

## МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ В СЕТЯХ С ОБОБЩЕННЫМ ЗАКОНОМ КИРХГОФА

**Ключевые слова:** потоки в сетях, направленный граф, дуги, циклы, системы линейных неравенств, методы исключения неизвестных.

### ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] описаны технологические процессы, которые моделируются с помощью динамических потоков в сетях с обобщенным законом Кирхгофа. В стационарном случае потоки не зависят от времени, и для их нахождения необходимо решить систему линейных неравенств со структурой графа. В силу технологических условий [1] такая система решается методами исключения неизвестных. В [3] предложен метод последовательного исключения одной неизвестной, в [1, 4] разработаны методы исключения групп неизвестных.

В общем случае при исключении одной неизвестной из системы, имеющей  $m$  двусторонних неравенств, может возникнуть новая система, состоящая из  $C_m^2$  неравенств. Рассматриваемая система неравенств имеет структуру графа, поэтому для ее решения естественно использовать данную структуру. Если исключать потоки, протекающие по концевым или промежуточным графам, то новая система имеет меньшее число неравенств и ей будет соответствовать новый граф, который получается из исходного путем стягивания соответствующего ребра. Аналогичное происходит при рассмотрении концевых и промежуточных подграфов и исключении групп неизвестных потоков, протекающих по этим подграфам.

Таким образом, в графе, имеющем один цикл, достаточно вначале исключить потоки, протекающие по концевым ребрам. Останется граф в виде цикла, все ребра которого являются промежуточными. Если в графе больше одного цикла, то систему неравенств приходится решать общими методами [5]. Чтобы избежать подобной ситуации, в работе [6] предложен подход к решению системы неравенств, состоящий в замене исходной системы новой. Последняя имеет структуру графа, который получается из исходного путем замены какого-либо цикла звездой.

В данной статье изучаются динамические потоки, и в сформулированных моделях важную роль играет время прохождения потоком соответствующей дуги (время добегаания). В работах [1, 7] рассматриваются вопросы исключения неизвестных потоков, протекающих по концевым и промежуточным дугам, а также исключения групп неизвестных потоков, протекающих по концевым и промежуточным ориентированным подграфам.

Настоящая статья обобщает результаты работы [6]. В предлагаемом здесь подходе ориентированный специальным образом полуконтур заменяется ориентированной звездой и соответственно меняются системы неравенств. (Отметим, что вся терминология теории графов взята из [8].)

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В [1] предложена следующая модель динамических потоков в сетях с обобщенным законом Кирхгофа. Пусть  $G = \{V, E\}$  — ориентированный граф. Здесь

$V$  — множество вершин,  $E$  — множество дуг, т.е. ориентированных ребер. Для каждой вершины  $v \in V$  обозначим

$$N^+(v) = \{u \in V: (u, v) \in E\},$$

$$N^-(v) = \{u \in V: (u, v) \in E\}.$$

Множество  $N^+(v)$  описывает все вершины, из которых выходят дуги, входящие в вершину  $v$ , а множество  $N^-(v)$  — все вершины, в которые входят дуги, исходящие из вершины  $v$ .

Поставим задачу: найти функции  $x_{ji}(t)$ ,  $t \in [0, \infty]$ , удовлетворяющие условиям

$$\sum_{j \in N^+(i)} \alpha_{ji} x_{ji}(t - \tau_{ji}) - \sum_{k \in N^-(i)} x_{ik}(t) \in A_i(t), \quad i \in V, \quad (1)$$

$$x_{ji}(t) \in B_{ji}, \quad (i, j) \in E. \quad (2)$$

Здесь  $A_i(t)$ ,  $B_{ji}$  — заданные отрезки,  $\alpha_{ji}$  — положительные коэффициенты, которые при  $\alpha_{ji} \leq 1$  можно интерпретировать как коэффициенты потерь при прохождении потоком  $x_{ji}$  дуги  $(j, i)$ . Время добегания  $\tau_{ji}$  назовем длиной дуги  $(j, i)$ . Ограничения (1) имеют запаздывающие аргументы. Поэтому будем считать функции  $A_i(t)$  известными на отрезке  $[-\theta, 0]$ , где  $\theta$  — величина, возникающая при выводе изложенных ниже результатов.

