УДК 519.711.3:517.9

С.К. ГИРЛИН, А.В. БИЛЮНАС

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВНЕШНИХ РЕСУРСОВ МЕЖДУ ПОДСИСТЕМАМИ ДВУХПРОДУКТОВОЙ РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ

Ключевые слова: *оптимизационная задача распределения внешних ресурсов, двухпродуктовая система.*

Многие реальные объекты моделирования (технические, макроэкономические, экологические, биологические и другие системы) можно рассмотривать как двухпродуктовые развивающиеся системы. Поэтому очевидно, что задача наилучшего (по некоторому выбранному критерию) распределения внешних ресурсов системы между ее подсистемами весьма актуальна.

При математическом исследовании макроэкономической задачи академик В.М. Глушков ввел новый класс динамических моделей, представляющих собой описание функционирования управляемых динамических систем интегральными уравнениями вольтерровского типа [1]. Характерными особенностями уравнений Глушкова являются:

— наличие функции в нижних пределах интегралов (в экономических задачах эта заданная или искомая функция может интерпретироваться как временная граница ликвидации устаревших технологий производства, а техническое перевооружение производства с низкими технико-экономическими показателями при ограниченности трудовых и материальных ресурсов — важнейший фактор управления экономической системой);

— наличие в подынтегральных выражениях функции, экономический смысл которой состоит в распределении числа рабочих мест между отраслями групп А (производство средств производства) и Б (производство предметов потребления).

В.М. Глушков ставил очень важную для практики математическую задачу, состоящую в максимизации ожидаемого выхода продукции отраслей производства группы Б за некий плановый период с помощью выбора наилучшего и сбалансированного распределения рабочих мест между группами А и Б (при определенных ограничениях задавались уравнения баланса рабочей силы и роста фондов). Основной фундаментальный результат качественного исследования поставленной задачи заключается в следующем [2]: для максимизации выхода продуктов потребления на достаточно большом отрезке времени планирования доказана необходимость роста числа рабочих мест в группе А по сравнению с их минимально допустимым количеством, которое максимизирует выход продуктов потребления на небольшом отрезке времени планирования.

В дальнейшем новый класс динамических моделей макроэкономических задач применялся для широкого класса развивающихся систем (биологических, экологических, технических и др.). Были опубликованы сотни научных работ и четыре монографии [3–6] о моделировании развивающихся систем (РС) уравнениями Глушкова, где исследовались вопросы существования, единственности и устойчивости решений систем интегральных уравнений Глушкова, получены результаты, касающиеся структуры и асимптотики решений различных задач оптимального управления РС, предложены алгоритмы численного решения поставленных задач и изучены вопросы эффективности этих алгоритмов. В большинстве публикаций исследовались задачи для РС с заданной начальной предысторией, причем непосредственное воздействие на систему внешних для нее факторов не рассматривалось.

На основе разделения ресурсов РС на внутренние и внешние (поступающие в систему извне) в [7] предложены, а в [8] уточнены уравнения РС, которые в отличие от уравнений Глушкова используют функции более широкого класса, дополнительно учитывают непосредственное воздействие внешних факторов на РС, позволяют изучать задачи без начальной предыстории системы до момента начала ее моделирования и дают возможность эффективнее управлять данной системой за счет перераспределения между подсистемами не только внутренних, но и внешних ресурсов. В [7] качественно исследована оптимизационная задача распределения как внутренних, так и внешних ресурсов РС между ее подсистемами и получен аналогичный [2] результат. Для одного частного случая двухпродуктовой макроэкономической модели найдены аналитические решения оптимизационных задач распределения:

— внутренних ресурсов (внешние ресурсы не учитывались) [3];

— как внутренних, так и внешних ресурсов [9];

— внешних ресурсов при заданном распределении внутренних ресурсов [10, 11].

Цель настоящей статьи состоит в решении оптимизационной задачи распределения внешних ресурсов между подсистемами двухпродуктовой развивающейся системы при заданном распределении ее внутренних ресурсов для более широкого, чем описанного в [10, 11], класса моделей РС.

