерность P на Θ, что $\forall f \in L$ имеет место

$$v(f)=\min_{p\in P}\int_\Theta f(\theta)\, p(d\theta).$$

Доказательство. Если $f_1, f_2 \in L$, то $-f_1, -f_2 \in -L \overset{\text{def}}{=} \{f \in B: -f \in L\}$. При этом очевидно, что $B_0 \subseteq -L=\mathrm{co}\,(-L)\subseteq B$.

Теорема доказана.

Рассмотрим отображение $\psi: V(L)\to V(-L)$, определяемое следующим образом. Если $\omega \in V(L)$, $\psi(\omega)=v$, то $v(-f)=-\omega(f)$ $\forall f \in L$.

Лемма 2. Имеет место $\psi(V_0'(L))=V_0(-L)$.

Доказательство. Покажем, что $\psi(V_0'(L))\subseteq V_0(-L)$.

Пусть $\omega \in V_0'(L)$, тогда согласно определению ψ имеем $[\psi(\omega)](-f)=-\omega(f)$ $\forall f \in L$. Покажем, что $\psi(\omega)\in V_0(-L)$.

Если $f_1, f_2 \in L$, $f_1(\theta) \le f_2(\theta)$ $\forall \theta \in \Theta$, то в силу условия V1 для ω на L имеем, что $\omega(f_1) \le \omega(f_2)$. Отсюда $-f_1, -f_2 \in -L$, $-f_1(\theta) \ge -f_2(\theta)$ $\forall \theta \in \Theta$ и

$$[\psi(\omega)](-f_1) = -\omega(f_1) \ge -\omega(f_2) = [\psi(\omega)](-f_2).$$

Следовательно, для $\psi(\omega)$ выполняется условие V1 на $-L$.

Если $f_1, f_2 \in L$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \ge 0$ и $f_1(\theta) = af_2(\theta) + b$ $\forall \theta \in \Theta$, то в силу условия V2 для ω на L имеем, что $\omega(f_1) = a\omega(f_2) + b$.

Отсюда $-f_1$, $-f_2 \in -L$, $-f_1(\theta) = a[-f_2(\theta)] - b$ $\forall \theta \in \Theta$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \ge 0$, и

$$[\psi(\omega)](-f_1) = -\omega(f_1) = a[-\omega(f_2)] - b = a[\psi(\omega)](-f_2) - b.$$

Значит, для $\psi(\omega)$ выполняется условие V2 на $-L$.

Если $f_1, f_2 \in L$, то в силу условия V3$'$ для ω на L имеем $\omega(f_1) + \omega(f_2) = 2\omega\left(\frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2\right)$. Отсюда $-f_1, -f_2 \in -L$ и

$$[\psi(\omega)](-f_1) + [\psi(\omega)](-f_2) = -\omega(f_1) - \omega(f_2) \ge$$
$$\ge -2\omega\left(\frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2\right) = 2[\psi(\omega)]\left(\frac{1}{2}(-f_1) + \left(\frac{1}{2} - (f_2)\right)\right).$$

Следовательно, для $\psi(\omega)$ выполняется условие V3 на $-L$, т.е. $\psi(\omega) \in V_0(-L)$.

Покажем, что $\psi(V_0'(L)) \supseteq V_0(-L)$.

Пусть $\upsilon \in V_0(-L)$, тогда выберем $\omega \in V(L)$ такое, что $\omega(f) = -\upsilon(-f)$ $\forall f \in L$, и согласно определению ψ получим $[\psi(\omega)](-f) = -\omega(f) = \upsilon(-f)$ $\forall f \in L$. Покажем, что $\omega \in V_0'(L)$.

Если $f_1, f_2 \in L$, $f_1(\theta) \le f_2(\theta)$ $\forall \theta \in \Theta$, то $-f_1(\theta) \ge -f_2(\theta)$ $\forall \theta \in \Theta$, и в силу условия V1 для υ на $-L$ имеем, что $\upsilon(-f_1) \ge \upsilon(-f_2)$. Отсюда

$$\omega(f_1) = -\upsilon(-f_1) \le -\upsilon(-f_2) = \omega(f_2).$$

Значит, для ω выполняется условие V1 на L.

Если $f_1, f_2 \in L$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \ge 0$, и $f_1(\theta) = af_2(\theta) + b$ $\forall \theta \in \Theta$, то $-f_1(\theta) = a[-f_2(\theta)] - b$ $\forall \theta \in \Theta$ и в силу условия V2 для υ на $-L$ имеем, что $\upsilon(-f_1) = a\upsilon(-f_2) - b$. Отсюда

$$\omega(f_1) = -\upsilon(-f_1) = a[-\upsilon(-f_2)] + b = a\omega(f_2) + b.$$

Следовательно, для ω выполняется условие V2 на L.

Если $f_1, f_2 \in L$, то $-f_1, -f_2 \in -L$ и в силу условия V3 для υ на $-L$ имеем, что $\upsilon(-f_1) + \upsilon(-f_2) \ge 2\upsilon\left(\frac{1}{2}(-f_1) + \frac{1}{2}(-f_2)\right)$. Отсюда

$$\omega(f_1) + \omega(f_2) = -\upsilon(-f_1) - \upsilon(-f_2) \le -2\upsilon\left(\frac{1}{2}(-f_1) + \frac{1}{2}(-f_2)\right) = 2\omega\left(\frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2\right).$$

Значит, для ω выполняется и условие V3$'$ на L, т.е. $\omega \in V_0'(L)$.

