УДК 917.977.5

Я.А. ШАРИФОВ

ОСОБЫЕ УПРАВЛЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ключевые слова: *особые управления, нелокальные граничные условия, оптимальное управление, необходимые условия.*

ВВЕДЕНИЕ

В природе, физике и технике существует много процессов, в которых математические модели описываются дифференциальными или разностными уравнениями с нелокальными условиями [1, 2]. Появление нелокальных краевых условий существенно затрудняет исследование таких краевых задач, а также соответствующих задач оптимального управления.

В настоящее время теория необходимых условий оптимальности высокого порядка, в частности теория особых управлений, достаточно полно разработана в задачах оптимального управления системами с сосредоточенными и распределенными параметрами при различных локальных краевых условиях. Наиболее подробный обзор соответствующих результатов приведен в [3, 4].

В последние годы для различных задач оптимального управления с нелокальными краевыми условиями получен ряд необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина и в форме линеаризированного условия максимума [5–8, 10–12].

В работе [5] изучена задача оптимального управления обыкновенными динамическими системами с двухточечными краевыми условиями. Доказан аналог принципа максимума Понтрягина, а также предложены численные методы решения соответствующих задач оптимального управления. В работах [6–8] исследован особый, в смысле принципа максимума Понтрягина, случай задачи оптимального управления с нелокальными условиями. При этом использован метод матричных импульсов [9]. Позднее аналогичный результат в другой форме был получен в работах [10–12] при помощи метода, предложенного в [3, 4].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Объектом исследования в настоящей статье являются задачи оптимального управления в системах нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с граничными условиями

$$\dot{x} = f(x, u, t), \ x(t) \in R^n, \ t \in T = [t_0, t_1], \tag{1}$$

$$Ax(t_0) + Bx(t_1) = C. \tag{2}$$

Здесь $f(x, u, t)$ — заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x и u до второго порядка включительно, $A, B \in R^{n\times n}$, $C \in R^{n\times 1}$ — постоянные матрицы, $u(t)$ — r-мерный измеримый и ограниченный вектор управляющих воздействий на отрезке T.

© Я.А. Шарифов, 2013

Предполагается, что почти всюду на этом отрезке управляющие воздействия удовлетворяют ограничению типа включения

$$u(t) \in U, \ t \in T, \tag{3}$$

где U — открытое множество из пространства R^r.

Целью задачи оптимального управления является минимизация фунционала

$$J(u) = \varphi(x(t_0), x(t_1)) + \int_T F(x, u, t)dt, \tag{4}$$

определенного на решениях краевой задачи (1), (2) при допустимых управлениях, удовлетворяющих условию (3). Здесь предполагается, что скалярные функции $\varphi(x, y)$ и $F(x, u, t)$ непрерывны по своим аргументам и имеют непрерывные и ограниченные частные производные по x и y до второго порядка включительно.

Допустимый процесс $\{u(t), x(t, u)\}$, являющийся решением задачи (1)–(4), т.е. доставляющий минимум функционалу (4) при ограничениях (1)–(3), будем называть оптимальным процессом, а $u(t)$ — оптимальным управлением.

Существование краевой задачи (1), (2). Сформулируем одно достаточное условие, при котором краевая задача (1), (2) при каждом допустимом управлении $u(t) \in U, \ t \in T$, имеет единственное решение $x(t, u)$.

Теорема 1. Пусть функция $f(x, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной x. Кроме того,

$$\det(A + B) \neq 0, L(t_1 - t_0) \max\{\| (A + B)^{-1} A \|, \| (A + B)^{-1} B \| \} < 1 .$$

Тогда краевая задача (1), (2) имеет единственное решение при каждом фиксированном допустимом управлении, где L — коэффициент Липшица функции $f(x, u, t)$ по переменной x.