Рассмотрев объект моделирования как двухпродуктовую РС [3], выделим в нем две подсистемы:

— подсистема самосовершенствования А, в которой одной частью продуктов первого рода (материально, энергетически и информационно обеспечивающих внутреннюю функцию объекта моделирования — его существование и развитие) создаются новые, более эффективные (производительные) продукты первого рода;

— подсистема Б, в которой другой частью продуктов первого рода выполняется основная (внешняя) функция объекта моделирования — выпуск некоторых продуктов второго рода, материально, энергетически и информационно обеспечивающих эту внешнюю функцию и являющихся результатом взаимодействия этого объекта с внешней средой.

В экономической системе продуктами первого рода являются, например, рабочие места, а второго рода — продукты системы, поступающие внешнему заказчику. Внутренними ресурсами РС будем считать только продукты первого рода, являющиеся источниками самих себя и продуктов второго рода. Внешними ресурсами РС будем называть продукты как первого, так и второго рода, поступающие в РС из внешней среды (при этом часть внешних ресурсов становится внутренними ресурсами РС).

Введем следующие обозначения: $m(t)$ и $c(t)$ — скорости появления в рассматриваемой РС в момент времени t новых продуктов соответственно первого и второго родов; $f(t)$ — скорость поступления в РС в момент t внешнего ресурса (f, m и c предполагаются одной размерности); $x(t)f(t)$ и $(1-x(t))f(t)$ — скорости поступления в РС в момент времени t продуктов соответственно первого и второго родов; $y(\tau)m(\tau)$ и $(1-y(\tau))m(\tau)$ — доли $m(\tau)$, используемые в дальнейшем для производства соответственно $m(t)$ в подсистеме А и $c(t)$ в подсистеме Б, $0 \le \tau \le t, 0 \le y \le 1$; $a(t)$ — максимальный момент времени, ранее которого появившиеся в РС продукты первого рода не функционируют по каналам $ym \to m$ и $(1-y)m$ в момент времени t, $a(t) \le t$ (длина временного интервала $t-a(t)$ называется продолжительностью последействия или памятью системы); $\alpha(t,\tau)$ и $\beta(t,\tau)$ — скорости создания в момент времени t новых продуктов соответственно первого и второго родов, приходящиеся на одну единицу из появившихся в момент τ продуктов первого рода в подсистемах А и Б, $0 \le \tau \le t$; t_0 — момент начала моделирования РС (РС называется возникающей, если $a(t) \ge t_0$).

Примем, что на промежутке $(\inf\limits_{t_0 \le t \le T} a(t), t_0)$ заданы функции $y(\tau) \equiv y_0(\tau)$ и $m(\tau) \equiv m_0(\tau)$; $0 \le t_0 \le t \le T < +\infty$; все рассматриваемые функции, кроме $a(t)$, по определению неотрицательны.

Положим $a(t) \equiv 0$, $\alpha(t,\tau) \equiv \alpha_1(t)\alpha_2(\tau)$, $0 \le \tau \le t$, $t_0 \le t \le T < +\infty$, и рассмотрим на $[t_0, T]$ следующую систему уравнений относительно неизвестных функций $m(t)$, $c(t)$:

$$m(t) = \alpha_1(t)\int_0^t \alpha_2(\tau) y(\tau) m(\tau)\, d\tau + x(t) f(t), \tag{1}$$

$$c(t) = \int_0^t \beta(t,\tau)(1-y(\tau)) m(\tau)\, d\tau + (1-x(t)) f(t), \tag{2}$$

где заданы кусочно непрерывные функции $y(s) \equiv y_0(s)$, $m(s) \equiv m_0(s)$, $a(t_0) = 0 \le s < t_0 < T$, $0 \le \tau \le t$, $t \in [t_0, T]$.

Теорема 1. Пусть заданы неотрицательные непрерывные в своих областях определений функции $f(t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(s)$, $\beta(t,s)$, $y(t)$ и кусочно непрерывные функции $x(t)$, $y_0(\tau)$, $m_0(\tau)$, причем $0 \le x(t) \le 1$, $0 \le y(t) \le 1$, $0 \le y_0(\tau) \le 1$, функция $m_0(\tau)$ ограничена, $\tau \in [0, t_0)$, $0 \le s \le t$, $0 \le t_0 \le t \le T < +\infty$. Тогда система уравнений (1), (2) имеет на $t \in [t_0, T]$ единственное решение