Условие (2) является ограничением на потоки, протекающие по дугам. На отрезки  $B_{ji}$  не наложено никаких дополнительных условий. Это означает, что поток  $x_{ji}$ , который технологически представляет собой расход, протекающий по дуге  $(j, i)$ , может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поток может формировать положительную или отрицательную волну относительно некоторого среднего уровня. Направление дуги в модели (1) определяется тем, что вытекающие из вершины  $i$  потоки (положительные или отрицательные) не имеют запаздывающего аргумента; потоки, входящие в вершину  $i$ , имеют запаздывающие аргументы (в общем случае запаздывание может равняться нулю и направление дуги выбирается с учетом дополнительных соображений). Условия (2), такие, как в [6], нетрудно свести к виду

$$x_{ji}(t) \in [0, \gamma_{ji}], \quad \gamma_{ji} > 0. \quad (3)$$

При отсутствии времени запаздывания ( $\tau_{ji} = 0$ ) нахождение  $x_{ji}(t)$  сводится к решению для каждого фиксированного  $t$  системы линейных неравенств (1), (3). Методы решения таких систем описаны во введении статьи.

В рассматриваемом случае поток  $x_{ji}$  выходит из вершины  $j$  с аргументом  $t$  ( $x_{ji}(t)$ ), а входит в вершину  $i$  с аргументом  $t - \tau_{ji}$  ( $x_{ji}(t - \tau_{ji})$ ). Поэтому для решения поставленной задачи следует преобразовать (1), (3) таким образом, чтобы искомые потоки входили с одним и тем же аргументом. Согласно [1, 7] это можно сделать в случае, когда граф  $G$  — дерево или он имеет один полуцикл.

В данной статье приведен полуцикл ориентированного подграфа, состоящий из двух путей.

#### СЛУЧАЙ РАВЕНСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ ЕДИНИЦЕ

Рассмотрим полуконтур ориентированного графа, состоящий из двух путей:  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 1). Оба пути начинаются в вершине 1 (исток) и заканчиваются в вершине  $m$  (сток). Первый путь задается вершинами  $P_1 = \{1, 21, 31, \dots, (k-1)1, k1, m\}$ , вто-

рой —  $P_2 = \{1, 22, 32, \dots, (l-1)2, l2, m\}$ . Длина дуг  $(1,21), (21,31), \dots, ((k-1)1, k1), (k1, m)$  для пути  $P_1$  равна соответственно  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}, \tau_k$ . Длина дуг  $(1,22), (22,32), \dots, ((l-1)2, l2), (l2, m)$  для пути  $P_2$  равна соответственно  $t_1, t_2, \dots, t_{l-1}, t_l$ . По этим дугам протекают потоки: для пути  $P_1$  — поток  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k$ , для пути  $P_2$  — поток  $y_1, y_2, \dots, y_{l-1}, y_l$ .

Условия (1), (3) перепишем в виде

$$-x_1(t) - y_1(t) + p_1(t) \in A_1(t),$$

$$x_1(t - \tau_1) - x_2(t) + p_2(t) \in A_{21}(t),$$

$$x_2(t - \tau_2) - x_3(t) + p_3(t) \in A_{31}(t),$$

...

$$x_{k-1}(t - \tau_{k-1}) - x_k(t) + p_k(t) \in A_{k1}(t), \quad (4)$$

$$y_1(t - t_1) - y_2(t) + q_2(t) \in A_{22}(t),$$

$$y_2(t - t_2) - y_3(t) + q_3(t) \in A_{32}(t),$$

...

$$y_{l-1}(t - t_{l-1}) - y_l(t) + q_l(t) \in A_{l2}(t),$$

$$x_i(t) \in [0, \gamma_i^1], \quad y_j(t) \in [0, \gamma_j^2], \quad \gamma_i^1 > 0, \quad \gamma_j^2 > 0, \quad i=1, \dots, k, \quad j=1, \dots, l. \quad (5)$$

Здесь  $A_1(t), A_{i1}(t), A_{j2}(t), A_m(t)$  — отрезки, задающие ограничения вида (1), которые соответствуют вершинам путей  $P_1$  и  $P_2$ , а  $\gamma_i^1$  и  $\gamma_j^2$  — ограничения вида (3) для соответствующих потоков. Функции  $p_i(t)$  и  $q_i(t)$  описывают потоки (кроме потоков  $x_i(t)$  и  $y_j(t)$ ), которые входят или выходят из соответствующих вершин.