Доказательство. Краевую задачу (1), (2) приведем к эквивалентному виду

$$x(t) = [A + B]^{-1} C + [A + B]^{-1} A \int_{t_0}^{t} f(x, u, t)dt - [A + B]^{-1} B \int_{t}^{t_1} f(x, u, t)dt$$

и докажем с учетом условий теоремы, что оператор $F: C[t_0, t_1] \to C[t_0, t_1]$:

$$(Fx)(t) = [A + B]^{-1} A \int_{t_0}^{t} f(x, u, t)dt - [A + B]^{-1} B \int_{t}^{t_1} f(x, u, t)dt$$

является сжимающим. Это в свою очередь означает, что краевая задача (1), (2) имеет единственное решение при каждом фиксированном допустимом управлении.

ФОРМУЛА ПРИРАЩЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛА

Пусть $\{u, x = x(t, u)\}$ и $\{\tilde{u} = u + \Delta u, \ \tilde{x} = x + \Delta x = x(t, \tilde{u})\}$ — два допустимых процесса.

После достаточно стандартных операций, обычно используемых при выводе необходимых условий оптимальности первого и второго порядков, для приращения функционала получим формулы

$$\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u) = -\int_T \left\langle \frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial u}, \Delta u(t) \right\rangle dt -$$

$$-\int_T \left\langle \frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial x} + \dot{\psi}(t), \Delta x(t) \right\rangle dt + \left\langle \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x(t_0)} - \psi(t_0) + A'\lambda \right], \Delta x(t_0) \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x(t_1)} + \psi(t_1) + B'\lambda \right], \Delta x(t_1) \right\rangle +$$

$$-\int_T \left\langle \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial x \partial u} \Delta u(t) + \frac{1}{2} \Delta x'(t) \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial x^2}, \Delta x(t) \right\rangle dt - \tag{5}$$

$$-\frac{1}{2} \int_T \left\langle \Delta u(t)' \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial u^2}, \Delta u(t) \right\rangle +$$

$$+\frac{1}{2} \left\langle \Delta x(t_0)' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_0)^2} + \Delta x(t_1)' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)}, \Delta x(t_0) \right\rangle +$$

$$+\frac{1}{2} \left\langle \Delta x(t_0)' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_1) \partial x(t_0)} + \Delta x(t_1)' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_1)^2}, \Delta x(t_1) \right\rangle + \eta_{\tilde{u}} ,$$

где

$$\eta_{\tilde{u}} = -\int_T o_H (\| \Delta x(t) \|^2 + \| \Delta u(t) \|^2) dt + o_\varphi (\| \Delta x(t_0) \|^2, \ \| \Delta x(t_1) \|^2) . \tag{6}$$

Потребуем, чтобы вектор-функция $\psi = \psi(t) \in R^n$ и постоянный вектор $\lambda \in R^n$ являлись решениями следующей сопряженной задачи (условие стационарности функции Лагранжа по состоянию):

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial x}, \ t \in T , \tag{7}$$

$$\psi(t_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_0)} + A'\lambda , \tag{8}$$

$$\psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x(t_1)} - B'\lambda . \tag{9}$$

Отметим, что из системы (7)–(9), которая называется сопряженной системой в параметрической форме, можно исключить вектор $\lambda \in R^n$. Действительно, если учесть, что $\det(A + B) \neq 0$, то вместо краевых условий (8), (9), получим нелокальное краевое условие

$$B' (A'+B')^{-1} \psi(t_0) + A' (A'+B')^{-1} \psi(t_1) =$$

$$= B' (A'+B')^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_0)} - A' (A'+B')^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_1)} .$$

Тогда формула приращения (5) примет вид

$$\Delta J(u) = -\int_T \left\langle \frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial u}, \Delta u(t) \right\rangle dt - \frac{1}{2} \int_T \left\langle \Delta u(t) \quad \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial u^2}, \Delta u(t) \right\rangle dt -$$

$$-\int_T \left\langle \Delta u(t)' \frac{\partial H^2 (\psi, x, u, t)}{\partial x \partial u} + \frac{1}{2} \Delta x'(t) \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial x^2}, \Delta x(t) \right\rangle dt + \tag{10}$$

$$+\frac{1}{2}\left\langle \Delta x(t_0)'\frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_0)^2}+\Delta x(t_1)'\frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)},\,\Delta x(t_0)\right\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\left\langle \Delta x(t_0)'\frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_1)\partial x(t_0)}+\Delta x(t_1)'\frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_1)^2},\,\Delta x(t_1)\right\rangle +\eta_{\widetilde{u}}\,.$$