$$m(t) = \alpha_1(t)\left[\int_{t_0}^t A(t,\tau)\alpha_2(\tau) y(\tau) x(\tau) f(\tau) d\tau + m^* A(t,t_0)\right] + x(t) f(t), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} c(t) = &\int_{t_0}^t x(\tau) f(\tau)[B(t,\tau)\alpha_2(\tau) y(\tau) + \beta(t,\tau)(1-y(\tau))] d\tau + \\ &+ m^* B(t,t_0) + c^*(t) + (1-x(t)) f(t), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$A(t,\tau) = \exp\left(\int_\tau^t \alpha_1(u)\alpha_2(u) y(u) du\right),$$

$$B(t,\tau) = \int_\tau^t A(u,\tau)\alpha_1(u)\beta(t,u)(1-y(u)) du,$$

$$m^* = \int_0^{t_0} \alpha_2(\tau) y_0(\tau) m_0(\tau) d\tau, \quad c^*(t) = \int_0^{t_0} \beta(t,\tau)(1-y_0(\tau)) m_0(\tau) d\tau,$$

причем $m(t)$, $c(t)$ кусочно непрерывны на $[t_0, T]$.

Доказательство. Обозначив

$$k(t) = \alpha_1(t)\alpha_2(t) y(t), \quad n(t) = m(t) - x(t) f(t),$$

$$F(t) = k(t)(m^* + \int_{t_0}^t \alpha_2(\tau) y(\tau) x(\tau) f(\tau) d\tau), \quad N(t) = \int_{t_0}^t \alpha_2(\tau) y(\tau) n(\tau) d\tau$$

и разбив область интегрирования $[0, t]$ на два подотрезка: $[0, t_0]$ и $[t_0, t]$, уравнение (1) можно записать в виде

$$N'(t) - k(t) N(t) = F(t), \tag{5}$$

где $k(t)$ и $F(t)$ — известные и непрерывные на $[t_0, T]$ функции. Уравнение (5) с начальным условием $N(t)_0 = 0$ легко решить на $[t_0, T]$, например, методом Эйлера, умножив обе части равенства на $\exp\left[-\int_{t_0}^{t} k(u)du\right]$ и проинтегрировав обе части полученного равенства от t_0 до t. В результате находим решение

$$N(t) = \int_{t_0}^{t} F(\tau)\exp\left[\int_{\tau}^{t} k(u)du\right]d\tau$$

или, возвращаясь к прежним обозначениям, для $t \in [t_0, T]$ получим

$$m(t) = x(t)f(t) + \alpha_1(t)\left[\int_{t_0}^{t} \alpha_2(\tau)y(\tau)x(\tau)f(\tau)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t} \alpha_1(\tau)\alpha_2(\tau)y(\tau)\exp\left(\int_{\tau}^{t} \alpha_1(s)\alpha_2(s)y(s)ds\right)d\tau\int_{t_0}^{\tau} \alpha_2(u)y(u)x(u)f(u)du\right] +$$

$$+ m^*\alpha_1(t)\left[1 + \int_{t_0}^{t} \alpha_1(\tau)\alpha_2(\tau)y(\tau)\exp\left(\int_{\tau}^{t} \alpha_1(s)\alpha_2(s)y(s)\,ds\right)d\tau\right]. \qquad (6)$$

Интегрируя по частям, находим

$$\int_{t_0}^{t} \alpha_1(\tau)\alpha_2(\tau)y(\tau)\left[\exp\left(\int_{\tau}^{t} \alpha_1(s)\alpha_2(s)y(s)\,ds\right)d\tau\int_{t_0}^{\tau} \alpha_2(u)y(u)x(u)f(u)\,du\right] =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \alpha_2(\tau)y(\tau)x(\tau)f(\tau)\left[\exp\left(\int_{\tau}^{t} \alpha_1(s)\alpha_2(s)y(s)\,ds\right) - 1\right]d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \alpha_2(\tau)y(\tau)x(\tau)f(\tau)(A(t,\tau) - 1)\,d\tau, \qquad (7)$$

$$\int_{t_0}^{t} \alpha_1(\tau)\alpha_2(\tau)y(\tau)\exp\left(\int_{\tau}^{t} \alpha_1(s)\alpha_2(s)y(s)ds\right)d\tau = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \alpha_1(s)\alpha_2(s)y(s)\,ds\right) - 1 =$$

$$= A(t, t_0) - 1. \qquad (8)$$

Подставляя в правую часть равенства (6) правые части равенств (7) и (8), получаем равенство (3).

