УДК 519.217; 519.718; 519.837

В.К. ЯСИНСКИЙ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ И МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Ключевые слова: *стохастическая динамическая система, система с последействием, марковское возмущение.*

ВВЕДЕНИЕ

С помощью второго метода функционалов Ляпунова–Красовского для диффузионных стохастических дифференциально-функциональных уравнений (ДСДФУ) с учетом внутренних параметров типа марковских процессов и внешних возмущений типа цепей Маркова получены достаточные условия асимптотической устойчивости тривиального решения в различных понятиях, которые записаны в виде неравенств, содержащих коэффициенты исходного уравнения. Это позволяет при исследовании реальных процессов в виде ДСДФУ так выбирать коэффициенты этих уравнений, чтобы гарантировать стаблизацию работы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} \equiv \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},\ t \geq 0\}, \mathbf{P})$ — вероятностный базис [1, 15]; $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ — разрывный марковский процесс со значениями в метрическом пространстве $\mathbf{Y}$ с переходной вероятностью $\mathbf{P}(s, y, t)$; $(\eta_k,\ k \geq 0)$ — цепь Маркова со значениями в метрическом пространстве $\mathbf{H}$ с переходной вероятностью на k-м шаге $\mathbf{P}_k(h, G)$. Рассмотрим стохастические уравнения возмущенного движения диффузионного типа и решим вопрос об устойчивости тривиального решения в различных вероятностных определениях.

Пусть задано стохастическое диффузионное дифференциально-функциональное уравнение (ДСДФУ) на базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$, которое будем называть динамической системой случайной структуры [2] с последействием

$$dx(t) = a(t, x_t, \xi(t))dt + b(t, x_t, \xi(t))dw(t), \tag{1}$$

с марковскими переключениями

$$\Delta x(t)|_{t=t_k} \equiv x(t_k) - x(t_k-) = g(t_k-, x_{t_k-}, \xi(t_k), \eta_k), \tag{2}$$

$$t_k \in S \equiv \{t_n \uparrow,\ n \in N\},\quad \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty,$$

и начальными условиями

$$\xi(t_0) = y \in \mathbf{Y},\ \ x_{t_0} = \varphi_0 \in \mathbf{D}_m \equiv \mathbf{D}([-\tau, 0], \mathbf{R}^m),\ \ \tau > 0,\ \ \eta_{k_0} = h, \tag{3}$$

где по определению $x_t \equiv \{x(t+\theta),\ \theta \in [-\tau, 0]\} \in \mathbf{D}_m$ — отрезок траектории $x(t, \omega)$, $\mathbf{D}_m$ — пространство Скорохода непрерывных справа функций, имеющих левосторонние пределы [5].

Допустим, что:

i) измеримые по совокупности переменных отображения $a: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{D}_m \times \mathbf{Y} \to \mathbf{R}^m$; $b: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{D}_m \times \mathbf{Y} \to \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$; $g: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{D}_m \times \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \to \mathbf{R}^m$ удовлетворяют по второму аргументу условию Липшица

$$|a(t,\varphi^{(1)}, y)-a(t,\varphi^{(2)}, y)|+||b(t,\varphi^{(1)}, y)-b(t,\varphi^{(2)}, y)||+$$
$$+|g(t,\varphi^{(1)}, y, h)-g(t,\varphi^{(2)}, y, h)|\le \Lambda|\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}| \tag{4}$$

$\forall\, t\ge 0,\ y\in\mathbf{Y},\ h\in\mathbf{H},\ \Lambda>0$ и условию

$$|a(t, y, 0)|+||b(t, y, 0)||+|g(t, y, h, 0)|=c<\infty,\ t\ge 0,\ y\in\mathbf{Y},\ h\in\mathbf{H}; \tag{5}$$

ii) задана монотонно возрастающая последовательность моментов времени $S\equiv\{t_n, n\in\mathbf{N}\},\ \lim\limits_{t\to\infty} t_n=\infty$;

iii) $w(t)\equiv w(t,\omega)\in R^m$ — m-измеримый стандартный винеровский процесс [3].

Норму в пространстве Скорохода $\mathbf{D}_m$ зададим аналогично, как в случае пространства непрерывных функций $C([-\tau,0])$ [4, 5, 16, 17], а именно

$$||\varphi(\theta)||\equiv \sup_{-\tau\le\theta\le 0}|\varphi(\theta)|.$$

Заметим, что с такой нормой пространство Скорохода $\mathbf{D}_m$ является неполным пространством. Поэтому в дальнейшем под $\mathbf{D}_m$ будем понимать пространство Скорохода $\widetilde{\mathbf{D}}_m$, которое содержит пределы фундаментальных последовательностей [5].

Определение 1. Случайный процесс $x(t)\equiv x(t,\omega)\in\mathbf{R}^m$ назовем сильным решением задачи Коши (1), (3) с марковскими переключениями (2), если $x(t)$ согласован с потоком σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t,\ t\ge 0\}\subset\mathcal{F}$ и при $t\ge t_0\ge 0$ удовлетворяет с вероятностью единица стохастическому интегральному уравнению

$$x(t)=x(s)+\int_s^t a(\tau, x_\tau, \xi(\tau))d\tau+\int_s^t b(\tau, x_\tau, \xi(\tau))dw(\tau) \tag{6}$$

для всех $s\in[t_k, t_{k+1})$; $t\in(s, t_{k+1})$, $t_k\ge t_0$, при этом

$$x(t_k)=x(t_k-)+g(t_k-, x_{t_k-}, \xi(t_k), \eta_k) \tag{7}$$

при всех $t_k\ge t_0$ и $k\ge\inf\{n: t_n\ge t_0\}$.

Понятно, что определенные выше условия относительно отображений a, b и g гарантируют существование сильного решения задачи (1)–(3) с точностью до стохастической эквивалентности при любых $t_0\ge 0$, $\varphi_0\in\mathbf{D}_m$ и заданных реализациях марковского процесса $\{\xi(t), t\ge t_0\}\subset\mathbf{Y}$ и цепи Маркова $\{\eta_k, k\ge k_0\}\subset\mathbf{H}$ [5–7].

Поскольку распределение реализаций сильного решения $x(t)\equiv x(t,\omega)\in\mathbf{R}^m$ ДСДФУ (1) однозначно находится с помощью начальных данных (3), вероятностные характеристики решения $x(t)$ естественно однозначно определить с помощью начальных данных $\xi(t_0)=y$, $\eta_{k_0}=h$, $x_{t_0}=\varphi_0$, далее его будем обозначать $x(t, t_0, \varphi_0, y, h)$.

Случайные перемены структуры параметра $\xi(t)\in\mathbf{Y}$ в ДСДФУ (1), как правило, будем задавать одним из следующих способов [4, 7, 8].