Вариации функционала. Пусть теперь $\Delta u(t)=\varepsilon\delta u(t)$, где ε — достаточно малое число, $\delta u(t)$ — некоторая кусочно-непрерывная функция. Тогда приращение функционала $\Delta J(u)=J(\widetilde{u})-J(u)$ при фиксированных функциях $u(t), \Delta u(t)$ есть функция параметра ε. Если справедливо представление

$$\Delta J(u)=\varepsilon\delta J(u)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\delta^2 J(u)+o(\varepsilon^2)\,, \tag{11}$$

то назовем $\delta J(u)$ первой вариацией, а $\delta^2 J(u)$ — второй вариацией функционала. Далее получим явные выражения для первой и второй вариаций. Для достижения цели осталось выделить в $\Delta x(t)$ главный член относительно ε.

Положим

$$\Delta x(t)=\varepsilon\delta x(t)+o(\varepsilon,\,t)\,, \tag{12}$$

где $\delta x(t)$ — вариация траектории. Такое представление существует и для $\delta x(t)$. Можно получить уравнение в вариациях. Действительно, при условии $\det(A+B)\neq 0$ по определению $\Delta x(t)$ имеем:

$$\Delta x(t)=[A+B]^{-1}A\int_{t_0}^{t}\Delta f(x,u,t)dt-[A+B]^{-1}B\int_{t}^{t_1}\Delta f(x,u,t)dt\,. \tag{13}$$

Применяя к подынтегральному выражению формулу Тейлора, получаем

$$\varepsilon\delta x(t)+o(\varepsilon,\,t)=[A+B]^{-1}A\times$$

$$\times\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}[\varepsilon\delta x(x)+o(\varepsilon,\,t)]+\varepsilon\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\delta u+o_1(\varepsilon,\,t)\right\}dt-$$

$$-[A+B]^{-1}B\int_{t}^{t_2}\left\{\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}[\varepsilon\delta x(x)+o(\varepsilon,\,t)]+\varepsilon\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\delta u+o_1(\varepsilon,\,t)\right\}dt\,.$$

Поскольку эта формула верна при любых ε, то

$$\delta x(t)=[A+B]^{-1}A\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\delta u\right]dt-$$

$$-[A+B]^{-1}B\int_{t}^{t}\left[\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\delta u\right]dt\,.$$

Отсюда после дифференцирования получаем линейное дифференциальное уравнение для вариации δx траектории:

$$\delta\dot{x}=\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\delta u \tag{14}$$

с граничными условиями

$$A\delta x(t_0)+B\delta x(t_1)=0\,. \tag{15}$$

Уравнение (14) с условиями (15) называют уравнением в вариациях.

Подставим (12) в (10) и имеем

$$\Delta J(u)=-\varepsilon\int\limits_T\left\langle\frac{\partial H(\psi,x,u,t)}{\partial u},\delta u(t)\right\rangle dt-\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\int\limits_T\left[\left\langle\delta x'(t)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial x^2},\delta x(t)\right\rangle+\right.\right.$$

$$\left.+2\left\langle\delta u'(t)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial x\partial u},\delta x(t)\right\rangle+\left\langle\delta u'(t)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial u^2},\delta u(t)\right\rangle\right]dt-$$

$$-\left\langle\delta x'(t_0)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_0)^2}+\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)},\delta x(t_0)\right\rangle- \tag{16}$$

$$\left.-\left\langle\delta x'(t_0)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_1)\partial x(t_0)}+\delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_1)^2},\delta x(t_1)\right\rangle\right\}+o(\varepsilon^2)\,.$$