Разбивая область интегрирования в уравнении (2) на подотрезки $[0, t_0]$, $[t_0, t]$ и подставляя в уравнение найденную функцию $m(t)$, имеем

$$c(t) = c^*(t) + (1 - x(t))f(t) + \int_{t_0}^{t} \beta(t,\tau)(1 - y(\tau))x(\tau)f(\tau)\,d\tau +$$

$$+ m^*\int_{t_0}^{t} \beta(t,\tau)(1 - y(\tau))\alpha_1(\tau)\exp\left(\int_{t_0}^{\tau} \alpha_1(s)\alpha_2(s)y(s)\,ds\right)d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \beta(t,\tau)(1 - y(\tau))\alpha_1(\tau)\,d\tau\int_{t_0}^{\tau} \alpha_2(u)y(u)x(u)f(u)\exp\left(\int_{u}^{\tau} \alpha_1(s)\alpha_2(s)y(s)\,ds\right)du. \qquad (9)$$

Изменив в правой части равенства (9) порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} \beta(t,\tau)(1-y(\tau))\alpha_1(\tau)\alpha_2(u)y(u)x(u)f(u)\exp\left(\int_u^\tau \alpha_1(s)\alpha_2(s)y(s)\,ds\right)du =$$

$$=\int_{t_0}^{t} du \int_{u}^{t} \beta(t,\tau)(1-y(\tau))\ \alpha_1(\tau)\alpha_2(u)y(u)x(u)f(u)\exp\left(\int_u^\tau \alpha_1(s)\ \alpha_2(s)y(s)\ ds\right)d\tau =$$

$$=\int_{t_0}^{t} \alpha_2(u)y(u)x(u)f(u)\,du \int_{u}^{t} \beta(t,\tau)\,(1-y(\tau))\,\alpha_1(\tau)\exp\left(\int_u^\tau \alpha_1(s)\alpha_2(s)y(s)\,ds\right)d\tau =$$

$$=\int_{t_0}^{t} \alpha_2(\tau)y(\tau)x(\tau)f(\tau)\,d\tau \int_{\tau}^{t} \beta(t,u)\,(1-y(u))\,\alpha_1(u)\exp\left(\int_u^\tau \alpha_1(s)\alpha_2(s)y(s)\,ds\right)du =$$

$$=\int_{t_0}^{t} B(t,\tau)\alpha_2(\tau)y(\tau)x(\tau)f(\tau)\,d\tau$$

и выполнив тождественные преобразования, получим равенство (4). Очевидно, найденные функции $m(t)$, $c(t)$ кусочно непрерывны на $[t_0,T]$ (каждая из них является суммой кусочно непрерывной и непрерывной функций).

Теорема доказана.

Поскольку в условиях теоремы 1 для любой заданной кусочно непрерывной функции $x(t)$, $0\le x(t)\le 1$, система (1), (2) однозначно разрешима, можно поставить следующую оптимизационную задачу: в условиях теоремы 1 из уравнений (1), (2) среди всех кусочно непрерывных функций $x(t)$, $0\le x(t)\le 1$, заданных на $[t_0,T]$, $t_0<T<+\infty$, найти такую функцию $x(t)$ (и соответствующие ей функции $m(t)$, $c(t)$), которая бы доставляла максимум функционалу $I(x)=\int_{t_0}^{T} c(t)\,dt$.

