УДК 518.9

Б.Т. САМАТОВ

О ЗАДАЧАХ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ. II[1]

Ключевые слова: *контрольный пример Понтрягина, простое преследование, интегральное ограничение, разрешающая функция, стратегия параллельного сближения, l-поимка*.

1. КОНТРОЛЬНЫЙ ПРИМЕР ПОНТРЯГИНА

В теории дифференциальных игр существует ряд фундаментальных методов, позволяющих установить условия разрешимости задач преследования или убегания. Одним из важных наглядных примеров для оценивания общего метода разрешимости является контрольный пример Понтрягина [1, 2]. Исследованию этой задачи при фазовых ограничениях, при различных ограничениях на управления игроков для нестационарных случаев посвящено немало работ [3–20] и др. В настоящем разделе с помощью метода разрешающих функций [9–11] эта игра изучается для случая группового преследования при интегральных ограничениях на управления игроков.

1.1. Постановка задачи. Пусть в конечномерном евклидовом пространстве уравнения движения m преследователей и убегающего имеют вид

$$\ddot{x}_i + \alpha_i \dot{x}_i = b_i u_i, \ i = \overline{1, m}, \ \ \ddot{y} + \beta_i \dot{y} = c_i v, \ i = \overline{1, m}, \tag{1}$$

где $x_i, u_i, y, v \in R^n$, $n \ge 1$; $\alpha_i, \beta_i, b_i, c_i$ — положительные числа. Параметры управления u_i и v выбираются в виде измеримых функций $u_i = u_i(\cdot)$, $i = \overline{1, m}$, и $v = v(\cdot)$ из класса $L_2[0, \infty)$ и удовлетворяют ограничениям вида

$$\int_0^\infty |u_i(\tau)|^2 \, d\tau \le \rho_i, \ \ \rho_i > 0, \ i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

$$\int_0^\infty |v(\tau)|^2 \, d\tau \le \sigma, \sigma \ge 0, \tag{3}$$

соответственно. Такие управления назовем допустимыми в игре (1). Преследование считается завершенным, если в конечный момент времени $x_i = y$ для некоторого $i = \overline{1, m}$.

Перейдем к системе дифференциальных игр первого порядка. Для этого аналогично работе [2] введем новые переменные: $z_{i_1} = x_i - y$, $z_{i_2} = \dot{x}_i$, $z_{i_3} = \dot{y}$, где $z_{i_1}, z_{i_2}, z_{i_3} \in R^n$, и найдем

$$\dot{z}_i = A_i z_i + B_i u_i - C_i v, \ \ i = \overline{1, m}, \tag{4}$$

где $z_i = (z_{i_1}, z_{i_2}, z_{i_3})^{\mathrm{T}}$ и

$$A_i = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{E} & -\mathrm{E} \\ \mathrm{O} & -\alpha_i \mathrm{E} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & -\beta_i \mathrm{E} \end{pmatrix}, \ B_i = \begin{pmatrix} \mathrm{O} \\ b_i \mathrm{E} \\ \mathrm{O} \end{pmatrix}, \ C_i = \begin{pmatrix} \mathrm{O} \\ \mathrm{O} \\ -c_i \mathrm{E} \end{pmatrix},$$

Е и О — единичная и нулевая матрицы порядка $n \times n$ соответственно. Тогда тер-

[1] Начало см. в № 5, 2013.

