УДК 519.854

В.А. МИХАЙЛЮК, Н.В. ЛИЩУК

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ: ОДИН ОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

Ключевые слова: *сложность анализа устойчивости, NP- (DP-) трудные задачи.*

ВВЕДЕНИЕ

Малоизученной проблемой в дискретной оптимизации является влияние изменений параметров исходной задачи на оптимальное решение этой задачи [1]. В частности, возникает вопрос, как, зная оптимальное решение некоторой задачи, найти оптимальное решение (или определить, что оно осталось неизмененнённым) «близких» в определенном смысле задач. Большое внимание уделяется оценкам сложности анализа устойчивости дискретных задач оптимизации. Для *NP*-трудных задач это сводится к анализу существования полиномиальных алгоритмов нахождения оптимальних решений измененных задач, исходя из оптимальных решений исходной задачи. В [2] приводятся результаты по сложности анализа устойчивости 0/1 задач с линейной целевой функцией при изменении значений целевого вектора. Показано, что *NP*-трудно (не существует полиномиального алгоритма при $P \neq NP$) определить неизменность оптимального решения для *NP*-трудных задач при произвольном изменении вектора значений целевой функции. Подобных результатов относительно изменения коэффициентов вектора ограничений или вообще нет, или они малочисленны.

В данной работе проводится исследование сложности анализа устойчивости одномерной задачи о ранце при изменении значений вектора ограничений.

О СООТНОШЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ БЛИЗКИХ ЗАДАЧ О РАНЦЕ. ГИПОТЕЗА БЛЭРА

Рассмотрим одномерную задачу о ранце (ЗР) с булевыми переменными:

$$
\begin{gathered}
\max\left\{\sum_{i\in I} c_i x_i\right\},\\
\sum_{i\in I} a_i x_i \le b \ ,\\
x_i \in \{0,1\},\ \ i\in I.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Будем считать, что a_i, c_i и b являются натуральными числами.

Две ЗР с одинаковыми значениями a, c и I, но с отличающимися на единицу правыми частями, будем называть близкими. В работе [3] рассматриваются зависимости между оптимальными решениями близких задач. Кратко опишем суть результатов. Покажем, что существуют близкие задачи о ранце с произвольными сложными решениями. Для произвольной пары ЗР новые значения a_i и c_i строятся так, что оптимальные решения (1) для $b+1$ и b отвечают оптимальным решениям данной пары задач.

Опишем результат формально. С каждым экземпляром задачи (1) свяжем 4-кортеж (a, c, I, b), где I — некоторое конечное множество индексов, векторы

$a=(a_i)_{i\in I}$, $c=(c_i)_{i\in I}$, b — натуральное число. Рассмотрим два экземпляра задачи (1): (a, c, I_1, L) и (a, c, I_2, M), где множества индексов I_1 и I_2 не пересекаются. Из таких двух экземпляров построим близкие ЗР, которые будут иметь переменные, соответствующие каждому из данных экземпляров вместе с некоторыми дополнительными переменными. Эти переменные соответствуют множествам индексов J_1 и J_2.

Теорема 1 [3]. Пусть (a, c, I_1, L) и (a, c, I_2, M) — два произвольных экземпляра ЗР. Можно построить экземпляр (a', c', I, b) ЗР с множеством $I = I_1 \cup J_1 \cup I_2 \cup J_2$ такой, что будут выполнены следующие условия:

1) для некоторых натуральных T и U, $a'_i = Ta_i$ для $i \in I_1$ и $a'_i = Ua_i$ для $i \in I_2$;

2) если x оптимальное для (a', c', I, b), то $x_i = 0$ для всех $i \in I_2 \cup J_2$ и x — оптимальное решение для (a, c, I_1, L);

3) если x оптимальное для $(a', c', I, b+1)$, то $x_i = 0$ для всех $i \in I_1 \cup J_1$ и x — оптимальное решение для (a, c, I_2, M);

4) для экземпляра $(a', c', J_1 \cup J_2, b)$ существует полиномиальный алгоритм при произвольном b.

При этом (a', c', I, b) можно построить, даже не зная оптимальных решений двух начальных экземпляров: (a, c, I_1, L) и (a, c, I_2, M).

Условие 1 означает, что коэффициенты ограничений двух возможных экземпляров сохраняются с точностью до умножения на константу. Условия 2 и 3 показывают, что оптимальные решения для экземпляров в правых частях b и $b+1$ получаются из исходных экземпляров. Последние могут быть избраны произвольно и поэтому полностью независимы и сложные. Условие 4 означает, что сложность построенных новых экземпляров получена от переменных двух начальных экземпляров, а не от переменных, соответствующих J_1 и J_2.

