

ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА В КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМАХ С СИНГУЛЯРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТЬЮ

Ключевые слова: система автономных обыкновенных дифференциальных уравнений, гомоклиническая орбита, гетероклиническая орбита, хаотический аттрактор.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большинство известных результатов, посвященных хаотической динамике в автономных 3-D системах дифференциальных уравнений, основано на предположении о существовании в этих системах гомоклинических или гетероклинических орбит и использовании теорем Шильникова (см. работы [1–3] и ссылки в них).

Заметим, что в указанных работах предполагалось, что матрица Якоби в особой точке, связывающей гомоклиническую орбиту, — невырождена. Первый результат, в котором данное условие игнорировалось (матрица Якоби предполагалась сингулярной), был представлен в [4]. Однако никаких условий, гарантирующих существование гомоклинической орбиты, в этой работе приведено не было (ее наличие просто постулировалось).

Ниже рассмотрены конструктивные условия существования гомоклинических и гетероклинических орбит для достаточно общих квадратичных систем с сингулярной линейной частью, а также примеры новых хаотических аттракторов.

Обозначим \mathbb{R}^n действительное линейное пространство размерности n . Пусть $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — неизвестный вектор, координаты которого являются функциями времени t ; $A = (a_{ij}), B_1, \dots, B_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — действительные матрицы, причем матрицы $B_1 = (b_{ij}^{(1)}), \dots, B_n = (b_{ij}^{(n)})$ предполагаются симметрическими: $b_{ij}^{(k)} = b_{ji}^{(k)}$; $i, j, k = \overline{1, n}$.

Рассмотрим автономную систему обыкновенных квадратичных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j(t) + \mathbf{x}^T(t) B_1 \mathbf{x}(t) \equiv f_1(\mathbf{x}(t)), \\ \dots, \dots, \dots, \\ \dot{x}_n(t) = \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j(t) + \mathbf{x}^T(t) B_n \mathbf{x}(t) \equiv f_n(\mathbf{x}(t)) \end{cases} \quad (1)$$

порядка n с вектором начальных значений $\mathbf{x}^T(0) = (x_{10}, \dots, x_{n0})$. Предположим, что $Q \subset \mathbb{R}^n$ является компактным (замкнутым и ограниченным) множеством, содержащим начало координат. Обозначим $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ решение (траекторию, орбиту) системы (1), удовлетворяющую начальному условию $\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. Расстояние между любым вектором \mathbf{x}_k и множеством Q определим формулой $d(\mathbf{x}_k, Q) = \inf_{\mathbf{x} \in Q} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|$.

Определение 1 [1, 2]. Если существует компактное множество $Q \subset \mathbb{R}^n$ такое, что

$$\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad \lim_{t \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), Q) = 0,$$

то Q называется глобальным аттрактором системы (1). Если для множества $P \subset \mathbb{R}^n$ и $\forall t \geq 0$ выполняется условие

$$\forall \mathbf{x}_0 \in P \subset \mathbb{R}^n \quad \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \in P,$$

то P называется положительным инвариантным множеством системы (1).

Определение 2 [1, 2]. Замкнутая траектория $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ системы (1) называется гомоклинической орбитой, если эта траектория сходится к одному и тому же положению равновесия при $t \rightarrow \pm\infty$.

Пусть $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$ является положением равновесия системы (1). Обозначим

$$D(\mathbf{x}_e) = \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right) (\mathbf{x}_e) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

матрицу Якоби вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))^T$ в положении равновесия \mathbf{x}_e ; $i, j = \overline{1, n}$.

Теорема 1 (гомоклиническая теорема Шильникова) [1, 2]. Предположим, что $n = 3$, и пусть $\alpha, \beta \pm i\gamma$ — собственные числа матрицы $D(\mathbf{x}_e)$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot \beta < 0$ и $\gamma \neq 0$ (положение равновесия является седло-фокусом). Предположим также, что выполнены следующие условия:

- $|\alpha| > |\beta|$;
- существует гомоклиническая орбита, связывающая точку \mathbf{x}_e .