минальные множества M_i, $i=\overline{1,m}$, имеют вид $M_i=\{(z_{i_1}, z_{i_2}, z_{i_3})\in R^{3n}: z_{i_1}=0\}$, а ортогональные к ним дополнения $L_i=\{(z_{i_1}, z_{i_2}, z_{i_3})\in R^{3n}: z_{i_2}=z_{i_3}=0\}$, $i=\overline{1,m}$. Если фундаментальные матрицы однородной части системы (4) имеют вид

$$e^{tA_i}=\begin{pmatrix} \mathrm{E} & \frac{1-e^{-\alpha_i t}}{\alpha}\mathrm{E} & -\frac{1-e^{-\beta_i t}}{\beta}\mathrm{E} \\ \mathrm{O} & e^{-\alpha_i t}\mathrm{E} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & e^{-\beta_i t}\mathrm{E} \end{pmatrix},$$

то матричные функции $F_i(t)$, $t\ge 0$, $i=\overline{1,m}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\pi_i e^{A_i t}B_i F_i(t)=\pi_i e^{A_i t}C_i,\ i=\overline{1,m},$$

запишем $F_i(t)=\dfrac{c_i\alpha_i(1-e^{-\beta_i t})}{b_i\beta_i(1-e^{-\alpha_i t})}\mathrm{E}$, $t\ge 0$, где $\pi_i: R^{3n}\to L_i$ — оператор ортогонального проектирования задается матрицей $\pi_i=\begin{pmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O}\end{pmatrix}$. Отсюда находим, что

$$\chi_i(t,t_i)=\sup_{v(\cdot)\in V_1[t_i,t]}\int_{t_i}^{t} f_i^2(t-\tau)|v(\tau)|^2\,d\tau,$$

где $0\le t_i\le t$, $f_i(t-\tau)=\dfrac{c_i\alpha_i(1-e^{-\beta_i(t-\tau)})}{b_i\beta_i(1-e^{-\alpha_i(t-\tau)})}$, $t_i\le\tau\le t$. В силу непрерывности функции $f_i(t-\tau)$ по τ, $t_i\le\tau\le t$, нетрудно вычислить коэффициент Никольского [16]:

$$\mu_i=\sup_{0\le t_i\le t<\infty}\chi_i(t,t_i)=\frac{c_i^2}{b_i^2}\max\{\alpha_i^2/b_i^2,1\},\ \ i=\overline{1,m}.$$

Предположение 1. Для игры (1)–(3) справедливо неравенство

$$\frac{\rho_1}{\mu_1}+\frac{\rho_2}{\mu_2}+\ldots+\frac{\rho_m}{\mu_m}>\sigma. \tag{5}$$

При выполнении предположения 1 возможны два случая:

а) $\rho_i/\mu_i\le\sigma$ для любого i;

б) $\rho_i/\mu_i>\sigma$ для некоторых i.

Для каждого случая задача преследования исследуется различными способами.

1.2. Разрешающая функция для случая а). Величину σ представим в виде

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_m, \tag{6}$$

где $\sigma_i=\dfrac{\sigma\rho_i}{\mu_i}\left(\dfrac{\rho_1}{\mu_1}+\dfrac{\rho_2}{\mu_2}+\ldots+\dfrac{\rho_m}{\mu_m}\right)^{-1}$. Легко заметить, что $\rho_i>\sigma_i\mu_i$ для всех i.

Далее, пусть $z_i=(z_{i_1}, z_{i_2}, z_{i_3})^{\mathrm{T}}$ — фиксированный вектор пространства R^{3n} и

$$\xi_i(t-t_i,z_i)=\pi_i e^{A_i(t-t_i)}z_i=z_{i_1}+\alpha_i(t-t_i)z_{i_2}-\beta_i(t-t_i)z_{i_3},$$

$$\alpha_i(t-t_i)=\frac{1-e^{-\alpha_i(t-t_i)}}{\alpha_i},\ \ \beta_i(t-t_i)=\frac{1-e^{-\beta_i(t-t_i)}}{\beta_i},\ \ t\ge t_i.$$

Предполагая $z_{i_1} \neq 0$, вычисляем разрешающую функцию $\lambda_i = \lambda_i(t-t_i, t-\tau, v, z_i)$ для всех $i = \overline{1, m}, 0 \le t_i \le \tau \le t, v \in R^q$ и $z_i \in R^n \setminus M_i$.