Используя определение (11), окончательно получаем

$$\delta J(u)=-\int\limits_T\left\langle\frac{\partial H(\psi,x,u,t)}{\partial u},\delta u(t)\right\rangle dt, \tag{17}$$

$$\delta^2 J(u)=-\int\limits_T\left[\left\langle\delta x'(t)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial x^2},\delta x(t)\right\rangle+\right.$$

$$\left.+2\left\langle\delta u'(t)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial x\partial u},\delta x(t)\right\rangle+\left\langle\delta u'(t)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial u^2},\delta u(t)\right\rangle\right]dt+$$

$$+\left\langle\delta x'(t_0)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_0)^2}+\Delta x'(t_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_0)\partial x(t_2)},\delta x(t_0)\right\rangle+$$

$$+\left\langle\delta x'(t_0)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_2)\partial x(t_0)}+\delta x'(t_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_2)^2},\delta x(t_2)\right\rangle.$$

ВЫВОД УСЛОВИЙ ЛЕЖАНДРА–КЛЕБША

Из определения (11) следует, что на оптимальном управлении $u(t)$ выполняются условия

$$\delta J(u)=0\,,\ \ \delta^2 J(u)\ge 0\,. \tag{18}$$

Из первого условия (18) следует, что

$$\int\limits_T\left\langle\frac{\partial H(\psi,x,u,t)}{\partial u},\delta u(t)\right\rangle dt=0\,.$$

Отсюда можно доказать, что вдоль оптимального управления выполняется равенство (см. [9], с. 54):

$$\frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial u} = 0, \; t \in T, \tag{19}$$

которое называется уравнением Эйлера. Из второго условия (18) следует, что вдоль оптимального управления выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
\delta^2 J(u) = -\int_T \Bigg[\left\langle \delta x'(t) \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial x^2}, \delta x(t) \right\rangle + \\
+2\left\langle \delta u'(t) \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial x \partial u}, \delta x(t) \right\rangle + \left\langle \delta u'(t) \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial u^2}, \delta u(t) \right\rangle \Bigg] dt + \\
+\left\langle \delta x'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_0)^2} + \Delta x'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_0) \partial x(t_2)}, \delta x(t_0) \right\rangle + \\
+\left\langle \delta x'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_2) \partial x(t_0)} + \delta x'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_2)^2}, \delta x(t_2) \right\rangle \geq 0 .
\end{aligned} \tag{20}$$

Неравенство (20) является неявным необходимым условием оптимальности второго порядка. Однако практическая ценность условий (20) в такой форме невелика, так как для его реализации требуются трудоемкие вычисления. Для получения эффективно проверяемых условий оптимальности второго порядка введем матрицу-функцию

$$\begin{aligned}
R(\tau, s) = \Phi^{-1'}(\tau)[\Phi(t_1)(A + B\Phi(t_1))^{-1} A]' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_1)^2} \Phi(t_1)(A + B\Phi(t_1))^{-1} A \Phi^{-1}(s) + \\
+\Phi^{-1'}(\tau)[(A + B\Phi(t_1))^{-1} B\Phi(t_1)]' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_0)^2} (A + B\Phi(t_1))^{-1} B\Phi(t_1) \Phi^{-1}(s) + \\
+\Phi^{-1'}(\tau)[(A + B\Phi(t_1))^{-1} B\Phi(t_1)]' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)} \Phi(t_1)(A + B\Phi(t_1))^{-1} A \Phi^{-1}(s) + \\
+\Phi^{-1'}(\tau)[(A + B\Phi(t_1))^{-1} A\Phi(t_1)]' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)} \Phi(t_1)(A + B\Phi(t_1))^{-1} B \Phi^{-1}(s) + \\
+\Phi^{-1'}(\tau)[(A + B\Phi(t_1))^{-1} B\Phi(t_1)]' \times \\
\times \int_T \Phi'(t) \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial x^2} \Phi(t) dt (A + B\Phi(t_1))^{-1} B\Phi(t_1) \Phi^{-1}(s) + \\
+\Phi^{-1'}(\tau) \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} \Phi'(t) \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, \tau)}{\partial x^2} \Phi(t) dt \, \Phi^{-1}(s) - \\
-\Phi^{-1'}(\tau) \int_\tau^{t_1} \Phi'(\xi) \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, \xi)}{\partial x^2} \Phi(\xi) d\xi (A + B\Phi(t_1))^{-1} B\Phi(t_1) \Phi^{-1}(s) -
\end{aligned}$$