Тогда:

— в некоторой окрестности гомоклинической орбиты существует счетное число подков Смейла, определяющих дискретную динамику системы (1);

— для любого достаточно малого C^1 -возмущения $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_n(\mathbf{x}))^T$

функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в системе (1) возмущенная система $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ имеет по крайней мере конечное число подков Смейла, определяющих дискретную динамику вблизи гомоклинической орбиты;

— исходная система (1) и возмущенная система $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ имеют один и тот же тип хаоса, порожденного подковами Смейла.

Пусть \mathbf{x}_{e_1} и \mathbf{x}_{e_2} — два положения равновесия системы (1).

Определение 3 [1, 2]. Замкнутая траектория $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ системы (1) называется гетероклинической орбитой, если для любой точки \mathbf{x}_0 , принадлежащей этой траектории, либо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_{e_2}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_{e_1},$$

либо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_{e_1}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_{e_2}.$$

Теорема 2 (гетероклиническая теорема Шильникова) [1, 2]. Предположим, что $n=3$, и пусть $\alpha_k, \beta_k \pm i\gamma_k$ являются собственными числами матрицы $D(\mathbf{x}_{e_k})$, $\gamma_k \neq 0$, где $k=1, 2$ и оба положения равновесия \mathbf{x}_{e_1} и \mathbf{x}_{e_2} предполагаются седло-фокусами. Пусть также выполнены следующие условия:

- $|\alpha_k| > |\beta_k|$, $k=1, 2$;
- $\alpha_1\alpha_2 > 0$ и $\beta_1\beta_2 > 0$;
- существует гетероклиническая орбита, связывающая точки \mathbf{x}_{e_1} и \mathbf{x}_{e_2} .

Тогда:

— в некоторой окрестности гетероклинической орбиты существует счетное число подков Смейла, определяющих дискретную динамику системы (1);

— для любого достаточно малого C^1 -возмущения $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_n(\mathbf{x}))^T$ функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в системе (1) возмущенная система $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ имеет по крайней мере конечное число подков Смейла, определяющих дискретную динамику вблизи гетероклинической орбиты;

— исходная система (1) и возмущенная система $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ имеют один и тот же тип хаоса, порожденного подковами Смейла.

Устойчивое и неустойчивое многообразия $\mathbb{W}^s(\mathbf{e}_0)$ и $\mathbb{W}^u(\mathbf{e}_0)$ [5, 6] для некоторого положения равновесия \mathbf{e}_0 системы (1) могут быть определены как

$$\mathbb{W}^s(\mathbf{e}_0) := \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{e}_0\},$$

$$\mathbb{W}^u(\mathbf{e}_0) := \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{e}_0\}.$$

Теорема об устойчивом и неустойчивом многообразиях [5, 6] утверждает, что локально неустойчивое многообразие $\mathbb{W}_{\text{loc}}^u(\mathbf{e}_0)$ существует в некоторой окрестности точки \mathbf{e}_0 . Кроме того, $\mathbb{W}_{\text{loc}}^u(\mathbf{e}_0)$ является гладким многообразием, касающимся неустойчивого инвариантного подпространства $\mathbb{E}^u(\mathbf{e}_0)$ матрицы $D(\mathbf{e}_0)$ в точке \mathbf{e}_0 ($D \cdot \mathbb{E}^u \subset \mathbb{E}^u$). Это означает, что глобальное неустойчивое многообразие можно определить следующим образом:

$$\mathbb{W}^u(\mathbf{e}_0) := \bigcup_{t>0} \varphi^t(\mathbb{W}_{\text{loc}}^u(\mathbf{e}_0)),$$

где φ^t — поток системы (1). Известно [6], что $\mathbb{W}^u(\mathbf{e}_0)$ является l -мерным многообразием (l — количество собственных чисел матрицы $D(\mathbf{e}_0)$ с положительной действительной частью), определенным как глобализация $\mathbb{W}_{\text{loc}}^u(\mathbf{e}_0)$ под действием потока φ^t . Заметим, что локально устойчивое многообразие $\mathbb{W}_{\text{loc}}^s(\mathbf{e}_0)$ и устойчивое многообразие $\mathbb{W}^s(\mathbf{e}_0)$ определяются подобным образом после операции замены знака времени $t \rightarrow -t$, а именно:

$$\mathbb{W}^s(\mathbf{e}_0) := \bigcup_{t<0} \varphi^t(\mathbb{W}_{\text{loc}}^s(\mathbf{e}_0)).$$