Для рассматриваемого класса игры введем многозначное отображение

$$U_i(t-\tau, v, \lambda) = (c_i^2 \beta_i^2 (t-\tau) |v|^2 + \lambda b_i^2 \alpha_i^2 (t-\tau) \delta_i)^{1/2} S^n - c_i \beta_i (t-\tau) v,$$

где $t_i \le \tau \le t$, $\delta_i = \rho_i^2 - \sigma_i^2 \dfrac{c_i^2}{b_i^2} \max\{\alpha_i^2 / b_i^2, 1\}$, $v \in R^q$ и $S^n = \{\hat{u} \in R^n : |\hat{u}| \le 1\}$. Нетрудно показать, что те значения λ, для которых выполнено включение

$$-\lambda \xi_i(t-t_i, z_i) + c_i \beta_i (t-\tau) v \in [c_i^2 \beta_i^2 (t-\tau) |v|^2 + \lambda b_i^2 \alpha_i^2 (t-\tau) \delta_i]^{1/2} S^n,$$

находятся в промежутке

$$0 \le \lambda \le \max\{0, \delta_i b_i^2 \alpha_i^2 (t-\tau) + 2 c_i \beta_i (t-\tau)(v, \xi_i(t-t_i, z_i))\} / |\xi_i(t-t_i, z_i)|^2.$$

Отсюда и получаем разрешающую функцию для контрольного примера Понтрягина

$$\lambda_i(t-t_i, t-\tau, v, z_i) =$$
$$= \max\{0, \delta_i b_i^2 \alpha_i^2 (t-\tau) + 2 c_i \beta_i (t-\tau)(v \xi_i(t-t_i, z_i))\} / |\xi_i(t-t_i, z_i)|^2.$$

Из этой формулы видно, что функция $\lambda_i(t-t_i, t-\tau, v, z_i)$ непрерывна по переменным τ и v, где $t_i \le \tau \le t, v \in R^q$ (при фиксированных остальных переменных). Так как по предположению $z_{i_1} \neq 0$, то из вида $\xi_i(t-t_i, z_i)$ вытекает существование такого промежутка $t_i \le t \le \bar{t}$, на котором $\xi_i(t-t_i, z_i) \neq 0$ на $[t_i, \bar{t}]$. Следовательно, функция $\lambda_i(t-t_i, t-\tau, v, z_i)$ непрерывна по переменной t при $t_i \le t \le \bar{t}$. Отсюда нетрудно проверить, что и функция

$$\Lambda_i(t, t_i, z_i) = \inf_{v(\cdot) \in V_{\sigma_i}[t_i, t]} \int_{t_i}^{t} \lambda_i(t-t_i, t-\tau, v(\tau), z_i) d\tau$$

также непрерывна на промежутке $t_i \le t \le \bar{t}$, где $V_{\sigma_i}[t_i, t] = \left\{ v(\cdot) : \int_{t_i}^{t} |v(\tau)|^2 d\tau \le \sigma_i \right\}$.

1.3. Решение задачи преследования в случае а). Рассматривается уравнение

$$\Lambda_i(t, t_i, z_i) = 0 \tag{7}$$

относительно $t, t \ge t_i$.

Лемма 1. Если $\rho_i > \sigma_i \dfrac{c_i^2}{b_i^2} \max\{\alpha_i^2 / b_i^2, 1\}$, то для каждого $z_i = (z_{i_1}, z_{i_2}, z_{i_3})^{\mathrm{T}} \in R^{3n}$ при $z_{i_1} \neq 0$ существует решение $t = T_i(t_i, z_i)$ уравнения (7), и оно ограничено непрерывной функцией $T_i^*(t_i, z_i)$, которая является решением уравнения

$$|z_{i_1}| + \frac{|z_{i_2}|}{\alpha_i} + \frac{|z_{i_3}|}{\beta_i} = (\sqrt{\rho_i} - \sqrt{\sigma_i \mu_i}) b_i \left(\int_{t_i}^{t} \alpha_i^2 (t-\tau) d\tau \right)^{1/2} \tag{8}$$

относительно t.

