УДК 518.9

А.П. КРИКОВЛЮК

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ–УБЕГАНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ОБЪЕКТАМИ

Ключевые слова: *задача преследования–убегания, оптимальные траектории, конфликтные ситуации, противоборствующие стороны, беспилотные летательные аппараты.*

Рассматриваемая задача преследования–убегания с конкретными терминальными множествами является одной из реализаций в теории дифференциальных игр при рассмотрении конфликтных ситуаций противоборствующих сторон. Теоретические постановки и решения ряда задач в этой области рассматривали Р. Айзекс, Л.С. Понтрягин, Н.Н. Красовский, Б.Н. Пшеничный, А.А. Чикрий и др. [1–6], что способствовало решению данной задачи.

В работе [7] описана задача преследования–убегания в заданной предметной области с учетом ее физической и математической постановки при некоторых ограничениях на расстояние между объектами в начальный момент времени. Однако предложенный метод не позволяет получить решение задачи преследования–убегания в случае малого значения параметра a — удаления преследуемого объекта от зоны действия преследователя в начальный момент времени.

Рассмотрим задачу выбора траектории ухода от преследования при малых значениях параметра a с последующим превращением преследуемого в преследующего.

Несмотря на сравнительную простоту (и в свое время директивно заданного в качестве основного) тактического маневра во взаимодействиях противоборствующих летательных аппаратов (объекты E и P [7]) робототехнического типа [8], математическое решение задачи отыскания соответствующих оптимальных траекторий (в автономном случае) представляет собой достаточно сложную задачу. Ее специфика заключается в неоднозначности искомых траекторий, в том числе из-за немонотонности поведения двух целевых параметров для объекта P, и поэтому освещение рассматриваемого вопроса приобретает смысл поиска общего подхода к получению точных решений в зависимости от конкретных требований, а сама статья — вид развернутого аналитического исследования.

Точка E, которая находилась в начальный момент времени в начале координат, движется вправо по оси $0x$ с постоянной скоростью v. Вместе с ней движется открытая область D, имеющая форму первого квадранта круга радиуса R (рис. 1).

Точка P, находившаяся в начальный момент времени на оси $0x$ правее E на расстоянии a от границы D, движется в верхней полуплоскости со скоростью v. Ее траектория может состоять из сопряженных дуг окружностей радиуса R и сопряженных с ними отрезков прямых. Целью P является уход от E без пересечения D и занятие на $0x$ положения, левее E, на расстоянии δ. В начальной точке P_0 и в конечной точке P_k вектор скорости направлен вдоль оси $0x$. Таким образом, точка P из преследуемой становится преследующей. Нужно найти такую траекторию P, которая обеспечивала бы достижение цели за минимальное время.

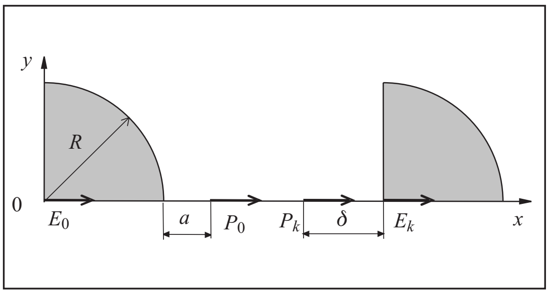

Рис. 1

В работе [7] исследованы траектории для $a \geq R(\pi/3-1)$ и показано, что при $a = R(\pi/3-1)$ P уходит от преследования по дуге, соприкасаясь с D в точке C $(R(2\pi+3\sqrt{3})/6, R/2)$.

Рассмотрим уход P от D при $0 < a < R(\pi/3-1)$. В этом случае P не может перемещаться только по дуге, так как это приведет к пересечению D — уменьшению абсциссы начала траектории P на $\Delta x = R(\pi/3-1)-a$, что равносильно плоскопараллельному перемещению траектории на Δx левее точки соприкосновения с D. Естественным реагированием на уменьшение a будет перемещение P сначала по дуге α, а потом по отрезку l прямой AB (рис. 2). При этом α должна быть не больше и не меньше некоторой величины, иначе P либо пересечет D, либо пройдет на удалении от нее и потеряет время. Определим, при каких соотношениях между параметрами a, α, l точка P будет уходить от области D, соприкасаясь с ней в точке C.