Будем считать, что $\mathbf{e}_0 = 0$. Обозначим $\mathbb{T}_s, \mathbb{T}_u$ и \mathbb{T}_c инвариантные относительно оператора \mathbf{A} подпространства в \mathbb{R}^n такие, что спектр ограничения $\mathbf{A}|_{\mathbb{T}_s}$ состоит из собственных чисел с отрицательными вещественными частями, огра-

ничения $\mathbf{A}|_{\mathbb{T}_u}$ — из собственных чисел с положительными вещественными частями и ограничения $\mathbf{A}|_{\mathbb{T}_c}$ — из нулевых и чисто мнимых собственных чисел.

Теорема 3 (Адамара–Перрона) [6]. Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ есть C^r -гладкое векторное поле с гиперболической особой точкой 0 и линейной частью $A\mathbf{x}$ в нуле. Тогда система (1) имеет два C^r -гладких инвариантных относительно потока φ^t многообразия $\mathbb{W}^s(0)$ и $\mathbb{W}^u(0)$, проходящих через нуль и касающихся в нуле пространств \mathbb{T}_s и \mathbb{T}_u соответственно. Решения с начальными условиями на $\mathbb{W}^s(0)$ ($\mathbb{W}^u(0)$) экспоненциально стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$).

Теорема 4 (о центральном многообразии) [6]. Если в условиях теоремы 3 подпространство $\mathbb{T}_c \neq 0$, то система (1) имеет третье C^{r-1} -гладкое инвариантное многообразие $\mathbb{W}^c(0)$, проходящее через нуль и касающееся в нуле подпространства \mathbb{T}_c .

ТРЕУГОЛЬНАЯ ФОРМА КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим однородную систему квадратичных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \mathbf{x}^T(t)B_1\mathbf{x}(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dot{x}_n(t) = \mathbf{x}^T(t)B_n\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (2)$$

с вектором начальных данных $\mathbf{x}^T(0)$.

Заметим, что в системе (2) любая квадратичная форма может быть единственным образом представлена в виде суммы

$$\mathbf{x}^T B_{i+1} \mathbf{x} = U_{1,i+1}(x_1, \dots, x_i) + U_{2,i+1}(x_1, \dots, x_n),$$

где $U_{1,i+1}(x_1, \dots, x_i) = (x_1, \dots, x_i, 0, \dots, 0)B_{i+1}(x_1, \dots, x_i, 0, \dots, 0)^T$, $U_{2,i+1}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T B_{i+1} \mathbf{x} - U_{1,i+1}$ — квадратичные формы, зависящие от i и n переменных, и $U_{11}(x_0) \equiv 0$, $U_{21}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T B_1 \mathbf{x}$; $i = \overline{1, n-1}$.

Введем в систему (2) новую переменную $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ по формуле $\mathbf{x}(t) = S\mathbf{y}(t)$, где $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — невырожденная матрица. Тогда получим систему

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} (S\mathbf{y}(t))^T B_1(S\mathbf{y}(t)) \\ \vdots \\ (S\mathbf{y}(t))^T B_n(S\mathbf{y}(t)) \end{pmatrix} \quad (3)$$

с вектором начальных данных $\mathbf{y}(0) = S^{-1}\mathbf{x}(0)$.

Предположим, что найдется обратимая матрица S такая, что в переменных y_1, \dots, y_n система (3) примет вид

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} = \mathbf{W}(\mathbf{y}(t)) = \begin{pmatrix} U_{21}(y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ \vdots \\ U_{2n}(y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Определение 4. Система (4) называется треугольной. Напрмер, если $n=2$, то (4) имеет форму

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = a_{11}y_1^2 + 2a_{12}y_1y_2 + a_{22}y_2^2, \\ \dot{y}_2(t) = \phantom{a_{11}y_1^2 + 2} 2b_{12}y_1y_2 + b_{22}y_2^2; \end{cases} \quad (5)$$