Способ 1. Пусть $\xi(t)\in\mathbf{Y}$ — разрывный скалярный марковский процесс, условная вероятность которого допускает разложениее [9, 17, 22]

$$\mathbf{P}\{\xi(t+\Delta t)\in[\beta, \beta+\Delta\beta]/\xi(t)=\alpha\ne\beta\}=p(t,\alpha,\beta)\Delta\beta\Delta t+o(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}\{\xi(\tau)=\alpha,\ t<\tau<t+\Delta t/\xi(t)=\alpha\}=1-p(t,\alpha)\Delta t+o(\Delta t), \tag{8}$$

где $\mathbf{P}\{\circ/\circ\}$ — условная вероятность; $o(\Delta t)$ — бесконечно малая величина высшего порядка малости относительно Δt. Отметим, что при условии регулярности почти все реализацации $\xi(t)$ есть кусочно-постояными непрерывными справа функциями [5, 23].

Способ 2. Скалярный процесс $\xi(t)$ — однородная марковская цепь с конечным числом состояний $\mathbf{Y} \equiv \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ и определенными параметрами q_{ij} при условии $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$, $i, j = \overline{1, k}$. При этом условные вероятности допускают разложение

$$\mathbf{P}\{\xi(t+\Delta t) = y_j / \xi(t) = y_i\} = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\mathbf{P}\{\xi(\tau) = y_i, t < \tau < t + \Delta t / \xi(t) = y_i\} = 1 - q_i \Delta t + o(\Delta t). \tag{9}$$

Способ 3. В момент τ изменения структуры системы $y_i \to y_j$ осуществляется случайная перемена фазового вектора $x(\tau - 0) = x$, $x(\tau) = z$, для которого задана условная плотность $p_{ij}(\tau, z)$, а именно

$$\mathbf{P}\{x(\tau) \in [z, z+dz] / x(t-0) = x\} = p_{ij}(\tau, z/x)dz + o(dz). \tag{10}$$

При исследовании устойчивости ДСДФУ (1) с параметром $\xi(t)$ в [4] условная плотность распределения $p_{ij}(\tau, z/x)$ прыжков фазового вектора непрерывна по τ и имеет компактный носитель, который удовлетворяет условиям

$$h_1|x(t)| \leq |z| \leq h_2||x_t||; \ 0 < h_1 < h_2; \ p_{ij}(\tau, z/0) = o(z).$$

Эти условия исключают попадание процесса $x(t)$ в результате прыжка в точку $x = 0$. Однако если в данный момент t^* имеем $x(t^*) = 0$, то с вероятностью единица $x(t) \equiv 0$ при всех $t > t^*$.

Рассмотрим сначала первую особенность относительно моделирования системы (1), которая находится под влиянием внутреннего (параметрического) возмущения $\xi(t)$ [2] с начальными данными $\xi(t_0) = y \in \mathbf{Y}$, $x_{t_0} = \varphi_0$ (без учета внешних марковских переключений (2)).

Допустим для упрощения, что $\xi(t)$ — простая марковская цепь с конечным числом состояний, т.е. $\mathbf{Y} \equiv \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ (способ 2). Это означает, что реализации $\xi(t)$ имеют почти постоянное значение, а переходы — переключения системы — происходят в случайные моменты времени.

Тогда на случайном интервале $t \in [\tau - h, \tau)$, где $\xi(t) = y_i \in \mathbf{Y}$, движение будет происходить в силу ДСДФУ (1) для $t \in [\tau - h, \tau)$:

$$dx(t) = a(t, x_t, y_i)dt + b(t, x_t, y_i)dw(t), \tag{11}$$

$$x(\tau - h) = x, \ \ y(\tau - h) = y_i.$$

Далее, если τ — момент перехода значения $\xi(\tau - 0) = y_i$ к значению $\xi(\tau) = y_j \neq y_i$, то на следующем интервале постоянства $\xi(\tau) = y_j$ следует решать ДСДФУ (10) с заменой y_j на y_i. При этом возникает проблема выбора начального условия φ для нового ДСДФУ на отрезке $t \in [\tau, \tau + h_1]$:

$$dx(t) = b(t, x_t, y_i)dt + b(t, x_t, y_i)dw(t), \ t \in [\tau, \tau + h_1]. \tag{12}$$

Выбор φ не может определяться математическими предположениями, а полностью подчиняется реальным свойствам объекта, который моделируется [4, 18].

Таким образом, решение $x(t)$ уравнения (1), разрывный марковский процесс $\xi(t)$ и начальное условие (3) на каждом интервале постоянства процесса $\xi(t)$ определяет марковский процесс $\{x(t), \xi(t)\}$ [10], в котором случайная составляющая $x(t) \in \mathbf{D}_m$ характеризует изменения вектора состояния системы, а $\xi(t)$ —

случайные изменения ее структуры с учетом цепи Маркова $\{\eta_k, k \geq 0\}$, которая входит как аргумент в функцию отображения $g(\cdot, \cdot, \cdot, \eta_k)$ [20, 22].

Этим объясняется определение системы (1) как системы случайной структуры.

Наиболее интересными в большинстве случаев являются следующие варианты поведения траектории сильного решения ДСДФУ (1) с начальным условием $\xi(t_0) = y \in \mathbf{Y}$, $x_{t_0} = \varphi_0$ без присутствия внешних марковских переключений $\{\eta_k, k \geq 1\}$.

В1. В момент скачкообразного изменения структуры $\xi(t)$ фазовый вектор $x(t)$ изменяется непрерывно с вероятностью единица, т.е. в момент τ изменения структуры системы не происходит:

$$x(\tau - 0) = x(\tau). \tag{13}$$

В2. В момент $\tau > t_0$ скачкообразного изменения структуры фазовый вектор единственным образом определяется состоянием, в котором находилась система непосредственно перед изменением структуры и переходом от состояния $\xi(\tau - 0) = y_i$ в состояние $\xi(\tau) = y_j$. В этом случае естественно предполагать, что

$$x(\tau) = \varphi_{ij}(x(\tau - 0)), \quad i \neq j, \tag{14}$$

где $\varphi_{ij} \in C(\mathbf{R}^m)$, причем $\varphi_{ii}(0) = 0$.

Особо отметим случай линейности функции $\varphi_{ij}(x)$, когда существуют такие матрицы K_{ij}, что

$$x(\tau) = K_{ij} x(\tau - 0). \tag{15}$$

Отметим, что случай В1 следует из (15) при $K_{ij} = I$, где I — единичная матрица порядка $m \times m$.

В3. Наиболее общим считается случай, когда для случайного момента τ изменения структуры системы (1) $y_i \to y_j$ следует применить условный закон распределения (10) начальным состоянием $x(\tau) \in \mathbf{R}^m$, $\tau \in \mathbf{R}_+$, $\omega \in \Omega$ для измененной структуры ДСДФУ (1).

Замечание 1. Будем считать, что почти все реализации пары процессов $\{x(t), \xi(t)\}$ — непрерывные справа.

Очевидно, что случай (13), (14) вытекает из (10), если

$$p_{ij}(\tau, z / x) = \delta(z - x) \text{ или } p_{ij}(\tau, z / x) = \delta(z - \varphi_{ij}(x)), \tag{16}$$

где $\delta(z)$ — δ-функция Дирака [11].

