

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ГЕОИНФОРМАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ О ДИНАМИКЕ ПРОЦЕССА ГЕОМИГРАЦИИ В УСЛОВИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ НЕЛОКАЛЬНОСТИ

Ключевые слова: математическое моделирование, неклассические модели, неравновесная геомиграция, системы дифференциальных уравнений дробного порядка, краевые задачи, приближенные решения.

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы математического моделирования геомиграционных процессов представляют значительный интерес, например, в связи с разработкой современных геотехнологий добычи полезных ископаемых или технических решений в области охраны подземных вод от загрязнений, являющихся результатом действия техногенных факторов человеческой деятельности [1, 2].

Отметим, что математическое моделирование геомиграционных процессов, являясь одним из важнейших направлений геоинформатики, развивается преимущественно в предположении насыщенности массивов геопористой среды чистой водой [3–5]. Однако в настоящее время особую актуальность приобретают исследования в области математического моделирования динамики указанных процессов в массивах насыщенных солевыми растворами. При этом проведены комплексные исследования в области математического моделирования динамики геофильтрации солевых растворов [2] с учетом следующих факторов: релаксационных свойств жидкости [6] и пористого скелета [7]; неизотермичности процесса и термодиффузии [8, 9]; теплового расширения жидкой фазы [9, 10]; влияния геохимических факторов подземного выщелачивания [11] и др.

В сложных горно-геологических условиях существенно проявляется неравновесность геомиграционных процессов, которая обусловлена рядом причин, изложенных, например в [12]. Это приводит к необходимости разработки методов математического моделирования динамики локально-неравновесных геомиграционных процессов. В [13] построена математическая модель и выполнено математическое моделирование динамики процесса фильтрации и массопереноса солевых растворов в геопористой среде (в частности, фрактальной структуры) в условиях сильной временной нелокальности. В настоящей работе построена математическая модель для описания динамики фильтрационно-консолидационного процесса в геопористой среде, насыщенной солевыми растворами (при наличии массообмена), в условиях как временной, так и пространственной нелокальности.

В рамках предложенной модели выполнена постановка соответствующей краевой задачи для геопористого массива конечной мощности с проницаемыми гранями и разработана методика приближенного решения указанной краевой задачи.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА И ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Для моделирования процесса фильтрационной консолидации геопористого массива, насыщенного солевым раствором, с учетом пространственно-времен-

ной нелокальности обобщим законы Дарси и Фика следующим образом:

$$u_x = D_t^{1-\beta} D_x^\alpha \left(-\frac{k}{\gamma} p + \nu C \right), \quad (1)$$

$$q = D_t^{1-\beta} \left(-d D_x^\alpha C + C \left(-\frac{k}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial C}{\partial x} \right) \right) \quad (0 < \alpha, \beta < 1), \quad (2)$$

где u_x — скорость фильтрации; p — поровое давление ($p = \gamma H$, H — избыточный напор [1–5], γ — удельный вес жидкости); C — концентрация солей в жидкой фазе; k — коэффициент фильтрации; d — коэффициент диффузии [14]; ν — коэффициент осмоса [2]; $D_t^{1-\beta}$ и D_x^α — операторы дробного дифференцирования Римана–Лиувилля соответственно по переменной t порядка $1-\beta$ [15–17] и по переменной x порядка α . Тогда из уравнения неразрывности фильтрационного потока [3–5, 14]

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{k}{\gamma C_v} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

(C_v — коэффициент консолидации [2]) получаем следующее уравнение для определения порового давления при фильтрационной консолидации пористого геомассива, насыщенного солевым раствором, в условиях пространственно-временной нелокальности процесса:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D_t^{1-\beta} D_x^{\alpha+1} (C_v p - \eta C) \quad (4)$$

или

$$D_t^{(\beta)} p(x, t) = D_x^{\alpha+1} (C_v p - \eta C), \quad (5)$$

где $\eta = \frac{\nu C_v \gamma}{k}$, $D_t^{(\beta)}$ — оператор регуляризованной дробной производной (по Капуто [15–17]) порядка β .