если $n=3$, то (4) имеет такую форму

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = a_{11}y_1^2 + 2a_{12}y_1y_2 + a_{22}y_2^2 + 2a_{13}y_1y_3 + 2a_{23}y_2y_3 + a_{33}y_3^2, \\ \dot{y}_2(t) = 2b_{12}y_1y_2 + b_{22}y_2^2 + 2b_{13}y_1y_3 + 2b_{23}y_2y_3 + b_{33}y_3^2, \\ \dot{y}_3(t) = 2c_{13}y_1y_3 + 2c_{23}y_2y_3 + c_{33}y_3^2. \end{cases}$$

Формально вычислим все первые производные по времени для функций $z_1 = y_1 / y_n, \dots, z_{n-1} = y_{n-1} / y_n$, определенных в силу системы (4). Тогда получим

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t) \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{y}_1 y_n - y_1 \dot{y}_n}{y_n^2} \equiv G_1(z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)) y_n(t) \\ \dots \\ \frac{\dot{y}_{n-1} y_n - y_{n-1} \dot{y}_n}{y_n^2} \equiv G_{n-1}(z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)) y_n(t) \\ G_n(z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)) y_n^2(t) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $G_i(z_1, \dots, z_{n-1})$ — неоднородные квадратичные функции и $G_n(z_1, \dots, z_{n-1})$ — неоднородная линейная функция переменных z_1, \dots, z_{n-1} ; $i=1, n-1$.

Введем линейную функцию z относительно переменных z_1, \dots, z_{n-1} по формуле

$$z = 2c_{1n}z_1 + \dots + 2c_{n-1,n}z_{n-1}.$$

С учетом (6) построим квадратичную функцию

$$G(z_1, \dots, z_{n-1}) \equiv 2c_{1n}G_1(z_1, \dots, z_{n-1}) + \dots + 2c_{n-1,n}G_{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1})$$

и квадратичную форму

$$h_{n-1}(\mathbf{y}) = y_n^2 G(z_1, \dots, z_{n-1}).$$

Обозначим Υ_i линейное подпространство в \mathbb{R}^n размерности i , порожденное всеми векторами $\mathbf{y}_i = (y_1, \dots, y_i, 0, \dots, 0)^T$, $i = \overline{1, n}$. Построим цепочку включений $0 = \Upsilon_0 \subset \Upsilon_1 \subset \dots \subset \Upsilon_{n-1} \subset \Upsilon_n = \mathbb{R}^n$. Обозначим $\mathbf{W}_i = \mathbf{W}|_{\Upsilon_i}$ ограничение оператора \mathbf{W} на подпространство Υ_i . Легко проверить, что $\mathbf{W}(\Upsilon_i) = \Upsilon_i$, $i = \overline{1, n}$.

Введем треугольные системы

$$\dot{\mathbf{y}}_i(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} = \mathbf{W}_i(\mathbf{y}_i(t)) = \begin{pmatrix} U_{21}(y_1(t), \dots, y_i(t), 0, \dots, 0) \\ \vdots \\ U_{2i}(y_1(t), \dots, y_i(t), 0, \dots, 0) \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

(Очевидно, что при $i=n$ система (7) совпадает с системой (4).)

По аналогии с системой (4) введем формы $h_{i-1}(\mathbf{y}_i)$ для систем (7), $i = \overline{2, n}$. (Здесь $h_{n-1}(\mathbf{y}_n) \equiv h_{n-1}(\mathbf{y}_n)$.)

Теорема 5 [1]. Пусть $n > 1$. Предположим, что для треугольной системы (4) $y_{n0} \neq 0$ и существуют условия:

- $\forall i \in \{2, n\}$ квадратичная форма $h_{i-1}(\mathbf{y}_i)$ отрицательно определена;
- для системы (5) имеет место неравенство $a_{11}(a_{11} - 2b_{12}) < 0$.

Тогда любая траектория $\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0)$ системы (4) является гомоклинической орбитой и положение равновесия 0 представляет собой единственный глобальный аттрактор этой системы.

Предположим, что существует обратимое линейное преобразование $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, сводящее систему (2) к системе (4). Применяя преобразование S к системе (1), будем иметь

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} = D\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} U_{21}(y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ \vdots \\ U_{2n}(y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $D = S^{-1}AS$ и $\mathbf{y}(0) = S^{-1}\mathbf{x}(0)$.