Сформулируем основное предположение, при котором полуконтур, состоящий из путей  $P_1$  и  $P_2$ , можно заменить ориентированной звездой:

$$\sum_{i=1}^k \tau_i = \sum_{j=1}^l t_j = \theta.$$

Очевидно, что длины путей  $P_1$  и  $P_2$  совпадают. Это предположение аналогично предположениям, при которых возможно исключение группы неизвестных потоков [1]. В случае их невыполнения для нахождения неизвестных потоков придется переходить к локально-конечным, но бесконечным графам (см. [1]).

Из (4) получаем

$$u_1(t) = -x_1(t) - y_1(t) \in A_1(t) - p_1(t),$$

$$v_1(t) = x_1(t) - x_2(t + \tau_1) \in A_{21}(t + \tau_1) - p_2(t + \tau_1),$$

$$v_2(t) = x_2(t + \tau_1) - x_3(t + \tau_1 + \tau_2) \in A_{31}(t + \tau_1 + \tau_2) - p_3(t + \tau_1 + \tau_2),$$

...

$$v_{k-1}(t) = x_{k-1}(t + \tau_1 + \dots + \tau_{k-2}) - x_k(t + \tau_1 + \dots + \tau_{k-1}) \in$$

$$\in A_{k1}(t + \tau_1 + \dots + \tau_{k-1}) - p_k(t + \tau_1 + \dots + \tau_{k-1}), \quad (6)$$

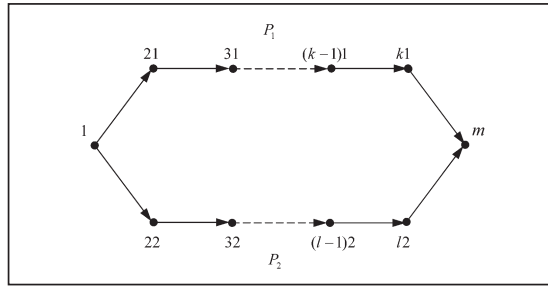


Рис. 1. Схема путей  $P_1$  и  $P_2$  из источника 1 к стоку  $m$

$$\begin{aligned}
w_1(t) &= y_1(t) - y_2(t+t_1) \in A_{22}(t+t_1) - q_2(t+t_1), \\
w_2(t) &= y_2(t+t_1) - y_3(t+t_1+t_2) \in A_{32}(t+t_1+t_2) - q_3(t+t_1+t_2), \\
&\dots \\
w_{l-1}(t) &= y_{l-1}(t+t_1+\dots+t_{l-2}) - y_l(t+t_1+\dots+t_{l-1}) \in \\
&\in A_{l2}(t+t_1+\dots+t_{l-1}) - q_l(t+t_1+\dots+t_{l-1}), \\
u_2(t) &= x_k(t+\tau_1+\dots+\tau_{k-1}) + y_l(t+t_1+\dots+t_{l-1}) \in A_m(t+\theta) - q_m(\theta).
\end{aligned}$$

Таким образом, введены новые потоки  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $v_i(t)$ ,  $w_j(t)$ ,  $i=1, \dots, k-1$ ,  $j=1, \dots, l-1$ . Вводим новую вершину 0 и считаем, что новые потоки протекают по дугам

$$(1, 0), (0, 21), (0, 31), \dots, (0, k1), (0, 22), (0, 32), \dots, (0, l2), (0, m). \quad (7)$$

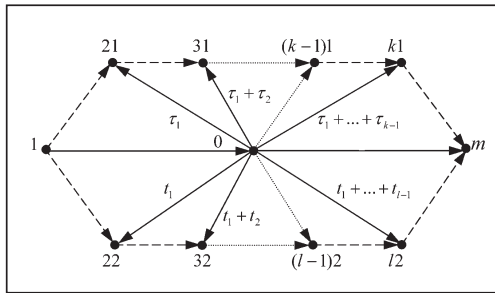


Рис. 2. Схема ориентированной звезды

Прежние дуги, по которым протекали потоки  $x_i(t)$  и  $y_j(t)$ , исключаем. Получаем вместо двух путей ориентированную звезду (рис. 2).

Отметим, что если при фиксированном  $t$  известны потоки  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $v_i$ ,  $w_j$ , то из формул (6) можно определить потоки  $x_i$ ,  $y_j$  в указанные в (6) моменты времени.