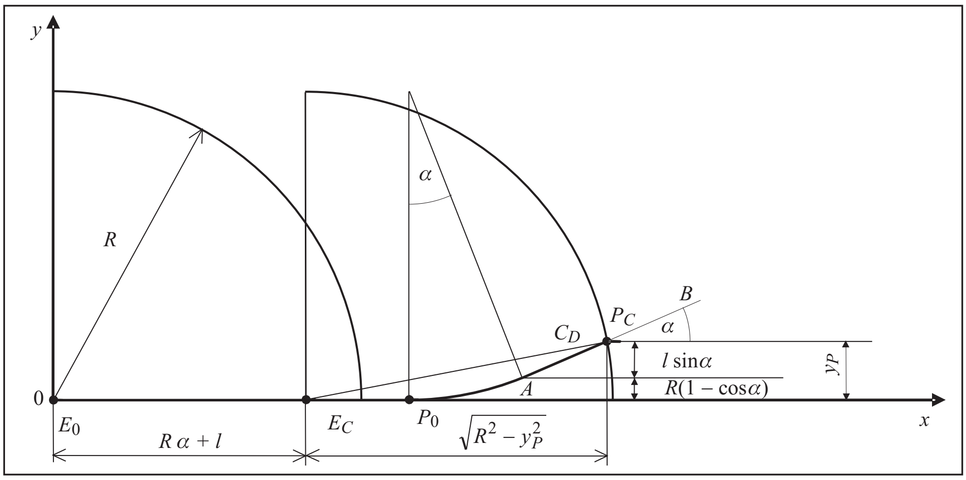

Рис. 2

Уравнение прямой AB, по которой перемещается P, представим в виде обратной функции

$$x_P = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} y_P - \frac{R(1-\cos\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha} + (R + a + R\sin\alpha). \qquad (1)$$

Когда ордината P находится в пределах $0 \leq y_P \leq R$, граница D содержит точку C_D, ордината которой равна ординате P. Эта точка преследует точку P, расположенную на ее пути, и только в этой точке при соответствующих условиях P может соприкасаться с D. Геометрическое место таких точек образует линию ограничения, которую траектория P не должна пересекать. Так как $v_E = v_P$, то $S_E = S_P$ и абсциссы точек C_D и P равны, т.е.

$$x_{C_D} = S_P + \sqrt{R^2 - y_P^2} = R\alpha + l + \sqrt{R^2 - y_P^2}. \qquad (2)$$

Так как

$$l = \frac{y_P - R(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}, \qquad (3)$$

то

$$x_{C_D} = R\alpha + \frac{y_P - R(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha} + \sqrt{R^2 - y_P^2}. \qquad (4)$$

Расстояние d между P и преследующей ее точкой C_D равно разнице абсцисс (1) и (4):

$$d = x_P - x_{C_D} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} y_P - \frac{R(1-\cos\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha} +$$

$$+ (R + a + R\sin\alpha) - R\alpha - \frac{y_P - R(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha} - \sqrt{R^2 - y_P^2}. \qquad (5)$$

Решая уравнение

$$d'_{y_P} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{y_P}{\sqrt{R^2 - y_P^2}} = 0 \tag{6}$$

и учитывая, что $d''_{y_P y_P} = \dfrac{2 - y_P^2}{2(R^2 - y_P^2)^{3/2}} > 0$, находим, что при

$$y_P = R\sin\frac{\alpha}{2} \tag{7}$$

$d = 0$, т.е. траектория точки P касается линии ограничения (2).

Из (3) с учетом (7) следует

$$l = R\,\frac{1 - 2\sin\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}. \tag{8}$$

Подставляя (7) в (5), находим

$$R + a = R\alpha + 2l, \tag{9}$$

что позволяет по заданному a вычислять α и l. Из (9) и (8) следует, что при уменьшении a до нуля α также уменьшается до нуля, а l стремится к $R/2$, при увеличении a до $R(\pi/3 - 1)$ α увеличивается до $\pi/3$, а l уменьшается до нуля.

Соотношение (7) отражает тот факт, что вне зависимости от предыдущего пути перемещающаяся под углом α к $0x$ точка P в момент соприкосновения с D имеет ординату $y_P = R\sin\dfrac{\alpha}{2}$, т.е. видна из точки E под углом $\alpha/2$. Это позволяет определить элементы траектории $S_{\alpha_{1-2}}$ при перемещении P из любой точки границы D, характеризуемой ординатой $y_1 = R\sin\dfrac{\alpha_1}{2}$, в любую точку границы D, имеющую ординату $y_2 = R\sin\dfrac{\alpha_2}{2}$. При этом $\alpha_1 < \alpha_2 \le \alpha_k$, где критический угол $\alpha_k = 2\arcsin 0{,}25$, о чем пойдет речь дальше. Траектория перемещения состоит из двух отрезков касательных l_1 и l_2, сопряженных дугой $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ (рис. 3). Значения l_1 и l_2 получаем решением системы двух уравнений, отражающих равенство координат точек P_2 и C_2:

$$\begin{cases} x_{P_2} = x_{C_2}, \\ y_{P_2} = y_{C_2}, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} R\cos\dfrac{\alpha_1}{2} + l_1\cos\alpha_1 + R(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) + l_2\cos\alpha_2 = \\ = R\cos\dfrac{\alpha_2}{2} + l_1 + R(\alpha_2 - \alpha_1) + l_2, \\ R\sin\dfrac{\alpha_1}{2} + l_1\sin\alpha_1 + R(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) + l_2\sin\alpha_2 = R\sin\dfrac{\alpha_2}{2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$l_1 = R\,\frac{B\sin\dfrac{\alpha_2}{2} - A\cos\dfrac{\alpha_2}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha_1}{2}\sin\left(\dfrac{\alpha_2}{2} - \dfrac{\alpha_1}{2}\right)},\quad l_2 = R\,\frac{A\cos\dfrac{\alpha_1}{2} - B\sin\dfrac{\alpha_1}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha_2}{2}\sin\left(\dfrac{\alpha_2}{2} - \dfrac{\alpha_1}{2}\right)}, \tag{10}$$

где

$$A = \left(\cos\frac{\alpha_1}{2} - \cos\frac{\alpha_2}{2}\right) + (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) - (\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$B = \left(\sin\frac{\alpha_2}{2} - \sin\frac{\alpha_1}{2}\right) - (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

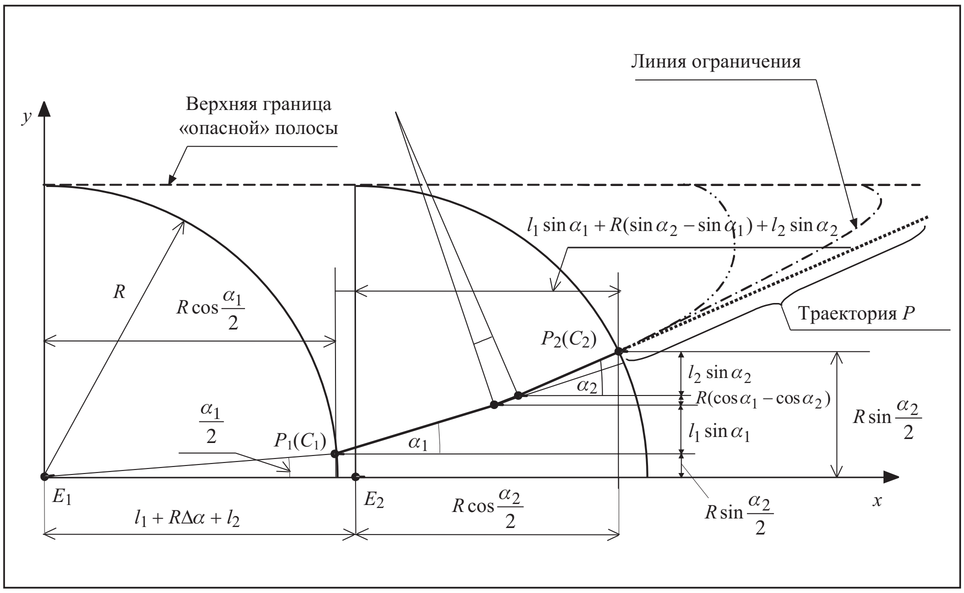

Рис. 3

Поскольку дугу $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ можно представить суммой сколь угодно большого количества дуг $\Delta\alpha = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i\alpha$, то это позволяет заменить траекторию $S_{\alpha_{1-2}}$, состоящую из дуги $\Delta\alpha \cdot R$ и двух отрезков касательных l_1 и l_2, суммой сколь угодно большого количества элементарных звеньев $\Delta_i S = l_i + \Delta_i\alpha \cdot R + l_{i+1}$. Так как $S_P = S_E$, а проекция новой траектории на $0x$ меньше, чем проекция первоначальной, то новая траектория короче исходной. Поэтому в классе заданных траекторий невозможно указать траекторию наименьшей длины. Чем больше элементарных звеньев содержит траектория, тем в большем числе точек она касается линии ограничения, приближаясь к ней и по конфигурации и по длине. При этом линия ограничения тоже изменяется, так как в силу соотношения (2) она зависит от длины траектории P. В пределе, когда $\Delta_i\alpha$ стремятся к нулю, P перемещается по линии ограничения, участвуя в относительном движении вдоль границы D и в переносном движении вместе с D (рис. 4). Длина ее траектории становится равной длине соответствующего участка линии ограничения. При этом радиус кривизны траектории P становится переменным, что выводит ее за пределы условия задачи.