Аналогично из соотношения баланса массы солей в предположении слабой сжимаемости жидкой фазы можно получить следующее уравнение для определения концентрации:

$$\sigma D_t^{(\beta)} C(x, t) = d D_x^{\alpha+1} C(x, t) + \left(\frac{k}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (6)$$

где σ — пористость геосреды.

В связи с трудностями физической интерпретации начальных условий в задачах, содержащих производные Римана–Лиувилля, можно (при выполнении известных ограничений [15, 16]) перейти в (5), (6) от производных Римана–Лиувилля к производным по Капуто. Тогда получим

$$D_t^{(\beta)} p(x, t) = D_x^{(\alpha+1)} (C_v p - \eta C), \quad (7)$$

$$\sigma D_t^{(\beta)} C(x, t) = d D_x^{(\alpha+1)} C(x, t) + \left(\frac{k}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x} \quad (0 < \alpha, \beta < 1). \quad (8)$$

Принимаемая в дальнейшем в качестве основной математическая модель, базирующаяся на уравнениях (7), (8), является естественным обобщением (при наличии локально-неравновесных во времени и пространстве свойств миграционного процесса) общеизвестной [2] математической модели для описания рав-

новесного процесса фильтрационной консолидации насыщенных соевыми растворами пористых сред. Действительно, при $\alpha \rightarrow 1$, $\beta \rightarrow 1$ из (7), (8) получаем систему уравнений общепринятой [2] модели

$$\frac{\partial p}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (9)$$

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(\frac{k}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (10)$$

Дальнейшее обобщение рассматриваемой модели проведем с учетом массообменных процессов. Обобщенное в случае временной нелокальности уравнение кинетики массообмена с учетом уравнения неравновесной обратимой сорбции при изотерме Генри запишем в виде

$$D_t^{(\beta)} N = \gamma_* (\sigma C - \alpha_* N), \quad (11)$$

где α_* — коэффициент равновесного сорбционного распределения, γ_* — коэффициент скорости сорбции [14], N — концентрация вещества в твердой фазе. Тогда неклассическая математическая модель фильтрационной консолидации насыщенных соевыми растворами геопористых массивов с учетом осмотических явлений в условиях массообмена и пространственно-временной нелокальности процесса базируется на системе уравнений дробного порядка, состоящей из уравнений (7), (11) и уравнения

$$\begin{aligned} & \sigma D_t^{(\beta)} C(x, t) + D_t^{(\beta)} N(x, t) = \\ & = d D_x^{(\alpha+1)} C(x, t) + \left(\frac{k}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x} \quad (0 < \alpha, \beta < 1). \end{aligned} \quad (12)$$

В рамках предложенной математической модели моделирование динамики полей избыточных поровых давлений (напоров) и концентраций при фильтрационной консолидации геопористых массивов, насыщенных соевыми растворами, в условиях пространственно-временной нелокальности, массообмена и осмоса сводится, например, в случае массива конечной мощности l с проницаемыми границами, к решению в области $(0, l) \times (0, +\infty)$ системы уравнений (7), (11), (12) с крайними условиями

$$p(0, t) = 0, \quad p(l, t) = 0, \quad p(x, 0) = p_0, \quad (13)$$

$$C(0, t) = C_0, \quad \frac{\partial C(l, t)}{\partial x} = 0, \quad C(x, 0) = 0, \quad N(x, 0) = N_0, \quad (14)$$

где p_0 — начальное поровое давление в массиве, C_0 — заданное значение концентрации солей на входе фильтрационного потока, N_0 — заданная начальная концентрация вещества в твердой фазе.