Теорема 6 [1]. Пусть $n > 1$. Предположим, что для треугольной системы (4) выполнены оба условия теоремы 5. Если одномерное пространство \mathbb{Y}_1 не является собственным вектором матрицы D , то для любых начальных данных все решения системы (8) ограничены.

Теорема 7. В условиях теоремы 6 среди всех решений системы (8) присутствуют либо предельные циклы, либо гомоклинические или гетероклинические орбиты, либо траектории всех указанных типов одновременно.

Доказательство. Легко проверить, что если для системы (4) выполнены условия теоремы 5, то эти же условия выполняются и при замене знака времени $t \rightarrow -t$. Предположим, что все положения равновесия в системе (8) являются только устойчивыми или только неустойчивыми. Тогда из теоремы 6 вытекает, что в силу ограниченности всех решений системы (8) в ней должны присутствовать предельные циклы (если система имеет только неустойчивые положения равновесия) или все решения являются абсолютно устойчивыми (если система имеет только устойчивые положения равновесия). Если в системе (8) присутствуют и устойчивые, и неустойчивые точки покоя, то наряду с предельными циклами в ней могут присутствовать либо гомоклинические или гетероклинические орбиты, либо траектории обоих типов одновременно.

Пусть $n = 3$. Напомним, что система (8) имеет только четное число ($p \geq 2$) положений равновесия [7].

1. Предположим теперь, что $p = 2$ и система (8) имеет одно положение равновесия (точка 0) седлового типа и одно неустойчивое (устойчивое) положение равновесия \mathbf{e}_1 . Обозначим $\mathbb{W}^u(0)$ и $\mathbb{W}^s(0)$ одномерное неустойчивое и двумерное устойчивое многообразия точки 0. Пусть ненулевой вектор начальных условий $\mathbf{y}(0) \in \mathbb{W}^u(0)$. Тогда траектория, начавшаяся из $\mathbf{y}(0)$, при $t \rightarrow \infty$ не может приблизиться к точке \mathbf{e}_1 и в силу теоремы 6 должна вернуться к точке 0 по устойчивому многообразию $\mathbb{W}^s(0)$ (см. теорему 3). Если точка \mathbf{e}_1 устойчива, то переходя к обратному времени $t \rightarrow -t$ и выбирая начальный вектор $\mathbf{y}(0) \in \mathbb{W}^s(0)$, получим, что траектория при $t \rightarrow -\infty$ не может приблизиться к точке \mathbf{e}_1 и должна вернуться в точку 0 по неустойчивому многообразию $\mathbb{W}^u(0)$ (см. теорему 3). Это подтверждает существование гомоклинической орбиты, связывающей точку 0.

2. Пусть $p = 4$ и система (8) имеет одно положение равновесия седлового типа (точка 0), два устойчивых положения равновесия (точки \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2) и одно неустойчивое положение равновесия (точка \mathbf{e}_3). Без потери общности можно считать, что многообразие $\mathbb{W}^u(0)$ — двумерно. Тогда все траектории, выходящие из любой окрестности точки 0 вдоль многообразия $\mathbb{W}^u(0)$, должны в силу их ограниченности завершиться в точке \mathbf{e}_1 или в точке \mathbf{e}_2 ; либо часть траекторий завершится в одной точке, а часть — в другой (ни одна из траекторий не притягивается к точке \mathbf{e}_3). Это означает, что многообразие $\mathbb{W}^u(0)$ должно образовывать за-

мкнутую двумерную поверхность, являющуюся границей некоторой области $V \subset \mathbb{R}^3$. Но в таком случае одномерное устойчивое многообразие $W^s(0)$ «протыкает» эту поверхность в точке 0 и потому должна существовать траектория $O \subset W^u(0) \cap W^s(0)$, не притягивающаяся к точкам e_1 или e_2 и завершающаяся в точке 0 (не все траектории, начавшиеся на многообразии $W^u(0)$, притягиваются к точкам e_1 или e_2). Ясно, что траектория O и будет гомоклинической орбитой.