Опишем ограничения на новые потоки. Из определения новых потоков следует

$$u_1(t) + \sum_{i=1}^{k-1} v_i(t) + \sum_{j=1}^{l-1} w_j(t) + u_2(t) = 0. \quad (8)$$

Равенство (8) является ограничением в вершине 0.

Пользуясь новыми потоками, перепишем включения (6) в виде

$$\begin{aligned}
u_1(t) + p_1(t) &\in A_1(t); \\
v_1(t - \tau_1) + p_2(t) &\in A_{21}(t), \\
v_2(t - \tau_1 - \tau_2) + p_3(t) &\in A_{31}(t), \\
&\dots \\
v_{k-1}(t - \tau_1 - \dots - \tau_{k-1}) + p_k(t) &\in A_{k1}(t); \\
w_1(t - t_1) + q_2(t) &\in A_{22}(t), \\
w_2(t - t_1 - t_2) + q_3(t) &\in A_{32}(t), \\
&\dots \\
w_{l-1}(t - t_1 - \dots - t_{l-1}) + q_l(t) &\in A_{l2}(t); \\
u_2(t - \theta) + q_m(t) &\in A_m(t).
\end{aligned} \quad (9)$$

Включения (9) и равенство (8) описывают ограничения на потоки, протекающие по дугам, указанным в (7). Данные дуги образуют подграф в виде направленной звезды. Длины дуг, описанных в (7), равны соответственно

$$0, \tau_1, \tau_1 + \tau_2, \dots, \tau_1 + \dots + \tau_{k-1}, t, t_1 + t_2, \dots, t_1 + \dots + t_{l-1}, \theta.$$

Согласно ограничениям (1) потоки, входящие в вершину, могут иметь запаздывающие аргументы; потоки, выходящие из вершины, не имеют запаздывающих аргументов. Ребро (1, 0) не имеет длины, поэтому его можно ориентировать в разные направления. Но поскольку предполагается, что вершина 1 является источником, то считаем, что поток  $u_1(t)$  протекает из вершины 1 в вершину 0. Все остальные потоки вытекают из вершины 0.

Остановимся на ограничениях (5). Будем считать, что потоки в системе (9) проходят по дугам представленной выше звезды. Опишем такие ограничения на каждый новый поток, чтобы из решения системы (9) следовало решение системы (1), (3). Согласно работе [6] для этого достаточно наложить ограничения

$$u_1(t) \in \frac{1}{k}[-\gamma, \gamma], \quad u_2(t) \in \frac{1}{k}[-\gamma, \gamma], \quad v_i(t) \in \frac{1}{k}[-\gamma, \gamma], \quad w_j(t) \in \frac{1}{k}[-\gamma, \gamma], \quad (10)$$

$$i=1, \dots, k-1, \quad j=1, \dots, l-1.$$

Здесь  $\gamma = \min_{i=1, \dots, k} \min_{j=1, \dots, l} \{\gamma_i^1, \gamma_j^2\}$ ,  $k = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  ( $[x]$  — целая часть числа  $x$ ),  $n = k + l$ .

Отметим [6], что если  $n = 3$ ,  $k = 2$ ,  $l = 1$  и  $\gamma_i^1 = \gamma_1^2 = \gamma$ , то система (9) с ограничениями (10) эквивалентна исходной системе (1), (3), т.е. если система (1), (3) имеет решение, то и система (9), (10) имеет решение.

#### СЛУЧАЙ ПРОИЗВОЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рассмотрим случай наличия коэффициентов  $\alpha_{ji}$ . Тогда (4) переписывается в виде

$$\begin{aligned} -x_1(t) - y_1(t) + p_1(t) &\in A_1(t), \\ \alpha_1 x_1(t - \tau_1) - x_2(t) + p_2(t) &\in A_{21}(t), \\ \alpha_2 x_2(t - \tau_2) - x_3(t) + p_3(t) &\in A_{31}(t), \\ &\dots \\ \alpha_{k-1} x_{k-1}(t - \tau_{k-1}) - x_k(t) + p_k(t) &\in A_{k1}(t), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 y_1(t - t_1) - y_2(t) + q_2(t) &\in A_{22}(t), \\ \beta_2 y_2(t - t_2) - y_3(t) + q_3(t) &\in A_{32}(t), \\ &\dots \\ \beta_{l-1} y_{l-1}(t - t_{l-1}) - y_l(t) + q_l(t) &\in A_{l2}(t), \\ \alpha_k x_k(t - \tau_k) + y_l(t - t_l) + q_m(t) &\in A_m(t). \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -x_1(t) - y_1(t), \\ v_1(t) &= \alpha_1 x_1(t) - x_2(t + \tau_1), \\ v_2(t) &= \alpha_2 x_2(t + \tau_1) - x_3(t + \tau_1 + \tau_2), \\ &\dots \\ v_{k-1}(t) &= \alpha_{k-1} x_{k-1}(t + \tau_1 + \dots + \tau_{k-2}) - x_k(t + \tau_1 + \dots + \tau_{k-1}), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} w_1(t) &= \beta_1 y_1(t) - y_2(t + t_1), \\ w_2(t) &= \beta_2 y_2(t + t_1) - y_3(t + t_1 + t_2), \\ &\dots \end{aligned}$$