Введем в рассмотрение безразмерные переменные и параметры соотношениями

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{l}, \quad t' = \left(\frac{C_v}{l^{\alpha+1}} \right)^{\frac{1}{\beta}} t, \quad C' = \frac{C}{C_0}, \quad p' = \frac{p}{p_0}, \quad N' = \frac{N}{C_0}, \quad d' = \frac{d}{C_v}, \\ \nu' &= \frac{\nu C_0}{C_v l^{1-\alpha}}, \quad k' = \frac{k p_0}{\gamma C_v l^{1-\alpha}}, \quad \eta' = \frac{\eta C_0}{C_v p_0}, \quad \gamma'_* = \frac{\gamma_* l^{\alpha+1}}{C_v}, \quad N'_0 = \frac{N_0}{C_0}. \end{aligned} \quad (15)$$

Переходя в соотношениях (7), (11)–(14) к безразмерным переменным согласно соотношений (15) и опуская в дальнейшем знак «штрих» над безразмерными величинами, получаем следующую нелинейную краевую задачу:

$$D_t^{(\beta)} p(x, t) = D_x^{(\alpha+1)} (p - \eta C), \quad (16)$$

$$\sigma D_t^{(\beta)} C(x, t) + D_t^{(\beta)} N(x, t) = d D_x^{(\alpha+1)} C(x, t) + \left(k \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (17)$$

$$D_t^{(\beta)} N(x, t) = \gamma * (\sigma C - \alpha * N), \quad (18)$$

$$p(0, t) = 0, \quad p(1, t) = 0, \quad p(x, 0) = 1, \quad (19)$$

$$C(0, t) = 1, \quad \frac{\partial C(1, t)}{\partial x} = 0, \quad C(x, 0) = 0, \quad N(x, 0) = N_0. \quad (20)$$

МЕТОДИКА ПОЛУЧЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Ниже кратко изложена конечно-разностная методика построения приближенного решения рассматриваемой краевой задачи.

Отметим, что задача отыскания функции концентрации N из (18) имеет аналитическое решение, записываемое согласно [15] в виде

$$N(x, t) = N_0 E_\beta(-\alpha * \gamma * t^\beta) + \sigma \gamma * \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(-\alpha * \gamma * (t - \tau)^\beta) C(x, \tau) d\tau, \quad (21)$$

где $E_\beta(z)$ — функция Миттаг–Леффлера, $E_{\alpha, \beta}(z)$ — обобщенная функция Миттаг–Леффлера [15, 16].

Введем в рассмотрение сеточную область $\omega_{ht} = \{(x_i, t_j) : x_i = ih (i = \overline{0, m+1}), t_j = j\tau (j = \overline{0, n})\}$ (h, τ — шаги сетки по геометрической переменной и времени соответственно) и поставим в соответствие задаче отыскания давления p и концентрации C систему разностных уравнений, записываемую в стандартных обозначениях [18, 19] в виде

$$\Delta_t^{(\beta)} p = \Lambda_x^{(\alpha+1)} (\hat{p} - \eta \hat{C}), \quad (22)$$

$$\sigma \Delta_t^{(\beta)} C = \chi \Lambda_x^{(\alpha+1)} \hat{C} + u^+ \hat{C}_x + u^- \hat{C}_{\bar{x}} - \gamma * (\sigma \hat{C} - \alpha * N), \quad (23)$$

где

$$\chi = \frac{d}{R}, \quad R = 1 + \frac{h|u|}{2d}, \quad u^\pm = \frac{1}{2}(u \pm |u|), \quad u = kp_0 - \nu C_0,$$

а операторы $\Delta_t^{(\beta)}$ и $\Lambda_x^{(\alpha+1)}$ обозначают дискретные аналоги производных $D_t^{(\beta)}$ и $D_x^{(\alpha+1)}$ соответственно. Согласно [20, 21] можно записать

$$\Delta_t^{(\beta)} u = \sum_{s=0}^j \omega_s^{(j)} u_{t,s}, \quad \Lambda_x^{(\alpha+1)} u = \sum_{k=0}^{i-1} g_k^{(\alpha)} (u_{i-k+1} - 2u_{i-k} + u_{i-k-1}),$$

где

$$\omega_s^{(j)} = \frac{\tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} [(j-s+1)^{1-\beta} - (j-s)^{1-\beta}], \quad u_{t,s} = \frac{u^{s+1} - u^s}{\tau},$$

$$g_k^{(\alpha)} = \frac{1}{h^{1+\alpha} \Gamma(2-\alpha)} [(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}], \quad \Gamma(\alpha) — \text{гамма-функция [22].}$$

В классе достаточно гладких функций имеем $D_t^{(\beta)}u = \Delta_i^{(\beta)}u + O(\tau)$, $D_x^{(\alpha+1)}u = \Lambda_x^{(\alpha+1)}u + O(h)$.