Обозначим $\varphi(T,t)=-1+\int_t^T \lambda(\tau,t)d\tau$, $\lambda(\tau,t)=\beta(\tau,t)(1-y(t))+B(\tau,t)\alpha_2(t)y(t)$, где $B(\tau,t)$ определено в теореме 1, $t_0\le t\le\tau\le T$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Максимум функционала $I(x)$ достигается при $x(t)=0$, если $\varphi(T,t)\le 0$, и при $x(t)=1$, если $\varphi(T,t)>0$, $t\in[t_0,T]$. В частности, справедливы следующие утверждения:

— если $y(t)\equiv 1$, $t\in[t_0,T]$, то независимо от величины $T-t_0$ максимум функционала $I(x)$ достигается при $x(t)\equiv 0$, $t\in[t_0,T]$;

— если $T-t_0$ достаточно мало, то максимум функционала $I(x)$ достигается при $x(t)\equiv 0$, $t\in[t_0,T]$;

— если $T-t_0>\frac{1}{\nu}$, $\inf\limits_{t_0\le t\le\tau<+\infty}\beta(\tau,t)(1-y(t))\ge\nu=\text{const}>0$, то максимум функционала $I(x)$ достигается при $x(t)\equiv 1$ на $\left[t_0, T-\frac{1}{\nu}\right]$, т.е. в начальной части отрезка $[t_0,T]$, и при $x(t)\equiv 0$ — в конце этого отрезка, причем искомое экстремальное управление $x(t)$, $t_0\le t\le T$, может принимать значение 0 или 1 на каждом из подынтервалов отрезка $[t_0,T]$.

Доказательство. Имеем

$$I(x)=\int_{t_0}^{T} c(t)dt=\int_{t_0}^{T}\left[f(t)+c^*(t)+m^*\int_{t_0}^{t}\alpha_1(\tau)\beta(t,\tau)(1-y(\tau))\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(\int_{t_0}^{\tau}\alpha_1(s)\alpha_2(s)y(s)\,ds\right)d\tau\right]dt+\int_{t_0}^{T}\left[\int_{t_0}^{t}x(\tau)f(\tau)\lambda(t,\tau)\,d\tau-x(t)f(t)\right]dt.$$

Воспользовавшись формулой Дирихле изменения порядка интегрирования в повторном интеграле

$$\int_{t_0}^{T} dt \int_{t_0}^{t} x(\tau) f(\tau) \lambda(t,\tau) d\tau = \int_{t_0}^{T} d\tau \int_{\tau}^{T} x(\tau) f(\tau) \lambda(t,\tau) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} x(\tau) f(\tau) d\tau \int_{\tau}^{T} \lambda(t,\tau) dt = \int_{t_0}^{T} x(t) f(t) dt \int_{t}^{T} \lambda(\tau, t) d\tau,$$

получим

$$I(x) = I^* + \int_{t_0}^{T} \left[\int_{t_0}^{t} x(\tau) f(\tau) \lambda(t,\tau) d\tau - x(t) f(t) \right] dt = I^* + \int_{t_0}^{T} x(t) f(t) \left[\int_{t}^{T} \lambda(\tau, t) d\tau - 1 \right] dt$$

или

$$I(x) = I^* + \int_{t_0}^{T} x(t) f(t) \varphi(T, t)\, dt, \tag{10}$$

где

$$I^* = \int_{t_0}^{T} \left[f(t) + c^*(t) + m^* \int_{t_0}^{t} \alpha_1(\tau) \beta(t,\tau)(1 - y(\tau)) \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} \alpha_1(s) \alpha_2(s) y(s)\, ds \right) d\tau \right] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} [f(t) + c^*(t) + m^* B(t, t_0)]\, dt,$$

$$\varphi(T, t) = -1 + \int_{t}^{T} \lambda(\tau, t) d\tau, \;\; \lambda(\tau, t) = \alpha_2(t) y(t) \int_{t}^{\tau} \alpha_1(u) \beta(\tau, u)(1 - y(u)) \times$$

$$\times \exp\left(\int_{t}^{u} \alpha_1(s) \alpha_2(s) y(s)\, ds \right) du + \beta(\tau, t)(1 - y(t)) = \beta(\tau, t)(1 - y(t)) + B(\tau, t) \alpha_2(t) y(t),$$

$$m^* = \int_{0}^{t_0} \alpha_2(\tau) y_0(\tau) m_0(\tau) d\tau, \;\; c^*(t) = \int_{0}^{t_0} \beta(t, \tau)(1 - y_0(\tau)) m_0(\tau) d\tau.$$