Доказательство. Из очевидного неравенства $\int_{t_i}^{t} \max\{0, \varphi(\tau)\} d\tau \geq$ $\geq \max\left\{0, \int_{t_i}^{t} \varphi(\tau) d\tau\right\}$, где $\varphi(\tau)$ — произвольная суммируемая функция, получаем, что

$$J_i(\upsilon(\cdot), t, z_i) = \int_{t_i}^{t} \max\{0, \delta_i b_i^2 \alpha_i^2 (t-\tau) + 2c_i \beta_i (t-\tau)(\upsilon(\tau), \xi_i(t-t_i, z_i))\} d\tau \geq$$

$$\geq \max\left\{0, \delta_i b_i^2 \int_{t_i}^{t} \alpha_i^2 (t-\tau) d\tau + 2\int_{t_i}^{t} c_i \beta_i (t-\tau)(\upsilon(\tau), \xi_i(t-t_i, z_i))\right\} d\tau.$$

В силу неравенства Коши–Буняковского и из определения функции $\chi_i(t, t_i)$ имеем

$$\int_{t_i}^{t} \left(\frac{c_i \beta_i (t-\tau)}{b_i \alpha_i (t-\tau)} \upsilon(\tau), b_i \alpha_i (t-\tau) \xi_i (t-t_i, z_i) \right) d\tau \leq$$

$$\leq b_i \left(\int_{t_i}^{t} \frac{c_i^2 \beta_i^2 (t-\tau)}{b_i^2 \alpha_i^2 (t-\tau)} |\upsilon(\tau)|^2 \, d\tau \right)^{1/2} \left(\int_{t_i}^{t} \alpha_i^2 (t-\tau) d\tau \right)^{1/2} |\xi_i (t-t_i, z_i)| \leq$$

$$\leq b_i \left(\sigma_i \mu_i \int_{t_i}^{t} \alpha_i^2 (t-\tau) d\tau \right)^{1/2} |\xi_i (t-t_i, z_i)|.$$

Следовательно,

$$J_i(\upsilon(\cdot), t, z_i) \geq$$

$$\geq \max\left\{0, \delta_i b_i^2 \int_{t_i}^{t} \alpha_i^2 (t-\tau) d\tau - 2b_i \left(\sigma_i \mu_i \int_{t_i}^{t} \alpha_i^2 (t-\tau) d\tau \right)^{1/2} |\xi_i (t-t_i, z_i)| \right\}.$$

Из того, что $\delta_i = \rho_i - \mu_i \sigma_i > 0$, из ограниченности функции $\xi_i(t-t_i, z_i)$ при $\alpha_i > 0$ и $\beta_i > 0$ на $t_i \leq t < +\infty$ и монотонности функции $\int_{t_i}^{t} \alpha_i^2 (t-\tau) d\tau$ по t при $t \geq t_i$ получаем существование такого момента $T_i' = T_i'(t, z_i)$, при котором выполняется равенство

$$\delta_i b_i^2 \int_{t_i}^{T_i'} \alpha_i^2 (T_i' - \tau) d\tau - 2b_i \left(\sigma_i \mu_i \int_{t_i}^{T_i'} \alpha_i^2 (T_i' - \tau) d\tau \right)^{1/2} |\xi_i (T_i' - t_i, z_i)| =$$

$$= |\xi_i (T_i' - t_i, z_i)|^2.$$

Из этого равенства вытекает эквивалентное ему равенство

$$|\xi_i (T_i' - t_i, z_i)| = (\sqrt{\rho_i} - \sqrt{\sigma_i \mu_i}) b_i \left(\int_{t_i}^{T_i'} \alpha_i^2 (T_i' - \tau) d\tau \right)^{1/2}.$$