Расписывая в соотношениях (22), (23) соответствующие разностные операторы и приводя подобные члены, получаем

$$\tilde{A}p_{i+1}^{j+1} - \tilde{B}p_i^{j+1} + \tilde{A}p_{i-1}^{j+1} = \tilde{F}_i^{j+1} \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{0, n}), \quad (24)$$

$$A_i^j C_{i+1}^{j+1} - B_i^j C_i^{j+1} + S_i^j C_{i-1}^{j+1} = F_i^{j+1} \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{0, n}), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{1}{h^{1+\alpha}\Gamma(2-\alpha)}, \quad \tilde{B} = 2\tilde{A} + \frac{1}{\tau^\beta\Gamma(2-\beta)}, \\ \tilde{F}_i^{j+1} &= (2\tilde{A} - \tilde{B})p_i^j + \sum_{s=0}^{j-1} \omega_s^{(j)} \frac{p_i^{s+1} - p_i^s}{\tau} - \sum_{k=1}^{i-1} g_k^{(\alpha)} (p_{i-k+1}^{j+1} - 2p_{i-k}^{j+1} + p_{i-k-1}^{j+1}) + \\ &\quad + \eta \sum_{k=0}^{i-1} g_k^{(\alpha)} (C_{i-k+1}^{j+1} - 2C_{i-k}^{j+1} + C_{i-k-1}^{j+1}), \\ A_i^j &= \tilde{A}\chi_i^j + \frac{(u^+)_i^j}{h}, \quad S_i^j = \tilde{A}\chi_i^j - \frac{(u^-)_i^j}{h}, \quad B_i^j = \sigma(\tilde{B} - 2\tilde{A}) + \gamma * \sigma + A_i^j + S_i^j, \\ F_i^{j+1} &= \sigma \sum_{s=0}^{j-1} \omega_s^{(j)} \frac{C_i^{s+1} - C_i^s}{\tau} - \\ &\quad - \sigma(\tilde{B} - 2\tilde{A})C_i^j - \chi_i^j \sum_{k=1}^{i-1} g_k^{(\alpha)} (C_{i-k+1}^{j+1} - 2C_{i-k}^{j+1} + C_{i-k-1}^{j+1}) - \alpha * \gamma * N_i^j. \end{aligned}$$

Для решения систем (24), (25) используем итерационный метод. Соответствующие итерационные процессы строятся следующим образом:

$$\tilde{A} p_{i+1}^{(s+1)j+1} - \tilde{B} p_i^{(s+1)j+1} + \tilde{A} p_{i-1}^{(s+1)j+1} = \tilde{F}_i^{(s)j+1} \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{0, n}), \quad (26)$$

$$A_i^j C_{i+1}^{(r+1)j+1} - B_i^j C_i^{(r+1)j+1} + S_i^j C_{i-1}^{(r+1)j+1} = F_i^{(r)j+1} \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{0, n}), \quad (27)$$

где s и r — номера итерации. В качестве начальной итерации берется значение функций p и C из предыдущего временного слоя. Критерий окончания итерационного процесса имеет вид

$$\max_{(i,j)} \left| C_i^{(s+1)j+1} - C_i^{(s)j+1} \right| \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — заданная точность. Системы уравнений (26), (27) на каждой итерации решаются методом прогонки [18, 19], устойчивость которого для указанных систем следует из факта диагонального преобладания в матрицах коэффициентов этих систем.

Учитывая изложенное, вычислительный алгоритм для приближенного решения рассматриваемой задачи сформулируем следующим образом.

Шаг 1. На данном временном слое вычисляем значение концентрации C в соответствии с (25), используя значения p и N из предыдущего временного слоя.

Шаг 2. С учетом найденных на данном временном слое значений C вычисляем значения давления p на этом слое согласно (24).