Если $y(t) \equiv 1$, $t \in [t_0, T]$, то $\lambda(\tau, t) \equiv 0$, $\varphi(T, t) \equiv -1$, $t_0 \le t \le \tau \le T$, $I(x) = I^* - \int_{t_0}^{T} x(t) f(t)\, dt$. Следовательно, независимо от величины $T - t_0$ максимум функционала $I(x)$ достигается при $x(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, T]$. Поскольку $\varphi(T, T) = -1 < 0$ и непрерывная функция $\varphi(T, t)$ сохраняет знак в некоторой окрестности точки $t = T$, можно считать доказанными следующие утверждения:

— непрерывная функция $\varphi(T, t) < 0$ при достаточно малых $T - t_0$;

— если $T - t_0 > \frac{1}{\nu}$, где $0 < \text{const} = \nu \le \inf\limits_{t_0 \le t \le \tau < +\infty} \beta(\tau, t)(1 - y(t))$, то $\varphi(T, t) \ge \nu(T - t) - 1 > 0$ для $t \in \left[t_0, T - \frac{1}{\nu} \right)$ и существует такое число θ, $T - \frac{1}{\nu} < \theta < T$, что $\varphi(T, t) < 0$ для $t \in (\theta, T]$.

Из формулы (10) вытекает, что в условиях теоремы максимум функционала $I(x)$ достигается при $x(t) = 0$, если $\varphi(T, t) \le 0$, и при $x(t) = 1$, если $\varphi(T, t) > 0$, $t \in [t_0, T]$. Откуда непосредственно следует справедливость теоремы.

Для частных случаев рассмотренного класса моделей РС доказаны теоремы 3 в [10] и 4 в [11].

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1, $\alpha_1(t) \equiv 1$, $\alpha_2(s) \equiv \alpha > 0$, $\beta(t,s) \equiv \beta > 0$, $y(t) \equiv y \in [0,1]$, где α, β и y — const, $s \in [0,t]$, $t \in [t_0, T]$. Если $y = 1$, то для любых положительных значений $T - t_0$ максимум функционала $I(x)$ достигается при $x(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, T]$. Если $y = 0$, то максимум функционала $I(x)$ достигается для $T - t_0 \le \dfrac{1}{\beta}$ при $x(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, T]$, а для $T - t_0 > \dfrac{1}{\beta}$ при $x(t) \equiv 1$ на $\left[t_0, T - \dfrac{1}{\beta}\right)$ и $x(t) \equiv 0$ на $\left[T - \dfrac{1}{\beta}, T\right]$. Если $0 < y < 1$, то максимум функционала $I(x)$ достигается для $T - t_0 \le \dfrac{1}{\alpha y} \ln\left(1 + \dfrac{\alpha y}{\beta(1-y)}\right)$ при $x(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, T]$, а для $T - t_0 > \dfrac{1}{\alpha y} \ln\left(1 + \dfrac{\alpha y}{\beta(1-y)}\right)$ при $x(t) \equiv 1$ на $\left[t_0, T - \dfrac{1}{\alpha y} \ln\left(1 + \dfrac{\alpha y}{\beta(1-y)}\right)\right]$ и $x(t) \equiv 0$ на $\left[T - \dfrac{1}{\alpha y} \ln\left(1 + \dfrac{\alpha y}{\beta(1-y)}\right), T\right]$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 1, $\alpha_1(t) \equiv 1$, $\alpha_2(s) \equiv \alpha > 0$, $\beta(t,s) \equiv \beta > 0$, $y(t) \equiv y \in [0,1]$, $f(t) = f > 0$, $x(t) = x \in [0,1]$, где α, β, x, y и f — const, $s \in [0,t]$, $t \in [t_0, T]$. Если $y = 1$, то для любых положительных значений $T - t_0$ максимум функции $I(x)$ достигается при $x = 0$. Если $y = 0$, то максимум функции $I(x)$ достигается для $T \in \left[t_0, t_0 + \dfrac{2}{\beta}\right]$ при $x = 0$, а для $T > t_0 + \dfrac{2}{\beta}$ при $x = 1$. Если $0 < y < 1$, то максимум функции $I(x)$ достигается для $T \in [t_0, T^*]$ при $x = 0$, а для $T > T^*$ при $x = 1$, где $T = T^*$ — положительный корень уравнения $e^{\alpha y(T - t_0)} - \left(1 + \dfrac{\alpha y}{\beta(1-y)}\right)\alpha y(T - t_0) - 1 = 0$.