Таким образом, определение системы случайной структуры с внешними возмущениями типа цепи Маркова предусматривает:

а) задание ДСДФУ (1) и начальные условия (3), $\xi(t_0) = y \in \mathbf{Y}$; $x_{t_0} = \varphi_0$; $\eta_{k_0} = h$;

б) вероятностные характеристики разрывного процесса $\xi(t)$, которые определяют случайное изменение структуры по (8) (способ 1); (9) (способ 2) или ДСДФУ с пуассоновскими возмущениями [11–14], а именно

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))dt + b(t, \xi(t))dw(t) + \int_U c(t, \xi(t), u)\tilde{\nu}(dt, du),$$

где $w(t) \in \mathbf{R}^m$ — m-измеримый винеровской процесс, не зависимый от случайной пуассоновской меры $\nu(dt, du)$ [5].

Обозначим $\mathbf{P}_k((y,h),\Gamma\times G)$ переходную вероятность цепи Маркова $(\xi(t_k),\eta_k)$ на k-м шаге. Соответственно к принятым в теории марковских процессов обозначений вероятности событий [3] введем индексы так, чтобы выполнялись равенства

$$\mathbf{P}_{y,h}^{t_k}(\xi(t_{k+1})\in\Gamma,\eta_{k+1}\in G)\equiv\mathbf{P}_k((y,h),\Gamma\times G) \tag{17}$$

при всех $t_k\ge t_0$, $y\in\mathbf{Y}$, $h\in\mathbf{H}$ и борелевских $\Gamma\in\mathbf{Y}$ и $G\subset\mathbf{H}$.

Далее введем функцию

$$\mathbf{P}_k((y,h,x_t),\Gamma\times G\times C)\equiv\mathbf{P}_{y,h}^{t_k}(x(t_{k+1},t_k,y,h,x_t)\in C,\xi(t_{k+1})\in\Gamma,\eta_{k+1}\in G) \tag{18}$$

при всех $t_k\in S\cup\{t_0\}$, $k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, $x_t\in\mathbf{D}_m$, $y\in\mathbf{Y}$, $h\in\mathbf{H}$ и борелевских $C\subset\mathbf{R}^m$, $\Gamma\subset\mathbf{Y}$, $G\subset\mathbf{H}$.

Определение 2. Дискретный оператор Ляпунова–Красовского $(lv_k)(x_t,y,h)$ на последовательности измеримых скалярных функционалов $v_k(x_t,y,h):\mathbf{D}_m\times\mathbf{Y}\times\times\mathbf{H}\to\mathbf{R}^1$, $k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, для ДСДФУ (1) с внешними марковскими переключениями (2) определяют равенством

$$(lv_k)(x_t,y,h)\equiv\int\limits_{\mathbf{D}_m\times\mathbf{Y}\times\mathbf{H}}\mathbf{P}_k(x,y,h)(dl\times du\times dz)v_{k+1}(l,u,z)-v_k(x_t,y,h). \tag{19}$$

Определение 3. Если $t_k=k\beta$ для всех $k\in\mathbf{N}$ и при некотором $\beta>0$ отображения a, b и g не зависят от t, процесс $\xi(t)$ и цепь Маркова η_{k+1} однородные, то систему (1)–(3) назовем автономной.

В случае автономной системы (1)–(3) индексом k в функции $\mathbf{P}_k((y,h,x),\Gamma\times G\times C)$ можно пренебречь и дискретный оператор Ляпунова–Красовского следует определить равенством для $\varphi\in\mathbf{D}_m$

$$(lv)(x_t,y,h)\equiv\int\limits_{\mathbf{D}_m\times\mathbf{Y}\times\mathbf{H}}\mathbf{P}(\varphi,y,h)(dl\times du\times dz)v(l,u,z)-v(x_t,y,h). \tag{20}$$

При использовании второго метода Ляпунова–Красовского к ДСДФУ (1) с внешними марковскими переключениями (2) необходимы специальные последовательности вышеупомянутых функционалов $v_k(x_t,y,h)$, $k\in\mathbf{N}$.

Определение 4. Функционалом Ляпунова–Красовского для системы случайной структуры (1)–(3) назовем последовательность неотрицательных функций $\{v_k(\varphi,y,h),\,k\ge 0\}$, если выполнены следующие условия:

1) при всех $k\ge 0$, $y\in\mathbf{Y}$, $h\in\mathbf{H}$, $\varphi\in\mathbf{D}_m$ определен дискретный оператор Ляпунова-Красовского $(lv_k)(\varphi,y,h)$ с использованием определения 2;

2) при $r\to\infty$

$$\bar{v}(r)\equiv\inf_{\substack{k\in\mathbf{N},\,y\in\mathbf{Y},\\ h\in\mathbf{H},\,\|\varphi\|\ge r}}v_k(\varphi,y,h)\to+\infty; \tag{21}$$

3) при $r\to 0$ имеем

$$\underline{v}(r)\equiv\sup_{\substack{k\in\mathbf{N},\,y\in\mathbf{Y},\\ h\in\mathbf{H},\,\|\varphi\|\ge r}}v_k(\varphi,y,h)\to 0;\ \underline{v}(r)\to 0, \tag{22}$$

причем $\bar{v}(r)$ и $\underline{v}(r)$ — непрерывные и монотонные.

Будем рассматривать устойчивость тривиального решения $x\equiv 0$ системы (1)–(3), т.е. выполнения (5) при $c=0$ [6, 8, 15, 19].

Определение 5. Систему случайной структуры (1)–(3) назовем:

— устойчивой по вероятности, если для $\forall \varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, когда из неравенства $||\varphi|| < \delta$ следует неравенство

$$\mathbf{P}\{\sup_{t \geq t_0} |x(t, t_0, \varphi, y, h)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2 \tag{23}$$

при всех $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$ и $t_0 \geq 0$;

— асимптотически устойчивой по вероятности, если выполняется (23) и можно указать такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что с вероятностью единица для реализаций, которые удовлетворяют неравенству

$$\sup_{t \geq t_0} ||x(t, t_0, \varphi, y, h)|| < \delta_1,$$

имеет место соотношение

$$\lim_{t \to \infty} ||x(t, t_0, \varphi, y, h)|| = 0$$

при всех $t_0 \geq 0$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$ и $||\varphi|| < \delta_2$;

— асимптотически стохастически устойчивой, если она устойчива по вероятности и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_3 > 0$ такое, что

$$\lim_{T \to \infty} \mathbf{P}\{\sup_{t \geq T} |x(t, t_0, \varphi, y, h)| > \varepsilon\} = 0 \tag{24}$$

при всех $||\varphi|| < \delta_3$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$ и $T \geq t_0 \geq 0$.

Определение 6. Систему случайной структуры (1)–(3) назовем:

— p-устойчивой (при некотором $p > 0$), если для $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, когда из неравенства $||\varphi|| < \delta$ следует неравенство

$$\mathbf{E}|x(t, t_0, \varphi, y, h)|^p < \varepsilon \tag{25}$$

при всех $t > t_0$, $t_0 \geq 0$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$;

— асимптотически p-устойчивой (при некотором $p > 0$), если система p-устойчивая и существует такое $\delta_1 > 0$, когда из неравенства $||\varphi|| < \delta_1$ следует

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{y \in \mathbf{Y},\, h \in \mathbf{H}} \mathbf{E}|x(t, t_0, \varphi, y, h)|^p = 0 \tag{26}$$

при всех $t_0 \geq 0$.