Таким образом, установлен способ, благодаря которому решение любых двух экземпляров ЗР преобразуются в задачу нахождения пары близких ЗР, содержащих большее число переменных. Подобные преобразования (полиномиальные сведения) часто используются для установления вычислительной сложности обычных проблем [4]. Что можно сказать относительно полиномиального алгоритма, который содержит информацию об оптимальных решениях пары близких ЗР? Возможно, наиболее желательно было бы получить полиномиальный алгоритм, который использует информацию об оптимальном решении одной из двух задач для нахождения решения другой задачи. Однако согласно теореме 1 такой алгоритм можно было бы применить для решения любой ЗР, но это нереально, поскольку задача о ранце *NP*-полная [4]. Поэтому Блэр (Blair) [3] высказал гипотезу, что такая задача *NP*-трудная (*NP*-hard). В данной работе эта гипотеза доказыватся для обобщенно-близких ЗР.

УСТАНОВЛЕНИЕ ГИПОТЕЗЫ БЛЭРА ДЛЯ ОБОБЩЕННО-БЛИЗКИХ ЗР

Задачу (1) со стандартным множеством индексов $I=\{1, \ldots, n\}$ (n фиксированное) обозначим $KP(a, b, c)$, где векторы $a=(a_i)_{i\in I}$, $c=(c_i)_{i\in I}$, b — натуральное число. Пусть $Z^n = \{x=(x_1, \ldots, x_n) \colon x_i \geq 0,\ x_i$ целые, $i=1, \ldots, n\}$, для $x=(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in Z^{n+1}$, $y=(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) \in Z^{n+1}$ введем метрику $\rho(x, y)=\sum_{i=1}^{n+1}|x_i - y_i|$. Для $\bar{a}=(a_1, \ldots, a_n, b) \in Z^{n+1}$ вектор $\bar{a}'$ такой, что $\rho(\bar{a}, \bar{a}')=1$ (задачу $KP(a, b, c)$ также будем обозначать как $KP(\bar{a}, c)$). Рассмотрим произвольную $KP(\bar{a}, c)$.

Определение. Задачу $KP(\bar{a}', c)$ с произвольным вектором $\bar{a}'$ таким, что $\rho(a, \bar{a}') = 1$, будем называть обобщенно-близкой к $KP(\bar{a}, c)$.

Итак, обобщенно-близкие задачи могут отличаться одна от другой на единицу не только правыми частями (как в [3]), но и компонентами вектора $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

Пусть $\operatorname{Re}\operatorname{opt}(KP(\bar{a}, c))$ — задача нахождения оптимального решения задачи $KP(\bar{a}', c)$, обобщенно-близкой к $KP(\bar{a}, c)$, исходя из оптимального решения x^* задачи $KP(\bar{a}, c)$.

Далее будем использовать результаты из [5, 6]. Пусть $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $K_1 = \{i_1, \ldots, i_k\}$ — некоторая выборка объема k $(1 \le k \le n)$ из I такая, что в $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ $x_{i_1}^* = \ldots = x_{i_k}^* = 1$, а остальные координаты вектора x^* равны нулю. Пусть вектор $\bar{a}^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*, b^*)$ такой, что $a_{i_1}^* = \ldots = a_{i_k}^* = 1$, $a_j^* = k+1$, если $j \in I \setminus K_1$, $b^* = k$.

Лемма 1[5]. Решение x^* является (единственным) оптимальным решением экземпляра J задачи $KP(\bar{a}^*, c)$.

Лемма 2 [6]. Пусть Q — NP-трудная задача и $\mathrm{mod}-Q$ — некоторая локальная модификация для Q. Задача $\mathrm{mod}-Q$ является NP-трудной, если существует полиномиальный алгоритм A, который для любого экземпляра I задачи Q вычисляет:

1) экземпляр I' для Q,

2) оптимальное решение x' для I',

3) последовательность локальных модификаций типа $\mathrm{mod}-Q$ (не более чем полиномиальную), которая преобразует I' в I.

Лемма 2 доказывается с помощью полиномиального сведения Тьюринга [4] от Q к $\mathrm{mod}-Q$.

Основной результат данной работы состоит в следующем.

Теорема 2. Задача $\operatorname{Re}\operatorname{opt}(KP(\bar{a}, c))$ является NP-трудной.

Доказательство. Используем лемму 2. Известно, что задача о ранце является NP-полной [4]. В качестве экземпляра I' берем экземпляр задачи $KP(\bar{a}^*, c)$ из леммы 1. Используя для этого экземпляра полиномиальный «жадный» алгоритм, получим оптимальное решение (выполнен п. 2 леммы 2).