Следовательно, для произвольного допустимого управления $\upsilon = \upsilon(\tau)$ при $t_i \leq \tau \leq T_i'$ справедливо соотношение

$$\inf_{\upsilon(\cdot) \in V_{\sigma_i}[t_i, T_i']} J(\upsilon(\cdot), T_i', z_i) - |\xi_i (T_i' - t_i, z_i)|^2 \geq 0.$$

Отсюда имеем

$$\Lambda_i^*(T_i', t_i, z_i) = 1 - \Lambda_i(T_i', t_i, z_i) =$$

$$= 1 - \inf_{v(\cdot)\in V_{\sigma_i}[t_i, T_i']} \int_{t_i}^{T_i'} \lambda_i(T_i' - t_i, T_i' - \tau, v(\tau), z_i)\,d\tau \le 0\,.$$

В силу непрерывности функции $\Lambda^*(t, t_i, z_i)$ на промежутке $t_i \le t \le T_i'$ получаем, что уравнение (7) для всех $z_i \notin M_i$ и $t_i, t_i \ge 0$, имеет конечное решение $T_i(t_i, z_i) \le T_i'$.

Теперь остается показать ограниченность сверху этой функции непрерывной функцией $T_i^*(t_i, z_i)$. Для этого рассматривается уравнение (8) относительно t, $t \ge t_i$. Поскольку для этого уравнения выполнены все условия теоремы о неявной функции, то оно имеет единственное непрерывно зависящее от переменных t_i и z_i решение $t = T_i^*(t_i, z_i)$ при $t > t_i$ и $z_{i_1} \ne 0$. Из того, что

$$|\xi_i(t - t_i, z_i)| \le |z_{i_1}| + \frac{|z_{i_2}|}{\alpha_i} + \frac{|z_{i_3}|}{\beta_i}, \quad t \ge t_i,$$

находим $T_i'(t_i, z_i) \le T_i^*(t_i, z_i)$, что влечет $T_i(t_i, z_i) \le T_i^*(t_i, z_i)$.

Лемма 1 доказана.

Для исследуемого примера в случае а) построена разрешающая функция $\lambda_i(t - t_i, t - \tau, v, z_i)$ и показано, что решение уравнения (7) при всех $z_i \in R^{3n} \setminus M_i$ существует и ограничено. Теперь покажем, что преследователи, действуя поочередно, могут завершить преследование за конечное время.

Пусть в некоторый момент времени t_i i-й преследователь находится в точке $z_i^* \in R^{3n} \setminus M_i$ и $u_i(\tau) \equiv 0$ при $0 \le \tau < t_i$.

Лемма 2. Если для управления убегающего $v = v(\tau)$, $t_i \le \tau \le T_i$, выполнено ограничение $\int_{t_i}^{T_i} |v(\tau)|^2\,d\tau \le \sigma_i$, то в игре (4) из точки $z_i^* = z_i(t_i)$ возможно завершение преследования за время $T_i - t_i$, где $T_i = T_i(t_i, z_i^*)$ — первый положительный корень уравнения (7) при $z_i = z_i^*$.

Доказательство. Преследователю с индексом i с момента времени t_i до T_i предпишем строить свое управление следующим образом:

$$u_i(T_i - \tau, v(\tau)) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{c_i\beta_i(T_i - \tau)}{b_i\alpha_i(T_i - \tau)} v(\tau) - \lambda_i^*(T_i - t_i, T_i - \tau, v(\tau), z_i^*)\xi_i(T_i - t_i, z_i^*), & \text{когда } t_i \le \tau \le t_i^*, \\ \dfrac{c_i\beta_i(T_i - \tau)}{b_i\alpha_i(T_i - \tau)}, & \text{когда } t_i^* < \tau \le T_i, \end{cases} \qquad (9)$$

где

$$\lambda_i^*(T_i - t_i, T_i - \tau, v(\tau), z_i^*) =$$

$$= \frac{1}{|\xi_i(T_i - t_i, z_i^*)|^2} \max\left\{0, \delta_i b_i \alpha_i(T_i - \tau) + 2\frac{c_i\beta_i(T_i - \tau)}{b_i\alpha_i(T_i - \tau)}(v(\tau), \xi_i(T_i - t_i, z_i^*))\right\},$$