Заметим, что при $p = 2$ имеем устойчивость в среднем квадратическом (l.i.m.) (25) и асимптотическую устойчивость в l.i.m. (26).

Определение 7. Система случайной структуры (1)–(3) называется экспоненциально p-устойчивой при некотором $p > 0$, если существует такое $\delta > 0$, когда из неравенства $||\varphi|| < \delta$ следует неравенство

$$\mathbf{E}|x(t, t_0, \varphi, y, h)|^p \leq M e^{-\gamma(t - t_0)} |\varphi|^p \tag{27}$$

при некоторых $M > 0$, $\gamma > 0$ для любых $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $t_0 \geq 0$, $t \geq t_0$.

Заметим, что при $p = 2$ будем иметь экспоненциальную устойчивость в l.i.m.

Если (23), (24) или (25) выполнены для всех $x \in \mathbf{R}^m$, то имеется в виду устойчивость в целом.

3. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФУЗИОННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ И С МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Для дальнейшего изложения получим сначала оценки решения задачи (1)–(3) на интервалах $[t_k, t_{k+1})$ по значениям решения в точках t_k, $k \geq 0$.

Лемма 1. Пусть для ДСДФУ выполняются:

— неравенство Липшица (см. (4));

— неравенство равномерной ограниченности (см. (5)).

Тогда при всех $k \geq 0$ для сильного решения задачи Коши (1)–(3) имеет место неравенство

$$\mathbf{E}\{\sup_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} ||x_t||^2\} \leq 15(1+2\Lambda^2)[\mathbf{E}||x_{t_k}||^2 + 2c^2(t_{k+1}-t_k)] \times$$
$$\times \exp\{5\Lambda^2((t_{k+1}-t_k)^2+4)(t_{k+1}-t_k)\}. \qquad (28)$$

Доказательство. При всех $t \in [t_k, t_{k+1})$, $t_k \geq t_0$, из (6) легко получить неравенство

$$|x(t)| \leq |x(t_k)| + \int_{t_k}^{t} |a(\tau, \xi(\tau), x(\tau)) - a(\tau, \xi(\tau), 0)|\, d\tau + \int_{t_k}^{t} |a(\tau, \xi(\tau), 0)|\, d\tau +$$
$$+ \int_{t_k}^{t} ||b(\tau, \xi(\tau), x(\tau)) - b(\tau, \xi(\tau), 0)||\, dw(\tau) + \int_{t_k}^{t} ||b(\tau, \xi(\tau), 0)||\, dw(\tau). \qquad (29)$$

Возведем в квадрат левую и правую части неравенства (29):

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right),$$

вычислим sup от полученного выражения, запишем неравенство Коши–Буняковского для интеграла Римана и неравенство для оценки условного математического ожидания от квадрата sup интеграла Винера–Ито [3, 13] и с использованием неравенства (4) и условия (5) получим

$$\mathbf{E}\{\sup_{t_k \leq t < t_{k+1}} |x_t|^2 / \mathcal{F}_{t_k}\} \leq 5[\mathbf{E}||x_{t_k}||^2 + 2c^2(t_{k+1}-t_k) + \Lambda^2((t_{k+1}-t_k)+4)] \times$$
$$\times \int_{t_k}^{t} \mathbf{E}\{\sup_{t_k \leq t < t_{k+1}} |x(\tau)|^2 \mathcal{F}_{t_k}\} d\tau. \qquad (30)$$

Применяя далее к (30) неравенство Гронуолла [5], легко увидеть, что

$$\mathbf{E}\{\sup_{t_k \leq t < t_{k+1}} ||x||^2 / \mathrm{F}_{t_k}\} \leq 5[\mathbf{E}||x_{t_k}||^2 + 2c^2(t_{k+1}-t_k)] e^{5\Lambda^2((t_{k+1}-t_k)^2 + 4)(t_{k+1}-t_k)}. \qquad (31)$$

Для $t = t_{k+1}$ сильное решение системы (1)–(3) удовлетворяет неравенствам

$$\mathbf{E}\{||x_{t_{k+1}}||^2 / \mathcal{F}_{t_k}\} \leq 3[\mathbf{E}\{|x(t_{k+1}-)^2 / \mathcal{F}_{t_k}|\} + 2\mathbf{E}\{|g(t_{k+1}, x(t_{k+1}-), \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}) -$$
$$- g(t_{k+1}, 0, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1})|^2 / \mathcal{F}_{t_k}\} + 2\mathbf{E}\{|g(t_{k+1}, 0, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1})|^2 / \mathcal{F}_{t_k}\}] \leq$$
$$\leq 3\left[(1+2\Lambda^2)\mathbf{E}\left\{\sup_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} |x_t|^2 / \mathcal{F}_{t_k}\right\} + c^2\right]. \qquad (32)$$

Объединив два последних неравенства, получим нужное неравенство (28) леммы 1.

Замечание 2. Всюду далее будем считать $c = 0$, а также использовать обозначение

$$k_0 \equiv \begin{cases} \sup\{k \in N : t_k \leq t_0\} & \text{для} \quad t_0 \geq t_1, \\ 0 & \text{при} \quad t \in [0, t_1). \end{cases}$$

Теорема 1. Пусть:

1) имеет место условие Липшица (см. (4));

2) существуют функционалы Ляпунова–Красовского $v_k(\varphi, y, h)$ и $a_k(\varphi, y, h)$, $k \geq 0$, такие, что в силу системы (1) выполнено неравенство

$$(lv_k)(\varphi, y, h) \leq -a_k(\varphi, y, h), \quad k \geq 0; \qquad (33)$$

3) длины интервалов $[t_k, t_{k+1})$ не превышают $\Delta > 0$, т.е. $0 < |t_{k+1} - t_k| \le \Delta$, $k \ge 0$.

Тогда система случайной структуры (1)–(3) асимптотически стохастически устойчива в целом.

Доказательство. Обозначим $\mathcal{F}_{t_k}$ минимальную σ-алгебру, относительно которой измеримы $\xi(t)$ при всех $t \in [t_0, t_k]$ и η_n при $n \le k$. Тогда условное математическое ожидание вычислим по формуле [13]

$$\mathbf{E}\{v_{k+1}(x_{t_{k+1}}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}) / \mathcal{F}_{t_k}\} =$$
$$= \int\limits_{\mathbf{D}_m \times \mathbf{Y} \times \mathbf{H}} \mathbf{P}_k((\varphi, y, h)(dl \times du \times dz) v_{k+1}(l, u, z))|_{\substack{y=\xi(t_k),\\ \eta=\eta_k,\\ \varphi=x_{t_k}}} . \tag{34}$$

Далее по определению дискретного оператора Ляпунова–Красовского $(lv_k)(\varphi, y, h)$ (см. (19)) из равенства (34) с учетом (33) получим неравенство

$$\mathbf{E}\{v_{k+1}(x_{t_k+1}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}) / \mathrm{F}_{t_k}\} =$$
$$= v_k(x_{t_k}, \xi(t_k), \eta_k) + (lv_k)(x_{t_k}, \xi(t_k), \eta_k) \le \bar{v}(|x_{t_k}|) . \tag{35}$$

Из леммы 1 (из существования второго момента следует существование первого момента) и свойств функции $\bar{v}$ следует существование условного математического ожидания левой части неравенства (35).