$$-\Phi^{-1}(\tau)[(A+B\Phi(t_1))^{-1}B\Phi(t_1)]'\int_{\tau}^{t_1}\Phi'(\xi)\frac{\partial^2 H(\psi, x, u, \xi)}{\partial x^2}\Phi(\xi)d\xi\Phi^{-1}(s),$$

где матрица-функция $\Phi(t)$, $t\in T$, является решением следующего матричного дифференциального уравнения:

$$\dot{\Phi}(t)=\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x}\Phi(t)$$

с начальным условием $\Phi(t_0)=E$. Тогда для второй вариации функционала получаем формулу

$$\delta^2 J(u)=-\left\{\int_T\int_T\left\langle\delta' u(\tau)\frac{\partial' f(x, u, \tau)}{\partial u}R(\tau, s)\frac{\partial f(x, u, s)}{\partial u}, \delta u(s)\right\rangle d\tau ds+\right.$$

$$+\int_T\left\langle\delta' u(\tau)\frac{\partial^2 H(\varphi, x, u, t)}{\partial u^2}, \delta u(t)\right\rangle dt+ \qquad (21)$$

$$+2\int_T\int_T\left\langle\delta u'(t)\frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial x\partial u}\Phi(t)[A+B\Phi(t_1)]^{-1}B\Phi(t_1)\Phi^{-1}(s)\frac{\partial f(x, u, s)}{\partial u}, \delta u(s)\right\rangle dtds+$$

$$\left.+\int_T\left\langle\int_t^{t_2}\delta u'(\tau)\frac{\partial^2 H(\psi, x, u, \tau)}{\partial x\partial u}\Phi(\tau)d\tau\Phi^{-1}(t)\frac{\partial f(x, u, s)}{\partial u}, \delta u(s)\right\rangle dt\right\}.$$

Теорема 2. Если допустимое управление $u(t)$ удовлетворяет условию (19), то для его оптимальности в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы неравенство

$$\delta^2 J(u)=-\left\{\int_T\int_T\left\langle\delta' u(\tau)\frac{\partial' f(x, u, \tau)}{\partial u}R(\tau, s)\frac{\partial f(x, u, s)}{\partial u}, \delta u(s)\right\rangle d\tau ds+\right.$$

$$+\int_T\left\langle\delta' u(\tau)\frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial u^2}, \delta u(t)\right\rangle dt+ \qquad (22)$$

$$+2\int_T\int_T\left\langle\delta u'(t)\frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial x\partial u}\Phi(t)[A+B\Phi(t_1)]^{-1}B\Phi(t_1)B\,\Phi^{-1}(s)\frac{\partial f(x, u, s)}{\partial u}, \delta u(s)\right\rangle dtds+$$

$$\left.+\int_T\left\langle\int_t^{t_1}\delta u'(\tau)\frac{\partial^2 H(\psi, x, u, \tau)}{\partial x\partial u}\Phi(\tau)d\tau\Phi^{-1}(t)\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u}, \delta u(t)\right\rangle dt\right\}\geq 0$$

выполнялось для всех $\delta u(t)\in L_\infty^r[t_0, t_1]$.

Из условия (22) следует аналог условия Лежандра–Клебша для рассматриваемой задачи.