а t_i^* — первый положительный корень уравнения

$$\int_{t_i}^{t} \max\{0, \delta_i b_i^2 \alpha_i^2(T_i - \tau) + 2c_i\beta_i(T_i - \tau)(v(\tau), \xi_i(T_i - t_i, z_i^*))\}\,d\tau =$$

$$= |\xi_i(T_i - t_i, z_i^*)|^2. \qquad (10)$$

Существование такого корня следует из леммы 1.

Покажем допустимость предложенного управления (9). Для этого из (9) находим, что

$$
|u_i(T_i-\tau, \upsilon(\tau))|^2 =
$$

$$
=\begin{cases} \dfrac{c_i^2\beta_i^2(T_i-\tau)}{b_i^2\alpha_i^2(T_i-\tau)}|\upsilon(\tau)|^2+\dfrac{\delta_i}{|\xi_i(T_i-t_i,z_i^*)|^2}\times \\ \times\max\{0,\delta_i b_i^2\alpha_i^2(T_i-\tau)+2c_i\beta_i(T_i-\tau)(\upsilon(\tau),\xi_i(T_i-t_i,z_i^*))\} & \text{при } t_i\le\tau\le t_i^*, \\ \dfrac{c_i^2\beta_i^2(T_i-\tau)}{b_i^2\alpha_i^2(T_i-\tau)}|\upsilon(\tau)|^2 & \text{при } t_i^*<\tau\le T_i, \end{cases}
$$

проинтегрировав в пределах от t_i до T_i, получим

$$
\int_{t_i}^{T_i}|u_i(T_i-\tau,\upsilon(\tau))|^2\,d\tau=\int_{t_i}^{T_i}\frac{c_i^2\beta_i^2(T_i-\tau)}{b_i^2\alpha_i^2(T_i-\tau)}|\upsilon(\tau)|^2\,d\tau+
$$

$$
+\frac{\delta_i}{|\xi_i(T_i-t_i,z_i^*)|^2}\int_{t_i}^{t_i^*}\max\{0,\delta_i b_i^2\alpha_i^2(T_i-\tau)+2c_i\beta_i(T_i-\tau)(\upsilon(\tau),\xi_i(T_i-t_i,z_i^*))\}d\tau.
$$

В силу того, что t_i^* — решение уравнения (10) и из определения функции $\chi_i(t,t_i), 0\le t_i\le t<\infty$, а также из того, что $\chi_i(t,t_i)\le\mu_i$, находим

$$
\int_{t_i}^{T_i}|u_i(T_i-\tau,\upsilon(\tau))|^2\,d\tau=
$$

$$
=\int_{t_i}^{T_i}\frac{c_i^2\beta_i^2(T_i-\tau)}{b_i^2\alpha_i^2(T_i-\tau)}|\upsilon(\tau)|^2\,d\tau+\delta_i\le\sigma_i\chi_i(t,t_i)+\delta_i\le\sigma_i\mu_i+\delta_i.
$$

Поскольку $\delta_i=\rho_i-\sigma_i\mu_i$, выполняется ограничение $\int_{t_i}^{T_i}|u_i(T_i-\tau,\upsilon(\tau))|^2\,d\tau\le\rho_i$, что и требовалось показать.