Используя (34), (35), запишем вдоль решений (1)–(3) дискретный оператор Ляпунова–Красовского $(lv_k)(\varphi, y, h)$ по определению 2

$$lv_k(x_{t_k}, \xi(t_k), \eta_k) = \mathbf{E}\{v_{k+1}(x_{t_k}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1})) / \mathrm{F}_{t_k}\} -$$
$$-v_k(x_{t_k}, \xi(t_k), \eta_k) \le -a_k(x_{t_k}, \xi(t_k), \eta_k) \le 0. \tag{36}$$

Тогда при $k \ge 0$ имеет место неравенство

$$\mathbf{E}\{v_{k+1}(x_{t_k}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}) / \mathcal{F}_{t_k}\} \le v_k(x_{t_k}, \xi(t_k), \eta_k).$$

Это значит, что последовательность случайных величин $v_k(x_{t_k}, \xi(t_k), \eta_k)$ представляет супермартингал относительно F_{t_k} [1].

Далее, взяв математическое ожидание от обеих частей неравенства (36), просуммируем по k от $n \ge k_0$ к N. Получим

$$\mathbf{E}\{v_{N+1}(x_{t_{N+1}}, \xi(t_{N+1}), \eta_{N+1})\} - \mathbf{E}\{v_n(x_{t_n}, \xi(t_n), \eta_n)\} =$$
$$= \sum_{k=n}^{N} \mathbf{E}\{lv_k(x_{t_k}, \xi(t_k), \eta_k)\} \le -\sum_{k=n}^{N} \mathbf{E}\{a_k(x_{t_k}, \xi(t_k), \eta_k)\} \le 0. \tag{37}$$

Поскольку случайная величина $\sup\limits_{t_k \le t < t_{k+1}} |x(t)|^2$ не зависит от событий σ-алгебры $\mathcal{F}_{t_k}$ [13], то

$$\mathbf{E}\{\sup_{t_k \le t < t_{k+1}} ||x_t||^2 / \mathcal{F}_{t_k}\} = \mathbf{E}\{\sup_{t_k \le t < t_{k+1}} ||x_t||^2\}, \tag{38}$$

т.е. неравенство (38) имеет место и для обычного математического ожидания

$$\mathbf{E}\{\sup_{t_k \le t < t_{k+1}} ||x_t||^2\} \le 15(1 + 2\Lambda^2)[\mathbf{E}||\varphi||^2 + 2c^2\Delta] e^{5\Lambda^2(\Delta^2 + 4)\Delta} \tag{38*}$$

при $c = 0$, предполагая, что исследуем устойчивость тривиального решения.

Далее, легко видеть, что

$$\mathbf{P}\{\sup_{t \ge t_0} ||x_t(t_0, \varphi, y, h)|| > \varepsilon_1\} = \mathbf{P}\{\sup_{n \in N} \sup_{t_{k_0+n-1} \le t \le t_{k_0+n}} ||x_t(t_0, \varphi, y, h)|| > \varepsilon_1\} \le$$

$$\leq \mathbf{P}\{\sup_{n\in N} || x_{t_{k_0+n-1}}(t_0, \varphi, y, h_0)|| > \varepsilon_1\} \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\{\sup_{n\in N} v_{k_0+n-1}(x_{t_{k_0+n-1}}, \xi(t_{k_0+n-1}), \eta_{k_0+n-1}) \geq \bar{v}(\varepsilon_1)\}. \tag{39}$$

Если $\sup|x_{t_k}| \geq r$, то на основании (21) выполнено неравенство

$$\sup_{k\geq k_0} v_k(x_{t_k}, \xi(t_k), \eta_k) \geq \inf_{\substack{k\geq k_0,\, y\in\mathbf{Y},\\ h\in\mathbf{H},\, \|\varphi\|\geq r}} v_k(\varphi, y, h) = \bar{v}(r). \tag{40}$$

Теперь используем известное неравенство для неотрицательных супермартингалов [1, 5] для оценки правой части (39):

$$\mathbf{P}\{\sup_{n\in N} v_{k_0+n-1}(x_{t_{k_0+n-1}}, \xi(t_{k_0+n-1}), \eta_{k_0+n-1}) \geq \bar{v}(\varepsilon_1)\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\bar{v}(\varepsilon_1)} v_{k_0}(\varphi, y, h) \leq \frac{\bar{v}(x_t)}{\bar{v}(\varepsilon_1)}. \tag{41}$$

С учетом (39) неравенство (41) дает возможность гарантировать выполнение неравенства (23) устойчивости по вероятности в целом системы (1)–(3).

Из неравенства (37) следует оценка

$$\mathbf{E}\{v_{N+1}(x_{t_{N+1}}, \xi(t_{N+1}), \eta_{N+1})\} \leq$$

$$\leq v_{k_0}(\varphi, y, h) - \sum_{k=k_0}^{N} \mathbf{E}\{a_k(x_{t_k}, \xi(t_k), \eta_k)\} \leq v_{k_0}(\varphi, y, h) \tag{42}$$

при всех $N \geq k_0$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $\varphi \in \mathbf{D}_m$.

Заметим, что последовательность $\{a_k\}$, $k \geq 0$, представляет собой функционалы Ляпунова–Красовского. Тогда должны существовать [20] непрерывные строго монотонные функции $\underline{a}(r)$ и $\bar{a}(r)$, которое равны нулю при $r=0$ и такие, что

$$\underline{a}(||\varphi||) \leq a_k(\varphi, y, h) \leq \bar{a}(||\varphi||) \tag{43}$$

для $\forall k \in N$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$ и $\varphi \in \mathbf{D}_m$.

Таким образом, из сходимости ряда в левой части неравенства (42) следует сходимость ряда $\sum_{k=k_0}^{\infty} \mathbf{E}\{\bar{a}(|x_{t_k}(t_0, \varphi, y, h)|\}$ для $\forall t_0 \geq 0$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $\varphi \in \mathbf{D}_m$.

Тогда с учетом $\underline{a}(r)$ и равенства $\underline{a}(0) = 0$ окончательно получим

$$\lim_{k\to\infty} |x_{t_k}(t_0, \varphi, y, h)| = 0. \tag{44}$$

Из (44) следует стремление к нулю по вероятности последовательности $\bar{v}(|x_{t_k}(t_0, \varphi, y, h)|)$ при $k \to \infty$ для всех $t_0 \geq 0$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $\varphi \in \mathbf{D}_m$.

Таким образом, из свойств функционалов Ляпунова–Красовского неотрицательный супермартингал $v_k(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_k})$ при $k \to +\infty$ стремится к нулю по вероятности на всех реализациях процесса $\xi(t)$ и последовательности η_k.