Теорема 3. Вдоль оптимального процесса $(u(t), x(t))$ для всех $\upsilon\in R^r$ и $\theta\in[t_0, t_1]$:

$$\upsilon'\frac{\partial^2 H(\psi(\theta), x(\theta), u(\theta), \theta)}{\partial u^2}\upsilon\leq 0. \qquad (23)$$

Для доказательства (23) построим вариацию управления

$$\delta u(t)=\begin{cases}\upsilon-u(t), & t\in[\theta,\theta+\varepsilon),\\ 0, & t\notin[\theta,\theta+\varepsilon),\end{cases} \tag{24}$$

где $\varepsilon>0$, υ — некоторый r-мерный вектор.

В силу (12) соответствующая вариация траектории равна

$$\delta x(t)=a(t)\varepsilon+o(\varepsilon,t),\ \ t\in T=[t_0,t_1], \tag{25}$$

где $a(t)$ — непрерывная ограниченная функция.

Подставим вариацию (24) и соотношения (25) в (21) и выделим главный член по ε. Тогда

$$\delta^2 J(u)=-\int_\theta^{\theta+\varepsilon}\upsilon'\frac{\partial^2 H(\psi(t),x(t),u(t),t)}{\partial u^2}\upsilon dt+o(\varepsilon)=$$

$$=-\varepsilon\upsilon'\frac{\partial^2 H(\psi(\theta),x(\theta),u(\theta),\theta)}{\partial u^2}\upsilon+o_1(\varepsilon).$$

Отсюда с учетом второго условия из (18) получаем критерий Лежанра–Клебша (23).

Условие (23) является необходимым условием второго порядка. Очевидно, когда правая часть системы (1) линейна относительно управляющих параметров, условие (23) также вырождается, т.е. выполняется тривиально. Следуя [4, 9], если для всех $\theta\in(t_0,t_1)$, $\upsilon\in R^r$:

$$\frac{\partial H(\psi(\theta),x(\theta),u(\theta),\theta)}{\partial u}=0,\ \ \upsilon'\frac{\partial^2 H(\psi(\theta),x(\theta),u(\theta),\theta)}{\partial u^2}\upsilon=0, \tag{26}$$

то допустимое управление $u(t)$ называется особым в классическом смысле управлением.

Теорема 4. Для оптимальности особого в классическом смысле управления $u(t)$ необходимо, чтобы

$$\upsilon'\Bigg\{\int_T\int_T\left\langle\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}R(t,s),\frac{\partial f(x,u,s)}{\partial u}\right\rangle dtds+$$

$$+2\int_T\int_T\left\langle\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial x\partial u}\Phi(t)[A+B\Phi(t_1)]^{-1}B\Phi(t_1)\Phi^{-1}(s),\frac{\partial f(x,u,s)}{\partial u}\right\rangle dtds+$$

$$+\int_T\left\langle\int_t^{t_1}\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial x\partial u}\Phi(\tau)d\tau\Phi^{-1}(t),\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\right\rangle dt\Bigg\}\upsilon\le 0 \tag{27}$$

выполнялось для всех $\upsilon\in R^r$.

Условие (27) является интегральным необходимым условием оптимальности для особых в классическом смысле управлений. Выбирая специальную вариацию по формуле (24) из (27), получаем поточечные необходимые условия оптимальности.

Теорема 5. Для оптимальности особого в классическом смысле управления $u(t)$ в оптимальной задаче (1)–(3) необходимо, чтобы условие

$$v'\left[\frac{\partial f'(x(\theta), u(\theta), \theta)}{\partial u} R(\theta, \theta) \frac{\partial f(x(\theta), u(\theta), \theta)}{\partial u} + \right.$$

$$+2\frac{\partial^2 H(\psi(\theta), x(\theta), u(\theta), \theta)}{\partial x \partial u} \Phi(\theta)[A + B\Phi(t_1)]^{-1} B\Phi(t_1)\Phi^{-1}(\theta) \frac{\partial f(x(\theta), u(\theta), \theta)}{\partial u} +$$

$$\left. + \frac{\partial^2 H(\psi(\theta), x(\theta), u(\theta), \theta)}{\partial x \partial u} \frac{\partial f(x(\theta), u(\theta), \theta)}{\partial u}\right] v \le 0$$

выполнялось для всех $v \in R^r$ и $\theta \in (t_0, t_1)$.