Пусть убегающий применяет управление $\upsilon=\upsilon(\tau),\ t_i\le\tau\le T_i$, для которого $\int_{t_i}^{T_i}|\upsilon(\tau)|^2\,d\tau\le\sigma_i$, а преследователь реализует стратегию вида (9). Подставив эти управления в уравнение (4) с начальным условием $z_i(t_i)=z_i^*$, по формуле Коши получаем

$$
\pi_i z_i(T_i)=\pi_i e^{A_i(T_i-t_i)}z_i^*+\int_{t_i}^{T_i}\pi_i e^{A_i(T_i-\tau)}(B_iu_i(T_i-\tau,\upsilon(\tau))-C_i\upsilon(\tau))d\tau=
$$

$$
=\xi_i(T_i-t_i,z_i^*)+\int_{t_i}^{T_i}(b_i\alpha_i(T_i-\tau)u_i(T_i-\tau,\upsilon(\tau))-c_i\beta_i(T_i-\tau)\upsilon(\tau))d\tau=
$$

$$
=\xi_i(T_i-t_i,z_i^*)-\frac{\xi_i(T_i-t_i,z_i^*)}{|\xi_i(T_i-t_i,z_i^*)|^2}\times
$$

$$
\times\int_{t_i}^{t_i^*}\max\{0,\delta_i b_i^2\alpha_i^2(T_i-\tau)+2c_i\beta_i(T_i-\tau)(\upsilon(\tau),\xi_i(T_i-t_i,z_i^*))\}d\tau=
$$

$$
=\frac{\xi_i(T_i-t_i,z_i^*)}{|\xi_i(T_i-t_i,z_i^*)|^2}\Bigg(|\xi_i(T_i-t_i,z_i^*)|^2-
$$

$$
-\int_{t_i}^{t_i^*}\max\{0,\delta_i b_i^2\alpha_i^2(T_i-\tau)+2c_i\beta_i(T_i-\tau)(\upsilon(\tau),\xi_i(T_i-t_i,z_i^*))\}\,d\tau\Bigg)=0.
$$

Это означает, что $z_{i_1}(T_i)=0$ или $x_i(T_i)=y(T_i)$. Таким образом, лемма 2 доказана.

Теорема 1. Если выполнено неравенство (5), то в игре (4) в случае а) при поочередной реализации стратегии (9) из произвольного начального положения $z^0=\{z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0\}$ при $z_i^0 \notin M_i$, $i=\overline{1,m}$, возможно завершение преследования за конечное время $T(z^0)=T_m(t_m, z_m)$, где $T_m=T_m(t_m, z_m)$ — первый положительный корень уравнения (7) при $i=m$.

Доказательство. Пусть $\upsilon=\upsilon(\tau), \tau\ge 0$, — произвольное допустимое управление убегающего. Величину σ представим в виде (5). Тогда предпишем каждому преследователю, начиная с первого, поочередно реализовать стратегию (9).

Первому преследователю предпишем управление (9) при $i=1$ до тех пор, пока $\int_0^t \upsilon(\tau)|^p\, d\tau \le \sigma_1$. При этом для остальных преследователей полагаем $u_i(\cdot)\equiv 0$, $i=\overline{2,m}$. Тогда для $\upsilon(\tau), 0\le\tau\le T_1$, возможны два случая: $\int_0^{T_1} |\upsilon(\tau)|^p\, d\tau \le \sigma_1$ или $\int_0^{T_1} |\upsilon(\tau)|^p\, d\tau > \sigma_1$, где $T_1=T_1(z_1^0)$ — первый положительный корень уравнения (7) при $i=1$. В первом случае в силу леммы 2 из точки z_1^0 первый преследователь завершает преследование в дифференциальной игре (4) за время $T_1=T_1(z_1^0)$. Для второго случая существует такой момент $t_2<T_1$, что $\int_0^{t_2} \upsilon(\tau)|^p\, d\tau=\sigma_1$. Тогда с этого момента t_2 из позиции $z_2^*=z_2(t_2)=e^{t_2A_2}z_2^0 -$ $-\int_0^{t_2} e^{(t_2-\tau)A_2}C_2\upsilon(\tau)d\tau$ начинает реализовывать управление (9) при $i=2$ второй преследователь, для которого до момента t_2 полагали, что $u_2(\cdot)\equiv 0$. Далее, для второго преследователя повторяется вся процедура преследования, как и для первого и т.д. Таким образом, поочередно реализуя свои управления $u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_{m-1}$, преследователи могут завершить игру (4) из начального положения z^0 до $m-1$-го шага за время $T(z^0)=T_i(t_i, z_i^*)$, где $1\le i\le m-1$ и $z_1^*=z_1^0$. Доказательство последнего утверждения проводится для $i\ge 2$, как и для $i=1$.