Далее, неотрицательный, ограниченный сверху супермартингал имеет предел с вероятностью единица [3]. Из леммы 1 (неравенство (28)) получим асимптотическую стохастическую устойчивость в целом системы (1)–(3) по определению 5 (см. (24)). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1, 2 теоремы 1, а в силу системы (1)–(3) для последовательности функционалов Ляпунова–Красовского $\{v_k, k \geq 0\}$ справедливо строгое неравенство $(lv_k)(y, h, x_t) < 0$ для $\forall k \in N$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$ и $x_t \in \mathbf{D}_m$. Тогда система случайной структуры (1)–(3) устойчива по вероятности в целом.

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 в неравенствах (37)–(41) существенно использовалась неположительность дискретного оператора lv_k, а не неравенство (33). Поэтому выполнены все условия определения 5 устойчивости по вероятности в целом (23). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть на вероятностном базисе имеют место условия 1–3 теоремы 1, причем функционалы Ляпунова–Красовского $\{v_k\}$, $\{a_k\}$, $k \geq 0$, удовлетворяют неравенствам

$$c_1 |\varphi(0)|^2 \leq v_k(\varphi, y, h) \leq c_2 ||\varphi||^2, \tag{45}$$

$$c_3 |\varphi(0)|^2 \leq a_k(\varphi, y, h) \leq c_4 ||\varphi||^2 \tag{46}$$

при некоторых $c_i > 0$, $i = \overline{1,4}$, для всех $k \in N$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $\varphi \in \mathbf{D}_m$.

Тогда система случайной структуры (1)–(3) асимптотически устойчива в среднем квадратическом в целом.

Доказательство. Используя неравенство (36) для $n = k_0$, в силу (45) легко получить неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{||x_{t_{N+1}}||^2\} &\leq \frac{1}{c_1} \mathbf{E}\{v_{N+1}(x_{t_{N+1}}, \xi(t_{N+1}), \eta_{N+1})\} \leq \\ &\leq \frac{1}{c_1} \mathbf{E}\{v_{k_0}(\varphi, \xi(t_{k_0}), \eta_{k_0})\} \leq \frac{c_2}{c_1} ||\varphi||^2 \end{aligned} \tag{47}$$

для всех $N \geq k_0$, $k_0 \in N$, $x \in \mathbf{D}_m$ и начальных распределений случайного вектора $\{\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}\}$.

Отсюда по определению 6 (см. (25)) следует p-устойчивость системы случайной структуры (1)–(3) или устойчивость в l.i.m. (при $p = 2$).

С использованием (37), (45) и (46) можно получить неравенство

$$\sum_{k=k_0}^{N} \mathbf{E}\{||x_{t_{N+1}}||^2\} \leq \frac{1}{c_3} \sum_{k=k_0}^{N} \mathbf{E}\{a_k(\varphi, \xi(t_k), \eta_k)\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_3} \mathbf{E}\{v_{k_0}(\varphi, \xi(t_{k_0}), \eta_{k_0 t})\} \leq \frac{c_2}{c_3} ||\varphi||^2.$$

Это неравенство гарантирует сходимость ряда, членами которого выступают $\mathbf{E}\{||x_{t_{N+1}}||^2\}$ для любых начальных данных $x_{t_{k_0}} = \varphi$ и начальных распределений случайного вектора $\{\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}\}$.

Таким образом,

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{y \in \mathbf{Y},\, h \in \mathbf{H}} \mathbf{E}\{|x_{t_k}(t_0, \varphi, y, h)|^2\} = 0$$

при всех $t_0 \geq 0$, что и доказывает теорему 3.

Следствие 1. Если выполнены условия теоремы 2 и имеет место неравенство (45), то система случайной структуры (1)–(3) устойчива в l.i.m. в целом.

Теорема 4. Пусть имеют место условия теоремы 3 и существует такое число $\Delta_1 > 0$, что

$$|t_{k+1} - t_k| \geq \Delta_1 \tag{48}$$

при всех $k \in N$.

Тогда система случайной структуры (1)–(3) экспоненциально устойчива в l.i.m. в целом.

Доказательство. В силу неравенства (28) достаточно показать, что неравенство (38*) выполнено для $\forall \varphi \in \mathbf{D}_m$ при всех $t \in S$, поскольку для $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k > n$, из определения k_0 следует неравенство

$$e^{-\gamma(t_k - t_{k_0})} \leq e^{-\gamma(t_k - t_0)} e^{\gamma\Delta}. \tag{49}$$

Далее, воспользуемся обозначениями теоремы 1 и ранее доказанным равенством

$$\mathbf{E}\{v_{k+1}(x_{t_k+1},\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1})/\mathcal{F}_{t_k}\}=v_k(x_{t_k},\xi(t_k),\eta_k)+(lv_k)(x_{t_k},\xi(t_k),\eta_k) \quad (50)$$

для любых $k\in N$, $t\geq 0$ и начальных значений $x_{t_0}=\varphi_0$, $\xi(t_0),\eta_{k_0}$.

Из условий теоремы 4 следует неравенство

$$(lv_k)(\varphi,y,h)\leq -a_k(\varphi,y,h)\leq -c_3||\varphi||^2\leq -\frac{c_3}{c_2}v_k(\varphi,y,h).$$

Тогда из неравенства (49) легко получить ограниченность сверху математического ожидания от соответствующего условного математического ожидания

$$\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{v_{k+1}(x_{t_{k+1}},\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1})/\mathcal{F}_{t_{k+!}}\}\}\leq\left(1-\frac{c_3}{c_2}\right)\mathbf{E}\{v_k(x_{t_k},\xi(t_k),\eta_k)\}.$$

Если $k_0\geq 1$, то из последней оценки для $\forall k\geq k_0$ получим неравенство

$$\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{v_k(x_{t_k},\xi(t_k),\eta_k)/\mathcal{F}_{t_k}\}\}\leq\left(1-\frac{c_3}{c_2}\right)^{k-k_0}\mathbf{E}\{v_{k_0}(x_{t_{k_0}},\xi(t_{k_0}),\eta_{k_0})\}.$$

Отсюда, используя условия теоремы 3, имеем

$$\mathbf{E}\{|x_{t_k}(t_{k_0},\varphi,y,h)|^2\}\leq$$

$$\leq\frac{1}{c_1}\mathbf{E}\{v(\xi(t_k),\eta_k,x_{t_k}(t_{k_0},\varphi,y,h,x_t))\}\leq\frac{c_2}{c_1}\left(1-\frac{c_3}{c_2}\right)^{k-k_0}||\varphi||^2.$$

Очевидно, не теряя общности, можно положить $c_2>c_3$. Тогда $\left(1-\dfrac{c_3}{c_2}\right)\in(0,1)$.

Остается воспользоваться неравенством (49), что и доказывает теорему 4.

Модельная задача 1. Рассмотрим задачу о вероятностной устойчивости электрической схема [4], которая изображена на рис. 1. В подобном режиме работают большинство элементов релейных контактных схем. Отметим, что аналогичные схемы описывают изменение силы тока в аварийных режимах.