3. Пусть $p=2$ и система (8) имеет два положения равновесия седлового типа — точки 0 и e_1 , причем точка 0 имеет двумерное неустойчивое многообразие $W^u(0)$, а точка e_1 — двумерное устойчивое многообразие $W^s(e_1)$. Тогда среди решений системы (8) присутствует гетероклиническая орбита, связывающая точки 0 и e_1 . Если точка e_1 имеет одномерное устойчивое многообразие $W^s(e_1)$, то в системе (8) присутствует гомоклиническая орбита, связывающая точку 0 (поверхность $W^u(0)$ является замкнутой: см. доказательство, п. 2). Обобщение на произвольное четное p не составляет труда. ■

СЛУЧАЙ ВЫРОЖДЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ В СИСТЕМЕ (1)

Пусть $n=3$. Положим для простоты $y_1 = x, y_2 = y, y_3 = z$. Предположим, что с учетом этих обозначений система (8) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 \\ 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 \\ 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + c_{33}z^2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \rho \pm i\omega, i = \sqrt{-1}$, — собственные числа матрицы D и $\rho \cdot \omega \neq 0$.

Введем квадратичные формы

$$f(x, y) = b_{12}(a_{11} - 2b_{12})x^2 + b_{12}(2a_{12} - b_{22})xy + b_{12}a_{22}y^2,$$

а также

$$\begin{aligned} g(x, y, z) = & c_{13}(a_{11} - 2c_{13})x^2 + 2(c_{13}a_{12} + c_{23}b_{12} - 2c_{13}c_{23})xy + \\ & +(c_{13}a_{22} + c_{23}b_{22} - 2c_{23}^2)y^2 + (2c_{13}a_{13} + 2c_{23}b_{13} - c_{13}c_{33})xz + \\ & +(2c_{13}a_{23} + 2c_{23}b_{23} - c_{23}c_{33})yz + (c_{13}a_{33} + c_{23}b_{33})z^2. \end{aligned}$$

Теорема 8. Пусть для системы (9):

- 1) квадратичные формы $f(x, y)$ и $g(x, y, z)$ отрицательно определены;
- 2) $a_{11}(a_{11} - 2b_{12}) < 0$;
- 3) вектор $(\alpha, 0, 0)^T, \alpha \neq 0$, не является собственным вектором матрицы D ;
- 4) точка 0 является единственным положением равновесия системы (9).

Тогда существует единственная гомоклиническая орбита, связывающая точку 0; система (9) имеет хаос, порожденный подковами Смейла.

Доказательство. Заметим, что условия 1–3 теоремы 8 являются условиями теоремы 6, гарантирующими ограниченность решений системы (9). Кроме того, для системы (9) с вырожденной линейной частью число положений равновесия согласно условию 4 будет нечетным.

1. С помощью подходящих вещественных линейных преобразований приведем систему (9) к виду

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y) + p_{13}xz + p_{23}yz + p_{33}z^2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где для простоты мы оставили старые обозначения новых переменных x, y, z . (Заметим, что эти новые переменные всегда можно выбрать так, чтобы $p_{33} \neq 0$.)

Применим к системе (10) теорему 4. Тогда в малой окрестности точки 0 на центральном многообразии $W^c(0)$ уравнение для переменной z принимает вид $\dot{z}(t) = p_{33}z^2 + O(z^3)$. Решение этого уравнения для достаточно малых t таково:

$$z(t) = \frac{z_0}{1 - p_{33}z_0t} = z_0(1 + p_{33}z_0t + \dots) \sim z_0 \exp(p_{33}z_0t).$$

Пусть $\rho > 0$ и начальные условия в системе (10) заданы вектором $(0, 0, z_0)$, где $p_{33}z_0 < 0$ и величина $|z_0|$ достаточно мала. Тогда $z(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а решения $x(t), y(t)$ удаляются от начала координат (см. доказательство теоремы 7).

Заменим $t \rightarrow -t$. Тогда решение $z(t)$ удаляется от начала координат, а решения $x(t), y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Следовательно, в некоторой окрестности начала координат траектории системы (10) ведут себя аналогично траекториям вблизи седло-фокуса. Другими словами, существует окрестность начала координат, в которой система (10) гомеоморфна системе с той же квадратичной правой частью и матрицей линейной части

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & p_{33}z_0 \end{pmatrix}, \quad \rho > 0, \quad p_{33}z_0 < 0.$$

Если $\rho < 0$, то, выбирая z_0 так, чтобы $p_{33}z_0 > 0$, снова получим, что начало координат гомеоморфно седло-фокусу. Согласно теореме 6 все решения системы (9), а значит, и системы (10), ограничены. Следовательно, существует гомоклиническая орбита, связывающая точку 0 (см. доказательство теоремы 7).