Лемма доказана.

Если υ на L удовлетворяет условиям V1, V2, V3$'$, то согласно лемме 2 $\psi(\upsilon)$ на $-L$ удовлетворяет условиям V1–V3 и наоборот. Отсюда в силу теоремы 1 существует статистическая закономерность P на Θ, что $\forall f \in L$

$$\upsilon(f) = -[\psi(\upsilon)](-f) = -\max_{p \in P} \int_{\Theta} [-f(\theta)]\, p(d\theta) = \min_{p \in P} \int_{\Theta} f(\theta)\, p(d\theta)$$

и наоборот.

Теорема доказана.

Теорема 4. Существует единственное расширение $\overline{v}$ любого функционала $v \in V_0'(B_0(a,b))$ на L, при котором $\overline{v} \in V_0'(L)$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 3, доказанной в работе [2], и теоремы 3 настоящей статьи.

Далее введем отображение $\overline{\eta}'_{\mathbb{Z}'(\Theta)} : P(\Theta) / \overset{\text{co}}{\approx} \to \Pi(\mathbb{Z}'(\Theta))$, аналогичное рассмотренному в статье [2] отображению $\eta'_{\mathbb{Z}'(\Theta)}$, но с той лишь разницей, что в его определении операцию max заменим на операцию min.

Обозначим $\overline{\Pi}_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$ и $\overline{\Pi}_{02}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$ классы всех ПВК для $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$, которые удовлетворяют тем же условиям, что и классы $\Pi_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$ и $\Pi_{02}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$ соответственно, но вместо естественного с обратным к нему отношением порядка на $\mathbb{R}$ в тех условиях, где это отношение используется.

Теорема 5. Для произвольного класса ССЗР $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$ отображение $\overline{\eta}'_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}$ является инъекцией и

$$\overline{\eta}'_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P(\Theta) / \overset{\text{co}}{\approx}) = \overline{\Pi}_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta)) = \overline{\Pi}_{02}(\mathbb{Z}_1'(\Theta)(\Theta)).$$

Доказательство следует из теоремы 2 работы [2] и теоремы 3 настоящей статьи.

Теорема 6. Для произвольного класса ССЗР $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$ любое ПВК $\overline{g}^* \in \overline{\Pi}_{01}(\mathbb{Z}_{01}(\Theta))$ можно, и притом единственным образом, продолжить до ПВК $g^* \in \overline{\Pi}_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$.

Доказательство следует из теоремы 3 настоящей статьи и теоремы 3 работы [2].

Для ЗР с денежными доходами, т.е. когда $\mathbb{Z}_1'(\Theta) \subseteq \mathbf{Z}(\mathbb{R}, \geq)$, имеем соответствующие теоремы.

Теорема 7. Для произвольного класса ССЗР $\mathbb{Z}_1'(\Theta) \subseteq \mathbf{Z}(\mathbb{R}, \geq)$ отображение $\eta'_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}$ является инъекцией и

$$\eta'_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P(\Theta) / \overset{\text{co}}{\approx}) = \Pi_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta)) = \Pi_{02}(\mathbb{Z}_1'(\Theta)).$$

Теорема 8. Для произвольного класса ССЗР $\mathbb{Z}_1'(\Theta) \subseteq \mathbf{Z}(\mathbb{R}, \geq)$ любое ПВК $\overline{g}^* \in \Pi_{01}(\mathbb{Z}_{01}'(\Theta))$ можно, и притом единственным образом, продолжить до ПВК $g^* \in \Pi_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$.

Полученные результаты, вытекающие из теорем 7 и 8, можно проинтерпретировать, в частности, таким образом: условия У1$'$, У2$''$, У3$''$ У4$''$ являются необходимыми и достаточными для математически корректной постановки ЗР с любой ССЗР $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}_1'(\Theta) \subseteq \mathbf{Z}(\mathbb{R}, \geq)$ и любой статистической закономерностью $P \in P(\Theta)$. При этом критерий в ЗР задается функцией $g_Z^*(u) = \max_{p \in P} \int_\Theta g(\theta, u) p(d\theta)$ $\forall u \in U$. Лица, принимающие решения, которые согласны с указанными условиями для схем из класса $\mathbb{Z}'_{01}(\Theta)$, перенесут эти условия и на схемы класса $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$. В этом случае их предпочтения на решениях с конечным числом последствий представляют предпочтения на всех решениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михалевич В.М. О некоторых классах правила выбора предпочтений в задачах принятия решения // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 6. — С. 140–154.
2. Михалевич В.М. К параметрической задаче решения с денежными потерями // Там же. — 2011. — № 2. — С. 131–142.
3. Иваненко В.И., Лабковский В.А. Проблема неопределенности в задачах принятия решений. — К.: Наук. думка, 1990. — 135 с

Поступила 07.09.2010