При уходе от преследования P может переходить на дугу противоположной направленности только после достижения угла траектории $\alpha \geq \pi/3$. Невыполнение этого условия приведет к пересечению D, так как для любой точки последующего участка траектории будет справедливо неравенство $y_P < R$.

Обратим внимание на то обстоятельство, что когда P пребывает на линии ограничения в такой точке, в которой радиус кривизны линии $\rho = R$, то P может продолжать свое дальнейшее перемещение по дуге окружности, обходя D. Угол наклона траектории P в этой точке будем называть критическим. Необходимый для его вычисления радиус кривизны линии ограничения находим по формуле

$$\rho = \frac{dS_\alpha}{d\alpha}, \quad (11)$$

где

$$dS_\alpha = \sqrt{(dx_\alpha)^2 + (dy_\alpha)^2}. \quad (12)$$

Из (7) и (1) находим
$$dy_\alpha = \frac{R}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\, d\alpha, \quad (13)$$

$$dx_\alpha = dx_y \cdot dy_\alpha = R \cdot \frac{\cos\alpha}{4\sin\frac{\alpha}{2}} d\alpha, \tag{14}$$

поэтому

$$dS_\alpha = \frac{R}{4\sin\frac{\alpha}{2}} d\alpha, \tag{15}$$

$$\rho = \frac{R}{4\sin\frac{\alpha}{2}}. \tag{16}$$

Из $\rho = R$ находим $\sin\frac{\alpha_k}{2} = 0{,}25$, т.е. $\alpha_k = 2\arcsin 0{,}25 \approx 0{,}505$ рад. $\approx 28^\circ 57' 18''$.

Из (16) следует, что с увеличением α радиус кривизны ρ уменьшается, и при $\alpha \ge \alpha_k$ имеем $\rho \le R$, что позволяет P переходить на траекторию, состоящую только из дуги окружности.

Длину $S_{\alpha_{1-2}}$ траектории P во время ее движения по линии ограничения находим из (15):

$$S_{\alpha_{1-2}} = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{R}{4\sin\frac{\alpha}{2}} d\alpha = \frac{R}{2}\ln\frac{\pi\frac{\alpha_2}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{4}}. \tag{17}$$

Этот же результат следует из (13) на основании присущего характеристическому треугольнику соотношения $dS = \frac{dy}{\sin\alpha}$.

Абсциссу P в момент ее движения по линии ограничения под углом α_2 к оси $0x$ находим из (14):

$$x_{P_{\alpha_2}} = \int R\frac{\cos\alpha}{4\sin\frac{\alpha}{2}} d\alpha = R\left(\alpha_1 + \cos\frac{\alpha_2}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\operatorname{tg}(\alpha_2/4)}{\operatorname{tg}(\alpha_1/4)}\right) + l.$$

Приведенные выше соотношения обусловлены не только свойствами линии ограничения, с которой совмещается траектория P, когда $\Delta_i\alpha$ стремится к нулю, но и свойствами самой траектории. Используя соотношения (10) и преобразование

$$\lim_{\Delta_i\alpha\to 0}(l_i + \Delta_i\alpha + l_{i+1}) = \lim_{\Delta_i\alpha\to 0}\Delta_i S = \lim_{\Delta_i\alpha\to 0}\left(\Delta_i\alpha\cdot\frac{\Delta_i S}{\Delta_i\alpha}\right) = d\alpha\cdot S'_\alpha = dS_\alpha,$$

получаем $dS_\alpha = R\cdot\frac{d\alpha}{4\sin(\alpha/2)}$, что совпадает с (15).

Если бы речь шла о поиске траектории скорейшего ухода P от E — скорейшего выхода P из «опасной» полосы шириной R, то можно было бы ограничиться проведенным исследованием, и оптимальная в указанном смысле траектория была бы пределом кривой, составленной (с точностью до a) из уменьшающихся отрезков прямой и дуг радиуса R.