Шаг 3. Находим на рассматриваемом временном слое значение концентрации N в соответствии с явной зависимостью (21). Решение задачи на рассматриваемом временном слое завершается.

Шаг 4. Переходим на следующий временной слой и повторяем вычисления, начиная с шага 1.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Численное моделирование динамики полей поровых давлений и полей концентраций в рамках рассматриваемой математической модели, учитывающей пространственно-временную нелокальность геомиграционного процесса, вполне относительно безразмерных переменных и параметров, определяемых соотношениями (15). Некоторые из полученных результатов расчетов графически изображены на рис. 1 и 2.

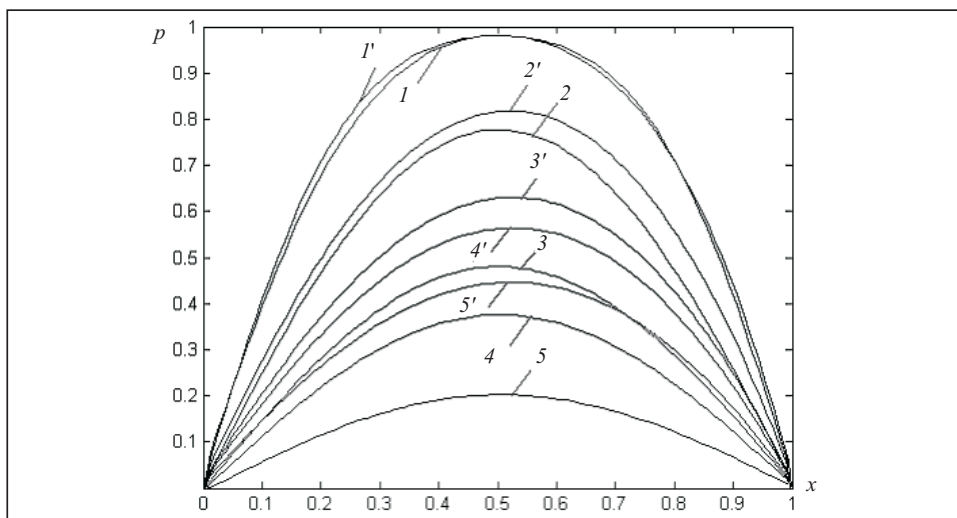


Рис. 1

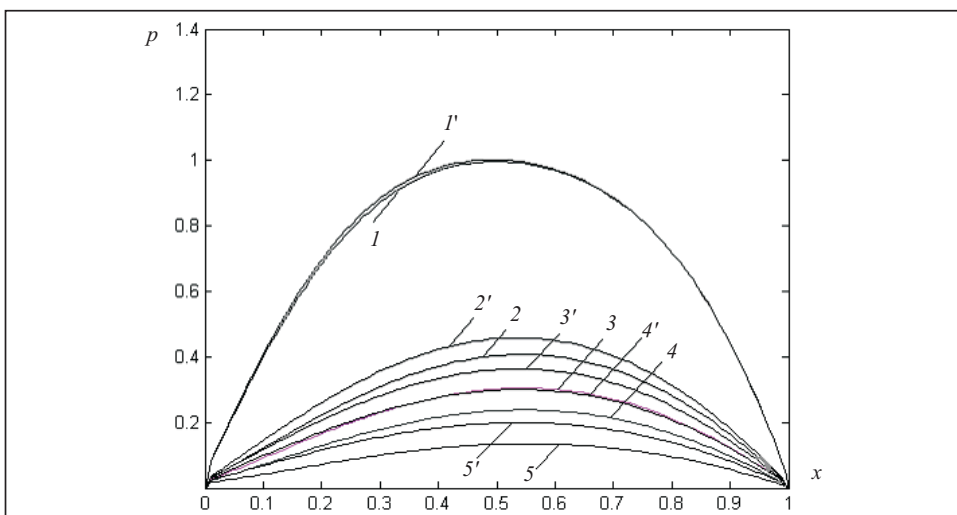


Рис. 2

На рис. 1 показана динамика полей избыточных давлений при отсутствии массообмена для модели с учетом пространственно-временной нелокальности (кривые 1'–5', $\alpha = 0,9$, $\beta = 0,8$) и для общепринятой модели без учета явления нелокальности процесса (кривые 1–5). Графики на рис. 1 соответствуют таким значениям безразмерного временного параметра t : $t = 0,02$ (кривые 1, 1'), $t = 0,05$ (кривые 2, 2'), $t = 0,1$ (кривые 3, 3'), $t = 0,13$ (кривые 4, 4'), $t = 0,19$ (кривые 5, 5').