$$w_{l-1}(t) = \beta_{l-1} y_{l-1}(t + t_1 + \dots + t_{l-2}) - y_l(t + t_1 + \dots + t_{l-1}),$$

$$u_2(t) = \alpha_k x_k(t + \tau_1 + \dots + \tau_{k-1}) + \beta_l y_l(t + t_1 + \dots + t_{l-1}).$$

Из определений (12) видно, что новые потоки не удовлетворяют простому ограничению вида (8). Будем предполагать, что  $\alpha_i < 1$ ,  $\beta_j < 1$ . Этот случай описывает потери при прохождении потоками соответствующих дуг.

Воспользуемся методами работы [6]. Тогда получим, что исходная система (1), (3) будет следствием системы (9), если в вершине 0 положить ограничения

$$\Delta \gamma \leq u_1(t) + \sum_{i=1}^{k-1} v_i(t) + \sum_{j=1}^{l-1} w_j(t) + u_2(t) \leq 0, \quad (13)$$

$$\Delta \gamma \leq u_1(t) \leq 0, \quad \Delta \gamma \leq u_2(t) \leq 0, \quad \Delta \gamma \leq v_i(t) \leq 0, \quad \Delta \gamma \leq w_j(t) \leq 0, \quad (14)$$

$$i = 1, \dots, k-1, \quad j = 1, \dots, l-1, \quad \text{где } \Delta = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \beta_1 \beta_2 \dots \beta_l - 1.$$

Таким образом, если для каждого  $t$  решена система (9), (13), (14), то и исходная система (1), (3) имеет решение, а по известным  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $v_i$ ,  $w_j$  находятся, следуя формуле (12), неизвестные  $x_i$ ,  $y_j$  в указанные в (12) моменты времени.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя методы работы [6], можно исследовать случай, когда коэффициенты  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$  могут принимать произвольные значения, а не только меньшие единицы. (Однако авторам неизвестны технологические модели, соответствующие этим случаям.)

Модель (1), (2) может найти применение при описании процесса транспорта воды в оросительных системах или газа в магистральных трубопроводах. Потоки  $x_{ji}$  представляют собой расходы продуктов, движущиеся по каналам или трубопроводам, а отрезки  $A_i$  описывают ограничения на уровень воды в каналах или давление газа в трубопроводах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Остапенко В.В., Скопецкий В.В., Фінін Г.С. Розподіл ресурсів у просторі та часі. — Київ: Наук. думка, 2003. — 323 с.
2. Остапенко В.В., Финин Г.С. Моделирование движения воды обобщенным законом Кирхгофа // Проблемы управления и информатики. — 1999. — № 4. — С. 86–90.
3. Остапенко В.В., Павлыгин А.И. Линейные неравенства для обобщенного закона Кирхгофа // Кибернетика и системный анализ. — 1997. — № 3. — С. 130–148.
4. Финин Г.С. Метод исключения группы неизвестных потоков в сетях с обобщенным законом Кирхгофа // Там же. — 1999. — № 6. — С. 154–159.
5. Черников С.Н. Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968. — 488 с.
6. Клименко В.М., Остапенко В.В., Остапенко О.С. Метод розв'язання систем лінійних нерівностей на графі шляхом зміни його структури // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2004. — № 6. — С. 135–142.
7. Остапенко В.В., Павлыгин А.И. Динамические потоки в сетях для обобщенного закона Кирхгофа // Кибернетика и системный анализ. — 1966. — № 3. — С. 96–102.
8. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990. — 384 с.

*Поступила 14.10.2010*