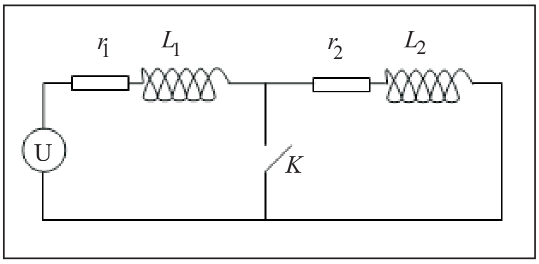

Рис. 1

Обозначим $i_1(t)$ ток в ветке генератора L_1, $i_2(t)$ — ток в ветке генератора L_2. Дифференциальные уравнения после замыкания ключа K имеют вид

$$L_1\frac{di_1}{dt}+r_1i_1=\mathbf{U};\ L_2\frac{di_2}{dt}+r_2i_2=0. \quad (51)$$

После размыкания ключа K ток $i_1(t)$ и ток $i_2(t)$ удовлетворяют уравнению

$$(L_1+L_2)\frac{di_1}{dt}+(r_1+r_2)i_1=\mathbf{U};\ i_2=i_1. \quad (52)$$

Допустим, что процесс замыкания и размыкания ключа K является обычной марковской цепью $\xi(t)$ с двумя возможными состояниями: $\xi_1(t)=0$ (ключ замкнут) и $\xi_2(t)=1$ (ключ разомкнут). При этом заданы интенсивности переходов q_{12}, q_{21}. Тогда системы (51), (52) можно объединить в одну систему случайной структуры

$$(L_1 + \xi(t)L_2)\frac{di_1}{dt} + (r_1 + \xi(t)r_2)i_1 = \mathbf{U}; \tag{53}$$

$$(L_2 + \xi(t)L_1)\frac{di_2}{dt} + (r_2 + \xi(t)r_1)i_2 = \xi(t)\mathbf{U}. \tag{54}$$

Для исследования изменения силы токов $i_1 \equiv i_1(t)$, $i_2 \equiv i_2(t)$ необходимо задать условие коммутации, т.е. начальные условия в момент изменения структуры цепи.

Пусть τ является моментом изменения структуры $y_2 \to y_1$ (замыкание ключа). Тогда по законам коммутации [9] следует равенство

$$i_1(\tau) = i_2(\tau) = i_1(\tau - 0) = i_2(\tau - 0)\,. \tag{55}$$

Более сложной является ситуация при размыкании ключа K. Поскольку в этом случае возникает вольтова дуга, надо рассматривать переходный процесс по так называемым некорректным начальным условиям [9]. Закон сохранения магнитного потокосцепления приводит к следующему условию коммутации: если τ является моментом размыкания ключа K $(y_1 \to y_2)$, то

$$i_1(\tau) = i_2(\tau) = \frac{L_1 i_1(\tau - 0) + L_2 i_2(\tau - 0)}{L_1 + L_2}. \tag{56}$$

Таким образом, работу электрической схемы (рис. 1) определяем системой случайной структуры (53), (54). При этом следует отметить, что начальные данные для каждой структуры задаются условиями (55), (56). В этом случае при замыкании ключа K токи $i_1(\tau)$, $i_2(\tau)$ изменяются непрерывно, а при размыкании ключа K токи $i_1(\tau)$, $i_2(\tau)$ изменяются скачкообразно.

Получим алгоритм исследования вероятностной устойчивости электрической системы, которая описывается динамической системой случайной структуры (53) с начальными условиями (55), (56).

Пусть построен вероятностный базис $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} \equiv \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, t \ge 0\}, \mathbf{P})$. Обозначим $\tilde{i}_1(t), \tilde{i}_2(t)$ установленный режим в цепи (см. рис. 1). Пусть также $x_1^{(t)} \equiv i_1(t) - \tilde{i}_1(t)$, $x_2^{(t)} \equiv i_2(t) - \tilde{i}_2(t)$. Тогда (53), (54) будет иметь вид

$$dx(t) = A(\xi(t))x(t)dt, \tag{57}$$

где $x(t) \equiv (x_1(t), x_2(t))^T$;

$$A(\xi(t)) \equiv -\begin{bmatrix} \dfrac{r_1 + \xi(t)r_2}{L_1 + L_2} & 0 \\ 0 & \dfrac{r_2 + \xi(t)r_1}{L_1 + L_2} \end{bmatrix};$$

$\xi(t)$ — простая марковская цепь с двумя состояниями: $\xi_1 = 0$ (ключ замкнут) и $\xi_2 = 1$ (ключ разомкнут) с соответствующими интенсивностями переходов q_{12}, q_{21}.

Условие коммутации (55) следует записать в виде $x(\tau) = K_{ij}x(\tau - 0)$, где

$$K_{12} = \frac{1}{L_1 + L_2}\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_1 & L_2 \end{bmatrix};\; K_{21} = I \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Введем следующие обозначения:

$$a \equiv \frac{r_1}{L_1}; \; b \equiv \frac{r_2}{L_2}; \; c \equiv \frac{L_1}{L_2}; \; e = \frac{ac+b}{c+1}; \; A_1 \equiv A(y_1) = -\frac{1}{c+1}\begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix};$$

$$A_2 \equiv A(y_2) = -eI. \qquad (57^*)$$

Рассмотрим функцию Ляпунова $v(x, y_i) = \varphi(y_i)||x||^2$; $\varphi_i \equiv \varphi(y_i) > 0$. Тогда

$$\left.\frac{d\mathbf{E}\{v\}}{dt}\right|_{\xi = y_1} = x^T \left\{ \frac{-2\varphi_1}{c+1}\begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \left[\frac{2\varphi_2}{c+1}\begin{pmatrix} c^2 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}\right] - \varphi_1 I q_{12} \right\} x;$$

$$\left.\frac{d\mathbf{E}\{v\}}{dt}\right|_{\xi = y_2} = x^T \{-2\varphi_2 eI + (\varphi_1 - \varphi_2) q_{21} I\} x.$$

Если обозначить $\psi \equiv \varphi_1 \varphi_2^{-1}$, то для отрицательной определенности квадратичных форм в правых частях последних двух равенств достаточно, чтобы при некотором $\psi > 0$ выполнялись неравенства

$$\frac{2q_{12}}{(c+1)^2}\left[\left(\frac{2b}{c+1} + q_{12}\right)^{-1} + c^2\left(\frac{2ac}{c+1} + q_{12}\right)\right] < \psi < 1 + q_{21}. \qquad (58)$$

Отметим, что эти условия позволяют, например, по заданным значениям параметров a, b, c (см. (57*)) определить область асимптотической устойчивости по вероятности в целом в пространстве параметров q_{12}, q_{21}. Для упрощения следует принять $r_1 = r_2$.