Динамика полей избыточных напоров в зависимости от наличия или отсутствия массообмена с учетом пространственно-временной нелокальности процесса представлена на рис. 2 (кривые 1'–5' соответствуют наличию массообмена, а кривые 1–5 — его отсутствию). Графики на рис. 2 соответствуют таким значениям t : $t = 0,02$ (кривые 1, 1'), $t = 0,2$ (кривые 2, 2'), $t = 0,28$ (кривые 3, 3'), $t = 0,36$ (кривые 4, 4'), $t = 0,6$ (кривые 5, 5').

Анализ результатов численных экспериментов позволяет сделать следующие выводы об особенностях динамики полей избыточных давлений при миграции солевых растворов в геопористой среде в условиях заметного влияния пространственно-временной нелокальности.

1. Учет явления пространственно-временной нелокальности процесса массопереноса в геопористой среде в условиях насыщенности ее солевым раствором и отсутствия массообмена приводит (на достаточно удаленных от начальной стадии процесса) к заметному (см. рис. 1) запаздыванию рассеивания полей избыточных давлений по сравнению с моделированием массопереноса на основе общепринятой (не учитывающей явления нелокальности [2]) модели, что соответственно способствует увеличению длительности консолидационного периода для геомассива. (Аналогичный вывод справедлив и для процессов переноса в случае наличия свойств лишь временной нелокальности [13].)

2. Учет массообменных процессов между жидкой и твердой фазами в рассматриваемой локально-неравновесной по пространству и времени математической модели массопереноса в насыщенной солевыми растворами геопористой среде также способствует определенному (в рассчитанных примерах, как правило, незначительному (см. рис. 2)) замедлению рассеивания полей избыточных поровых давлений и, следовательно, некоторому увеличению длительности консолидационного периода. Последнее указывает на качественное соответствие результатов моделирования динамики процесса массопереноса в рамках рассматриваемой математической модели и общепринятой равновесной модели [2].

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОЙ МОДЕЛИ В УСЛОВИЯХ МАССОБМЕНА

В частном случае наличия свойства лишь временной нелокальности рассматриваемого процесса математическая модель фильтрационной консолидации насыщенных солевыми растворами геопористых массивов с учетом осмотических явлений в условиях массообмена базируется на системе уравнений дробного порядка, состоящей из уравнения (18) и уравнений

$$D_t^{(\beta)} p(x, t) = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (28)$$

$$\sigma D_t^{(\beta)} C(x, t) + D_t^{(\beta)} N(x, t) = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(k \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (29)$$

Соответствующая краевая задача о консолидации массива конечной мощности в рамках рассматриваемой модели сводится к решению в области

$(0, l) \times (0, +\infty)$ системы уравнений (18), (28), (29) с краевыми условиями (19), (20). В этом случае можно получить численно-аналитическое решение рассматриваемой задачи, используя дифференциально-разностный (в совокупности с методом суммарных представлений [23]) и собственно разностный методы. Последовательность соответствующих выкладок кратко состоит в следующем.

Введем в рассмотрение сеточную область $\omega_h = \{x_i : x_i = ih \ (i = 0, m+1)\}$ (h — шаг сетки по геометрической переменной) и поставим в соответствие задаче вычисления поля давлений (28), (19) дифференциально-разностную задачу вида

$$D_t^{(\beta)} \bar{u}(t) = \frac{1}{h^2} (T^{(m)} - 2E) \bar{u}(t) + \bar{w}(t), \quad (30)$$

$$\bar{u}(0) = \bar{e}, \quad (31)$$

где

$$\bar{u}(t) = [p_1(t), p_2(t), \dots, p_m(t)]^T, \quad \bar{e} = (1, 1, \dots, 1)^T,$$

$$\bar{w}(t) = [w_1(t), w_2(t), \dots, w_m(t)]^T = \frac{\eta}{h^2} [(2E - T_3^{(m)}) \bar{V}(t) - \bar{w}_1],$$

$$\bar{V}(t) = [C_1(t), C_2(t), \dots, C_m(t)]^T, \quad \bar{w}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T,$$

$T^{(m)}, T_3^{(m)}$ — квадратные матрицы порядка m , определенные в [23], E — единичная матрица порядка m .