Кривая $S = \frac{R}{2}\ln\left(\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{4}\right)/\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{4}\right)\right)$ представляет собой эластику, рассматриваемую в гидродинамике и механике [9]. По таким траекториям движутся частицы жидкости, огибая перемещающийся цилиндр; такую форму принимает абсолютно гибкий прут, подвергнутый продольному сжатию.

Такая траектория является самой короткой для задачи выхода объекта P из «опасной полосы» (см. зоны I–III на рис. 4). В подвижной системе координат (связанной с объектом E) это имеет смысл «непосредственного» движения P по границе области D. Однако эта траектория включает в себя участок с непрерывно изменяющейся кривизной, что, строго говоря, выходит за пределы исходной постановки задачи (см. рис. 4).

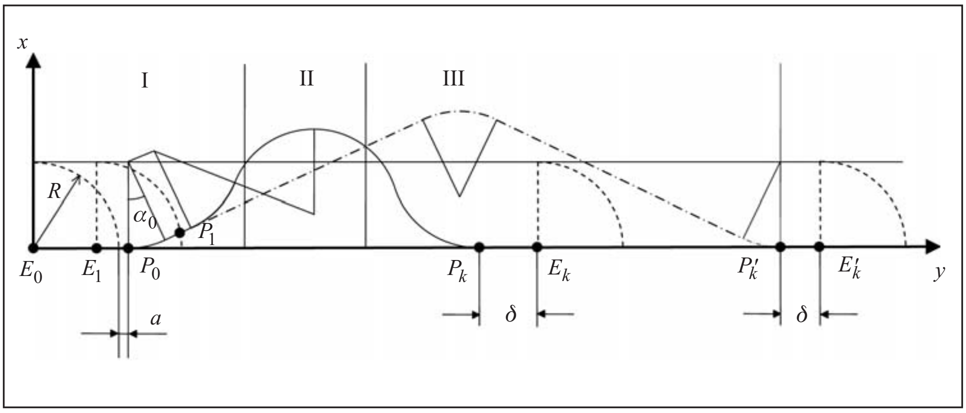

Рис. 4

На практике в первой фазе движения объекта P (см. рис. 4) его траектория описывается некоторой совокупностью конечного числа участков, состоящих из дуг и отрезков прямых, и требуемая точность решения задачи рассчитывается конкретно. Но поскольку в статье речь идет о задаче ухода P от E с последующим переходом к преследованию последнего, здесь подбираем другие оптимальные траектории.

Установление соответствующего поведения P определяется задаваемыми требованиями к значениям «тактически-целевой» пары параметров S и δ , которые не находятся в отношении монотонности, т.е. тенденция к уменьшению длины S траектории P «вокруг» E сопровождается тенденцией увеличения заключительного расстояния δ между P и E, и наоборот. И в этой связи следует отметить то качественное свойство, что построение траекторий меньшей длины S тяготеет к большему удельному весу составляющих дуг, а построение траекторий, характеризующихся меньшим значением δ, тяготеет к большему удельному весу составляющих отрезков прямых.

Один из возможных примеров качественного соотношения между обоими соответствующими типами траекторий P показан на рис. 4.

Таким образом, эти обстоятельства, по меньшей мере, затрудняют выработку единого правила формирования искомой траектории с достаточной точностью и вынуждают для каждой конкретной ситуации, для каждой позиции пользователей производить отдельное графоаналитическое построение искомой траектории P, что, вообще говоря, превращается в процесс решения самостоятельной задачи.

Подобный уровень модельных исследований при разработке алгоритмов управления движением (поведением) приближает тактические возможности проектируемых беспилотных летательных аппаратов — авиационных средств спецробототехники — к тактическим возможностям существующих пилотируемых самолетов, что является актуальной задачей современного авиастроения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 479 с.
2. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1989. — 60 с.
3. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985. — 520 с.
4. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980. — 319 с.
5. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. — К.: Наук. думка, 1992. — 384 с.
6. Шибаев С.В. О некоторых содержательных сценариях поведения игроков в процессах вычисления равновесия в играх при наличии неполной информации // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 1. — С. 152–170.
7. Об одной задаче преследования-убегания / С.Ф. Кривой, А.П. Криковлюк, И.Г. Мороз-Подворчан и др. // Там же. — 1992. — № 3. — С. 138–143.
8. Криковлюк А.П., Мороз-Подворчан И.Г. Об определяющей особенности проектирования одного класса специализированных систем управления // Управляющие системы и машины. — 2011. — № 1. — С. 63–69.
9. Жермен П. Курс механики сплошных сред. — М.: Высш. шк., 1983. — 399 с.

Поступила 19.02.2012