Проверка условий теоремы 4 позволяет выписать в плоскости (q_{12}, q_{21}) достаточные условия устойчивости по вероятности в целом неравенствами

$$(c-1)^2 q_{12} q_{21} < 2b(c+1)(q_{12} + 2q_{21}) + 8b > 0;$$

$$q_{12} > 0, \;\; q_{21} > 0. \qquad (59)$$

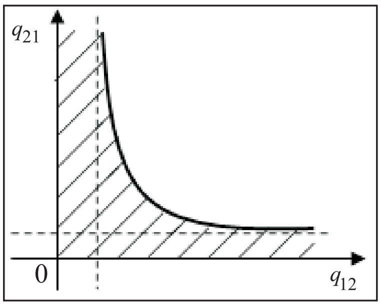

Рис. 2

Отметим, что область устойчивости по вероятности может быть шире области, изображенной на рис. 2 [4]. Это объясняется тем, что использованы только достаточные условия устойчивости по вероятности в целом.

Вопрос о необходимых условиях остается открытым [4].

Отметим, что для параметров q_{12}, q_{21} из полученной заштрихованной области (см. рис. 2) имеет место экспоненциальная устойчивость в среднем квадратическом [4] (теорема 4), поскольку проверка условий (4)–(5) приводит к получению условий (59).

Модельная задача 2. Пусть на вероятностном базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} \equiv \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, \; t \geq 0\}, \mathbf{P})$ задана линейная автономная система случайной структуры

$$dx(t) = a(x_t, \xi(t))dt + b(x_t, \xi(t))dw(t) \qquad (1^*)$$

с внешними марковскими переключениями (2) и начальными условиями (3). Необходимо получить достаточные условия устойчивости системы (1*), (2), (3) по вероятности в целом.

Решение. Найдем ограничения на переходные вероятности q_{ij} процесса $\xi(t)$ и на переходную вероятность $\widetilde{P}_k(h, \Gamma)$ на k-м шаге дискретной цепи Маркова $\{\eta_k\}$, $k \in N$, [3]. Используем функцию Ляпунова [4] вида

$$v(x_t, i) = c_i ||x_t||^{\beta}, \quad \beta = \varepsilon b^{-2}. \tag{60}$$

Предположим, в отличие от (60), что матрица переходных вероятностей марковской цепи $\xi(t)$ симметричная, т.е.

$$q_{ij} = q_{ji}, \quad i, j = \overline{1, k}; \quad i \neq j. \tag{61}$$

Оценим $lv(x, i)$:

$$(lv)(x, i) = |x|^{\beta} \left\{ \beta c_t \left(a_i + \frac{\beta - 1}{2} b_i + 1 \right) + \sum_{j \neq i}^{k} (c_j - c_i) q_{ij} \right\}. \tag{62}$$

Условие симметричности (61) обусловливает

$$\sum_{j \neq i}^{k} (c_j - c_i) q_{ij} = \sum_{j \neq i}^{k} c_j q_{ji} - q_{ij} c_i, \tag{63}$$

где $q_i = \sum_{j \neq i}^{k} q_{ij}$.

Допустим, что $p(t) \equiv (p_1(t), \ldots, p_k(t))^T$, где $p_i(t) \equiv \mathbf{P}\{y(t) = y_i / \xi(0)\}$. Тогда $p_i(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений Колмогорова [15]

$$\frac{dp_i}{dt} = -q_i p_i + \sum_{j \neq i}^{k} q_{ji} p_j. \tag{64}$$

По предположению $q_{ij} \neq 0$, система (64) имеет стационарное решение $p_i^* = \text{const}$, которое следует находить из уравнений

$$\sum_{j \neq i}^{k} q_{ji} p_j - q_i p_i = 0, \quad i = 1 - k. \tag{65}$$

Это стационарное решение p_i^* удовлетворяет условиям $p_i^* > 0$ и $\sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1$.

Пусть $a(i) = a_i$, $b(i) = b_i$, при этом

$$a_i - \frac{b_i}{2} < -\varepsilon \tag{66}$$

для $\forall\, i = \overline{1, k}$, $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим случай выбора переходной вероятности $\widetilde{P}_k(h, \Gamma)$ цепи Маркова $\{\eta_k\}, k \in N$, с учетом конструкции g в (2) такой, что

$$\int_{\mathbf{H}} |x + g(t_k, x_t, z, h)|^{\beta} \widetilde{P}_k(h, dz) \leq 2||x||^{\beta}. \tag{67}$$

Если $c_i = p_i^*$, то с учетом (66), (67) получим

$$(lv)(x, i) \leq -\frac{(\beta + 1) p_i^* \varepsilon}{2} ||x||^{\beta} < 0.$$

Тогда согласно теореме 2 достаточными условиями устойчивости по вероятности в целом системы (1*), (2), (3) являются условия (61), (66) и (67).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод функционалов Ляпунова–Красовского позволил получить достаточные условия асимптотической стохастической устойчивости в целом, эспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом в целом тривиального решения диффузионного стохастического дифференциально-функционального уравнения с марковскими возмущениями. Эта теория применена в двух реальных модельных задачах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: В 2 т. — М.: Физматгиз, 1994. — Т. 1. — 544 с.
2. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: В 2 т. — М.: Физматгиз, 1994. — Т. 2. — 473 с.
3. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. — М.: Физматгиз, 1969. — 859 с.
4. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. — Екатеринбург: УГАПС, 1998. — 222 с.
5. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977. — 352 с.
6. Гихман И.И. Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. — К.: Наук. думка, 1968. — 354 с.
7. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. — К.: Наук. думка, 1987. — 328 с.
8. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969. — 367 с.
9. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. — М. : Наука, 1981. — 423 с.
10. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
11. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. — М.: ИЛ, 1962. — Т. 1. — 895 с.
12. Гихман И.И. Скороход А.В. Управляемые случайные процессы. — К.: Наук. думка, 1977. — 252 с.
13. Гихман И.И. Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения. — К.: Наук. думка, 1982. — 612 с.
14. Ясинський В.К., Ясинський Є.В. Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією. — К.: ТВіМС, 2005. — 580 с.
15. Дуб Дж. Вероятностные процессы. — М.: Физматгиз, 1963. — 605 с.
16. Ясинський В.К., Ясинський Є.В., Юрченко І.В. Стабілізація у динамічних системах випадкової структури. — Чернівці: Золоті литаври, 2011. — 738 с.
17. Кушнер Г.Дж. Стохастическая устойчивость и управление. — М.: Мир, 1969. — 200 с.
18. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости. — Харьков: Харьк. мат. общество, 1892. — 250 с.
19. Chung K.L. Lectures from Markov processes to brownian. — New York: Springer, 1982. — 235 c.
20. Korolyuk V.S., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. — London; Singapore; Hong Kong: World Scientific, 2005. — 332 p.
21. Mizel V., Trutzer V. Stochastic hereditary equations: existence and asymptotic stability // J. Integral Equations . — 1984. — **7**. — P. 1–72.
22. Shurenkov V.M.On the theory of Markov renewal // Theor. Probab. Appl. — 1984. — **19**, N 2. — P. 247–265.
23. Yasinsky V., Bereza V. The asymptotic uniform stability of solutions of neutral stochastic differential-functional equations with Poisson switchingsy // Theory of Stochastic Processes. — 2003. — **29(25)**, N 3–4. — P. 211–217.

Поступила 14.03.2013