Введем также в рассмотрение P -трансформации векторов \bar{u} и \bar{w} соотношениями

$$\tilde{u}(t) = P^{(m)} \bar{u}(t), \quad \tilde{w}(t) = P^{(m)} \bar{w}(t), \quad (32)$$

где $P^{(m)} = [\tilde{p}_{kj}]_{k,j=1}^m$ — фундаментальная матрица порядка m , определенная в [23].

Умножая (30), (31) слева на матрицу $P^{(m)}$ с учетом соотношения [23]

$$T^{(m)} = P^{(m)} \Lambda^{(m)} P^{(m)},$$

где $\Lambda^{(m)} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$ — диагональная матрица собственных чисел матрицы $T^{(m)}$, $\lambda_k = 2 \cos\left(\frac{\pi k}{m+1}\right)$ ($k = \overline{1, m}$), получаем задачу в изображениях, записываемую в скалярной форме в виде

$$D_t^{(\beta)} \hat{u}_i(t) - \kappa_i \hat{u}_i(t) = \hat{w}_i(t) \quad (i = \overline{1, m}), \quad (33)$$

$$\hat{u}_i(0) = \hat{e}_i \quad (i = \overline{1, m}). \quad (34)$$

Здесь

$$\kappa_i = \frac{1}{h^2} (\lambda_i - 2), \quad \hat{e}_i = \sum_{k=1}^m \tilde{p}_{ik}, \quad \hat{w}_i(t) = -\frac{\eta}{h^2} \sum_{k=1}^m \tilde{p}_{ik} (C_{k-1}(t) - 2C_k(t) + C_{k+1}(t)).$$

Согласно [15] решение задачи (33), (34) запишем в виде

$$\hat{u}_i(t) = \hat{e}_i E_\beta(\kappa_i t^\beta) + \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\kappa_i (t-\tau)^\beta) \hat{w}_i(\tau) d\tau \quad (i = \overline{1, m}). \quad (35)$$

Возвращаясь в соотношениях (35) к оригиналам по геометрической переменной, получаем точное решение исходной дифференциально-разностной задачи (30), (31) в виде следующей явной зависимости функции давления p от концентрации C :

$$p_i(t) = G_i(t) - \sum_{k=1}^m \int_0^t (C_{k-1}(\tau) - 2C_k(\tau) + C_{k+1}(\tau)) \Phi_{ik}(t-\tau) d\tau \quad (i = \overline{1, m}), \quad (36)$$

где

$$G_i(t) = \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m \tilde{p}_{is} \tilde{p}_{sk} E_{\beta}(\kappa_s t^{\beta}),$$

$$\Phi_{ik}(t) = \frac{\eta t^{\beta-1}}{h^2} \sum_{s=1}^m \tilde{p}_{is} \tilde{p}_{sk} E_{\beta, \beta}(\kappa_s t^{\beta}) \quad (i = \overline{1, m}, k = \overline{1, m}).$$

Задача (29), (20) для вычисления поля концентраций $C(x, t)$ решается численно на основе, например, монотонной разностной схемы А.А. Самарского, которая в обозначениях работы [18] запишется в виде

$$\sigma \Delta_t^{(\beta)} C = \chi \hat{C}_{\bar{x}x} + u^+ \hat{C}_x + u^- \hat{C}_{\bar{x}} - \gamma * (\sigma \hat{C} - \alpha * N). \quad (37)$$

Концентрация N вещества в твердой фазе находится в явном виде из (21).