Пример. Пусть состояние объекта описывается уравнением

$$\ddot{x} = u, \quad t \in [0, 1] \tag{28}$$

с граничными условиями

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(1) = 0. \tag{29}$$

Управляющий параметр u принимает значения из интервала $(-1, 1)$, т.е. $|u| < 1$.

Требуется минимизация функционала

$$J(u) = -\frac{1}{2} x^2(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt. \tag{30}$$

Пусть $x(t) = x_1(t)$ и $\dot{x}(t) = x_2(t)$, тогда (28) и (29) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Функционал (30) принимает вид

$$J(u) = -\frac{1}{2} x_1^2(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt.$$

Проверим на оптимальность управление $u(t) = 0$. Очевидно, $H(\psi, x, u, t) = \psi_1(t) x_2(t) + \psi_2(t) u(t) - \frac{1}{2} u^2(t)$ и

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1(t) = 0, \\ \dot{\psi}_2(t) = -\psi(t), \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(0) \\ \psi_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(1) \\ \psi_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(1) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная матрица для системы (31) имеет вид

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь, учитывая, что

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

можно вычислить $R(\tau, s)$:

$$R(\tau, s) = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ -s & \tau s \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial f(x,u,t)}{\partial u} = (0,1)'$, согласно теореме 5 имеем $\upsilon' \theta^2 \upsilon \le 0$ для всех $\upsilon \in R^r$, что невозможно. Значит, управление $u(t)=0$ — неоптимальное.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что если A — единичная матрица, а B — нулевая матрица, то полученные результаты совпадают с аналогичными результатами для задач оптимального управления с локальными условиями [3, 4]. А из схем доказательств ясно, что данную схему можно применять для исследования и для других задач оптимального управления с нелокальными условиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решний краевых задач. — К.: Наук. думка, 1986. — 219 с.
2. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. — М.: Наука, 2006. — 287 с.
3. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. — Баку: Элм, 1999. — 174 с.
4. Mansimov K.B. Singular controls in control problems for distributed parameter system // Math. Sci. — 2008. — **148**, N 3. — P. 331–381.
5. Васильева О.О., Мизуками К. Динамические процессы, описываемые краевой задачей: необходимые условия оптимальности и методы решения // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2000. — № 1. — С. 95–100.
6. Vasilieva O.O., Mizukami K. Optimality criterion for singular controllers: linear boundary conditions // J. Math Anal. and Appl. — 1997. — **213**, N 2. — P. 620–641.
7. Vasilieva O.O. Optimality conditions for singular controls // Тр. XIII Байкальской междунар. шк.-сем. «Методы оптимизации и их приложения» (Иркутск–Северобайкальск, 2–8 июля 2005). — Иркутск, 2005. — **2**. — С. 123–127.
8. Vasilieva O.O. Maximum principle and its extension for bounded control problem with boundary conditions // J. Math. Sci. — 2004. — **35**. — P. 1855–1879.
9. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973. — 256 с.
10. Шарифов Я.А., Ширинов Т.В. Градиент в задаче оптимального управления для систем Гурса–Дарбу с неклассическими условиями // Математичне и компьютерне моделювания. Сер.: Фiз.-мат. науки. — 2010. — Вип. 3. — С. 201–213.
11. Sharifov Y.A. Necessary optimality conditions of first and second order for systems with boundary conditions // Trans. of NAS of Azerbaijan series of physical-technical and mathematical sciences. — 2008. — **XXVIII**, N 1. — P. 189–198.
12. Sharifov Y.A. Necessary conditions for optimality of singular controls with nonlocal boundary conditions // Intern. Conf. “Differential Equations and Topology” Dedicated to the Centennial Anniversary of Lev Semenovich Pontryagin. Abstracts, Moscow, June 17–22, 2008.

Поступила 06.04.2011