2. Сделаем замену переменных в системе (10) по формулам $x = ax_1, y = by_1, z = cz_1$, где $|a| = |b| = |c| = 1$. В этом случае в системе (10) $\omega \rightarrow (a/b)\omega$ (или $\omega \rightarrow (b/a)\omega$, что для дальнейшего несущественно), $p_{33} \rightarrow c \cdot p_{33}$. Тогда условия возникновения хаотической динамики $p_{33}\rho < 0, p_{33}\omega > 0$ в системе (10), приведенные в [4], преобразуются в условия $c \cdot p_{33}\rho < 0, c(a/b) \cdot p_{33}\omega > 0$, которые выбором чисел a, b, c всегда могут быть сведены к условиям $p_{33}\rho < 0, p_{33}\omega > 0$. Это доказывает п. 2 и всю теорему 8. ■

ПРИМЕРЫ

1. Рассмотрим систему, содержащую хаотический аттрактор

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x - 16z - 3x^2 - xy + xz + y^2 - z^2, \\ \dot{y}(t) = -7xy + yz + 2.5y^2 - 2.5z^2, \\ \dot{z}(t) = 16x + 2z + z^2 - 7xz + 3yz. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь собственные числа матрицы Якоби в точке $(0,0,0)$: $\lambda_{1,2} = 2 \pm 16i$, $\lambda_3 = 0$. Начальные данные: $(0, -3, 0)$. Для системы (11) все условия теоремы 8 выполнены. Система имеет гомоклиническую орбиту, связывающую точку $(0, 0, 0)$.

На рис. 1 показан предельный цикл, также существующий в этой системе.

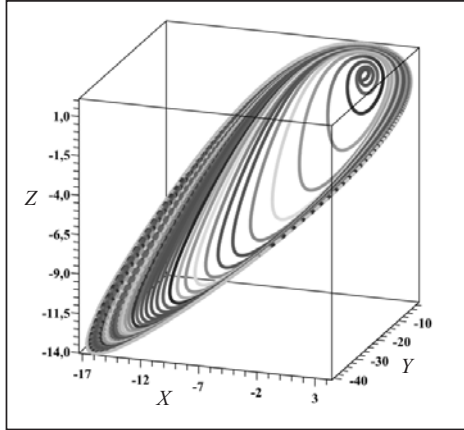


Рис. 1. Фазовый портрет системы (11)

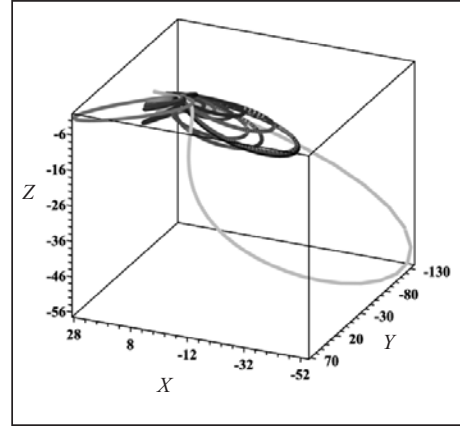


Рис. 2. Фазовый портрет системы (12)

2. Рассмотрим систему, содержащую хаотический аттрактор

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 20x - 10y + 9z - 3x^2 - xy + xz + y^2 - z^2, \\ \dot{y}(t) = 37x - 12y + 19z - 7xy + yz + 2.5y^2 - 2.5z^2, \\ \dot{z}(t) = z^2 - 7xz + 3yz. \end{cases} \quad (12)$$

Собственные числа матрицы Якоби в точке $(0,0,0)$: $\lambda_{1,2} = 4 \pm 10.677i$, $\lambda_3 = 0$, в положении равновесия $(4.8857, 12.8551, 0)$ $\lambda_{1,2} = -2.0468 \pm 12.9858i$, $\lambda_3 = 4.3654$ (еще одно устойчивое положение равновесия — точка $(5.7072, 12.7845, 1.5971)$). Начальные данные: $(0, 0, -0.1)$. Для системы (12) все условия теоремы 7 (см. доказательство, п. 3) выполнены. Система имеет одну гетероклиническую орбиту, связывающую точки $(0,0,0)$ и $(4.8857, 12.8551, 0)$. Эта гетероклиническая орбита и весь хаотический аттрактор располагаются ниже плоскости XOY . Этот аттрактор изображен на рис. 2.