Таким образом, поставлена и аналитически решена задача максимизации на заданном временном отрезке планирования выхода продуктов второго рода, обеспечивающих основную функцию системы, посредством наилучшего распределения внешних ресурсов между подсистемами А (подсистемой самосовершенствования системы) и Б (подсистемой выполнения основной функции системы) двухпродуктовой развивающейся системы для заданного распределения внутренних ресурсов между этими подсистемами. Решение данной задачи может интерпретироваться как достижение рекорда внешней функции системы на заданном временном промежутке. Доказано, что решения оптимизационной задачи качественно различаются в зависимости от величины времени планирования (моделирования) и искомый оптимум достигается:

— при максимальном использовании в подсистеме Б внешних ресурсов для выполнения основной функции системы в случае достаточно малой величины времени планирования при любом распределении между подсистемами А и Б внутренних ресурсов системы, а также независимо от величины времени планирования при поступлении внутренних ресурсов только в подсистему А;

— в случае достаточно большой величины времени планирования при поступлении внутренних ресурсов не только в подсистему А при максимальном использовании в ней внешних ресурсов на внутренние потребности системы на большей начальной части отрезка планирования и максимальном использовании в подсистеме Б внешних ресурсов для выполнения основной функции системы в конце этого временного отрезка (если предусмотрена возможность изменения на плановом промежутке перераспределения внешних ресурсов), а также при максимальном использовании в подсистеме А внешних ресурсов на внутренние потребности системы на всем отрезке времени планирования (если не предусмотрена указанная выше возможность).

Заметим, что выбор величины заданного промежутка планирования $T - t_0$ является весьма нетривиальным (например, она может ограничивать достоверный прогноз исходных производительностей α и β). Как отмечается в [3], в результате снижения спроса на продукты по истечении определенного времени (по отношению к моменту начала планирования t_0) обычно существует такое оптимальное значение T^*, что с учетом увеличения спроса на продукты на отрезке $[t_0, T]$ $(T > T^*)$ не компенсирует его уменьшения на отрезке $[t_0, T^*]$. В этом случае удачным может оказаться выбор отрезка $[t_0, T^*]$.

Для дальнейшего исследования представляет интерес получение аналитического решения для других критериев оптимизации, например, в [3, 11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глушков В.М. Об одном классе динамических макроэкономических моделей // Управляющие системы и машины. — 1977. — № 2. — С. 3–6.
2. Глушков В.М., Иванов В.В. Моделирование оптимизации распределения рабочих мест между отраслями производства А и Б // Кибернетика. — 1977. — № 6. — С. 117–131.
3. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. — М.: Наука, 1983. — 352 с.
4. Яценко Ю.П. Интегральные модели систем с управляемой памятью. — К.: Наук. думка, 1991. — 220 с.
5. Ivanov V.V. Model development and optimization. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1999. — 249 p.
6. Ivanov V.V., Ivanova N.V. Mathematical models of the cell and cell associated objects. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 333 p.
7. Гирлин С.К., Иванов В.В. Моделирование взаимодействия развивающихся систем // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1986. — № 1. — С. 58–60.
8. Гирлин С.К. Моделирование возникающих развивающихся систем // Там же. — 1987. — № 10. — С. 65–67.
9. Гирлин С.К., Билюнас А.В. Моделирование оптимизации распределения внутренних и внешних ресурсов в экономической системе // Сталий розвиток підприємств сфери послуг: Матеріали Всеукр. наук.-практ. конф. (Ялта, 23–24 жовт. 2009 р.). — Ялта: РВНЗ Крим. гуманітар. ун-т, 2009. — С. 287–290.
10. Гирлин С.К., Билюнас А.В. Аналитическое решение одной задачи оптимального управления открытой развивающейся системой // Методологічні та методичні основи активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів у процесі вивчення математичних дисциплін: Матеріали Всеукр. наук.-практ. конф. (Ялта, 23–24 листоп. 2009 р.). — Ялта: РВВ Крим. гуманітар. ун-т, 2009. — Вип. 3. — С. 191–197.
11. Гирлин С.К. Лекции по интегральным уравнениям. — Ялта: РВВ Крим. гуманітар. ун-т, 2010. — 177 с.

Поступила 19.01.2011