Таким образом, учитывая изложенное, сформулируем вычислительный алгоритм для приближенного решения рассматриваемой задачи следующим образом.

Шаг 1. На данном временном слое вычисляем значение концентрации C в соответствии с разностной схемой (37), используя значения p и N из предыдущего временного слоя.

Шаг 2. С учетом найденных на данном временном слое значений C вычисляем значения давления p и концентрации N на этом слое согласно явным зависимостям (36) и (21). Решение задачи на рассматриваемом временном слое завершается.

Шаг 3. Переходим на следующий временной слой и повторяем вычисления, начиная с шага 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная в настоящей работе математическая модель позволяет описать динамику процессов переноса при геомиграции солевых растворов с учетом наличия массообмена и пространственно-временной нелокальности. Для указанной дробно-дифференциальной модели локально-неравновесных процессов массопереноса разработана методика и алгоритм численного моделирования динамики миграционно-консолидационного процесса в геопористой среде конечной мощности. Компьютерная реализация этого алгоритма открывает возможности учета ряда новых важных факторов и свойств в сложных процессах переноса в насыщенных пористых средах (в частности, фрактальной структуры), что позволит (в случае необходимости) использовать полученную информацию в инженерной практике при разработке конструктивных решений в области проектирования экологически опасных инженерных объектов, например, таких, как поверхностные накопители промышленных или бытовых стоков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопечський В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. — Київ: Наук. думка, 2005. — 283 с.
2. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів. — Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004. — 211 с.
3. Мироненко В.А., Шестаков В.М. Основы гидрогеомеханики. — М.: Недра, 1974. — 296 с.
4. Баренблатт Г.И., Ентов В.Н., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. — М.: Недра, 1984. — 303 с.

5. Шестаков В.М. Динамика подземных вод. — М.: Изд-во МГУ, 1979. — 386 с.
6. Булавацкий В.М., Скопецкий В.В. Математическое моделирование динамики консолидационных процессов с учетом релаксационных эффектов // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 6. — С. 59–66.
7. Булавацкий В.М., Скопецкий В.В. Системный подход к проблеме математического моделирования процесса фильтрационной консолидации // Там же. — 2006. — № 6. — С. 71–79.
8. Бомба А.Я., Булавацкий В.М., Скопецкий В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геодинаміки. — Київ: Наук. думка, 2007. — 292 с.
9. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації солевих розчинів в неізотермічних умовах. — Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. — 416 с.
10. Булавацкий В.М., Скопецкий В.В. Об одной нелинейной консолидационной математической модели геoinформатики // Проблемы управления и информатики. — 2010. — № 6. — С. 35–45.
11. Булавацкий В.М., Скопецкий В.В. Приближенное решение одной динамической задачи геoinформатики // Там же. — 2010. — № 3. — С. 68–77.
12. Хасанов М.М., Булгакова Г.Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в геологически сложных средах. — М.–Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. — 288 с.
13. Булавацкий В.М. Математическая модель геoinформатики для исследования динамики локально-неравновесных геофильтрационных процессов // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 6. — С. 76–83.
14. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. — Киев: Наук. думка, 1991. — 264 с.
15. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 523 p.
16. Podlubny I. Fractional differential equations. — New York: Acad. Press, 1999. — 341 p.
17. Чикрий А.А., Матичин И.И. Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка // Докл. НАН Украины. — 2007. — № 1. — С. 50–55.
18. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 656 с.
19. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Computational heat transfer. — New York: Wiley, 1995. — 2. — 422 p.
20. Таукенова Ф.И., Шхануков–Лафишев М.Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2006. — 46, № 10. — С. 1871–1881.
21. Shen S., Liu F. Error analysis of an explicit finite difference approximation for the space fractional diffusion equation with insulated ends // ANZIAM J. — 2005. — N 46. — P. C871–C887.
22. Abramovitz M., Stegun I.A. Handbook of mathematical functions. — New York: Dover, 1965. — 831 p.
23. Polozhii G.N. The method of summary representation for numerical solution of problems of mathematical physics. — Oxford: Pergamon Press, 1965. — 283 p.

Поступила 14.12.2011