Отметим, что в этом и последующем примерах гетероклиническая теорема Шильникова не выполняется. Также несправедлива и теорема 8.

3. Еще одна система с хаотическим аттрактором такова:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x + 10y + 2x^2 + 2xy + xz - y^2 + z^2, \\ \dot{y}(t) = -10x + 3y - x^2 + 2xy + yz + y^2 - z^2, \\ \dot{z}(t) = z^2 + 2xz + 3yz. \end{cases} \quad (13)$$

Она получена из системы типа (9) линейными преобразованиями координат x и y (квадратичная часть преобразованной системы удовлетворяет условиям теоре-

мы 7). Здесь собственные числа матрицы Якоби в точке $(0,0,0)$: $\lambda_{1,2} = 3 \pm 10i$, $\lambda_3 = 0$, в положении равновесия $(-6.5443, 6.7266, 0)$ $\lambda_{1,2} = -3.1797 \pm 15.1922i$, $\lambda_3 = 7.0912$ и в положении равновесия $(-0.7152, -0.3071, 2.3517)$ $\lambda_{1,2} = 4.7180 \pm \pm 10.7237i$, $\lambda_3 = -1.8651$. Имеется гетероклиническая орбита, связывающая точки $(0,0,0)$ и $(-6.5443, 6.7266, 0)$. Так же, как и в предыдущем случае, гетероклиническая орбита и весь хаотический аттрактор располагаются ниже плоскости XOY . Аттрактор представлен на рис. 3.

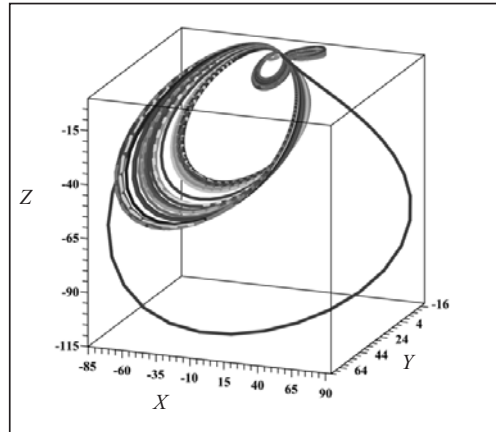


Рис. 3. Фазовый портрет системы (13)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдены новые условия существования гомоклинических орбит в квадратичных системах дифференциальных уравнений с сингулярной линейной связью. Эти условия совместно с известной теоремой Шильникова дают достаточные условия существования хаотической динамики в рассмотренных системах дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белозеров В.Е., Белозеров А.В. Гомоклинические и гетероклинические орбиты квадратичных систем дифференциальных уравнений // Вісн. ДНУ. Сер. «Моделювання». — 2010. — № 9, вип. 1. — С. 3–26.
2. Zhou T., Chen G. Classification of chaos in 3-D autonomous quadratic systems. 1. Basic framework and methods // Intern. J. Bifurcation and Chaos. — 2006. — 16, N 9. — P. 2459–2479.
3. Qi G., Chen G., van Wyk M.A., van Wyk B.J., Zhang Y. A four-wing chaotic attractor generated from a new 3-D quadratic autonomous system // Chaos, Solitons and Fractals. — 2008. — 38. — P. 705–721.
4. Chen B., Zhou T., Chen G. An extended Shilnikov homoclinic theorem and its applications // Intern. J. Bifurcation and Chaos. — 2009. — 19, N 5. — P. 1679–1693.
5. Kuznetsov Yu. A. Elements of applied bifurcation theory. — 2nd ed. — New-York: Springer-Verlag, 1998. — 328 p.
6. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. — М.: УРСС, 2004. — 320 с.
7. Белозеров В.Е., Волкова С.А. Геометрический подход к проблеме стабилизации систем управления. — Днепропетровск: Изд-во ДНУ, 2006. — 440 с.

Поступила 22.11.2010