Предположим, что компоненты вектора $\bar{a}$ оцениваются сверху константой c, не зависящей от размерности задачи, а также, что $T(a)$ для любого вектора $a \in Z^{n+1}$ является преобразованием a с увеличением или уменьшением ровно одной компоненты на единицу (в данном случае это преобразование $\mathrm{mod}-Q$). Запишем $a' = T(a)$, если после применения к a преобразования T получим вектор a' (очевидно, что $\rho(a, a') = 1$).

Произвольный вектор $\bar{a}$ может быть получен из вектора $\bar{a}^*$, если использовать не более $c(n+1)$ преобразований T: $\bar{a}^* \xrightarrow{T} \bar{a}^1 \xrightarrow{T} \ldots \xrightarrow{T} \bar{a}^k = \bar{a}$, где $\bar{a}^1 = T(\bar{a}^*), \rho(\bar{a}^1, \bar{a}^*) = 1$; $\bar{a}^{i+1} = T(\bar{a}^i), \rho(\bar{a}^{i+1}, \bar{a}^i) = 1, i = 1, \ldots, k-1$; $k \le c(n+1)$ и выполнен п. 3 леммы 2. Применив лемму 2, получим доказательство теоремы.

Замечание. Легко видеть, что доказательство теоремы остается справедливым, если компоненты вектора $\bar{a}$ оцениваются сверху полиномом от n.

О *DP*-ТРУДНОСТИ ЗАДАЧИ БЛЭРА

Кроме задачи, рассмотренной в [3], изучается такая задача.

Задача Блэра. Входные данные. Вектор $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n, b) \in Z^{n+1}$, $c = (c_1, \ldots, c_n) \in Z^n$ и b — положительное целое, $\bar{a}' = (a_1, \ldots, a_n, b+1)$.

Возникает вопрос: существуют ли оптимальное решение x_i $(i=1,\ldots,n)$ задачи $KP(\bar{a},c)$ и оптимальное решение x_i' $(i=1,\ldots,n)$ задачи $KP(\bar{a}',c)$ такие, что множество индексов $\{i\colon x_i>0\}\cap\{i\colon x_i'>0\}$ непусто.

Следующий вопрос: существует ли полиномиальный алгоритм для задачи Блэра? Блэр предлагает «слабый» алгоритм устойчивости. Входные данные алгоритма — пара близких ЗР. Если существуют оптимальные решения x, x', для которых $\{i\colon x_i>0\}\cap\{i\colon x_i'>0\}$ непусто, то алгоритм выводит «да» и останавливается, иначе (близкие задачи существенно различаются) выводит решение одной из задач пары (метод получения которого более легкий). Установлен следующий результат.

Следствие. Если существует полиномиальный слабый алгоритм устойчивости, то существует полиномиальный алгоритм решения любой ЗР.

Таким образом, высказана еще одна гипотеза, что задача Блэра является NP-трудной. Эта гипотеза успешно решена в [7], где доказано более сильное утверждение.

Теорема 3 [7]. Задача Блэра является DP-трудной.

Напомним, что язык L находится в классе DP тогда и только тогда, когда существуют два языка: $L_1\in NP$ и $L_2\in$co NP такие, что $L=L_1\cap L_2$ [8]. Если задача является DP-трудной, то она по крайней мере также трудноразрешима, как все задачи в NP и как все задачи в co NP.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты настоящей статьи можно проинтерпретировать следующим образом. Если $P\neq NP$, то для обобщенно-близких задач о ранце не существует полиномиального алгоритма, который «связывает» оптимальные решения этих задач. Кроме того, не существует полиномиальных алгоритмов устойчивости (в интерпретации Блэра) для пары близких задач даже в слабой форме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fernandez-Baca D., Benkatachalam B. Sensitivity analysis in combinatorial optimization // Handbook of Approximation Algorithms and Metaheuristics (ed. T. Guzalez), 2007. — Chapman&Hall/CRC Comput. Inform. Sci. Ser. — P. 30-1–30-29.
2. Van Hoesel S., Wagelmans A. On the complexity of postoptimality analysis of 0/1 programs // Discrete Appl. Mathemat. — 1999. — **91**. — P. 251–263.
3. Blair C. Sensitivity analysis for knapsack problems: a negative result // Ibid. — 1998. — **81**. — P. 133–139.
4. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982 . — 416 с.
5. Михайлюк В.А. Общий подход к оценке сложности постоптимального анализа дискретных задач оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — **46**, № 2. — С. 134–141.
6. Михайлюк В.А. Реоптимизация задачи о максимальном k-покрытии: порог отношения аппроксимации // Там же. — 2012. — **48**, № 2. — С. 97–104.
7. Woeginger G.J. Sensitivity analysis for knapsack problems: another negative result // Discrete Appl. Mathemat. — 1999. — **92**. — P. 247–251.
8. Papadimitriou C.H. Computational complexity. — Reading, MA: Addison-Wesley, 1994. — 524 p.

Поступила 11.12.2012