Если из начального положения z^0 до $m-1$-го шага не завершится преследование, то наступит такой момент $t_m<T_{m-1}$, что $\int_{t_{m-1}}^{t_m} |\upsilon(\tau)|^2\, d\tau=\sigma_{m-1}$, и из точки $z_m^*=z_m(t_m)=e^{t_mA_m}z_m^0 - \int_0^{t_m} e^{(t_m-\tau)A_m}C_m\upsilon(\tau)d\tau$ m-й преследователь начинает реализовывать управление (9) при $i=m$, и управление $u_m(T_m-\tau, \upsilon(\tau)), t_m\le\tau\le T_m$, применяется до тех пор, пока $\int_{t_m}^{T_m} |\upsilon(\tau)|^2\, d\tau \le \sigma_m$. Из того, что $\sigma_m=\sigma-(\sigma_1+\ldots$ $\ldots+\sigma_{m-1})$ и это есть последняя остаточная часть ресурса убегающего, то для произвольного $\upsilon(\tau), t_m\le\tau\le T_m$, получаем, что $\int_{t_m}^{T_m} |\upsilon(\tau)|^2\, d\tau \le \sigma_m$. Тогда в силу

леммы 2 и предположения 1 из положения z_m^* m-й преследователь до момента завершения преследования затрачивает время $T_m - t_m$. Следовательно, игра (4) с ограничениями (2), (3) для случая а) из точки z^0 завершается за время $T(z^0) = T_m(t_m, z_m^*)$ (ограниченность этого времени следует из леммы 1).

Теорема доказана.

1.4. Решение задачи преследования в случае б). Пусть $z_i^0 = (z_{i_1}^0, z_{i_2}^0, z_{i_3}^0) \notin M_i$ при всех $i = \overline{1, m}$. Аналогично предыдущему пункту для $i = \overline{1, k_2}$ определяется разрешающая функция вида

$$\lambda_i(t, t-\tau, v, z_i^0) = \max\{0, \delta_i b_i^0 \alpha_i^0 (t-\tau) + 2c_i \beta_i (t-\tau)(v, \xi_i(t, z_i^0))\} / |\xi_i(t, z_i^0)|^2.$$

Для $i = \overline{1+k_2, m}$ считается $\lambda_i = 0$. Здесь $\xi_i(t, z_i^0) = \pi_i e^{A_i t} z_i^0 = z_{i_1}^0 + \alpha_i(t) z_{i_2}^0 - \beta_i(t) z_{i_3}^0$; $\alpha_i(t) = \dfrac{1 - e^{-\alpha_i t}}{\alpha_i}$, $\beta_i(t) = \dfrac{1 - e^{-\beta_i t}}{\beta_i}$; $\delta_i = \rho_i - \sigma\mu_i$ для $i = \overline{1, k_1}$; $\delta_i = 0$ для $i = \overline{k_1 + 1, k_2}$.

Для изучаемого случая рассматривается уравнение

$$1 - \inf_{v(\cdot)\in V_\sigma[0,t]} \max_{i=\overline{1,k_2}} \int_0^t \lambda_i(t, t-\tau, v(\tau), z_i^0)\, d\tau = 0. \tag{11}$$

Теорема 2. В игре (4) в случае б) из произвольной точки $z^0 = \{z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0\}$ при $z_i^0 \notin M_i$, $i = \overline{1, m}$, возможно завершение преследования за конечное время $T = T(z^0)$, где $T(z^0)$ — первый положительный корень уравнения (11). При этом выполняется оценка

$$T(z^0) \le \min_{i=\overline{1,k_1}} T(z_i^0), \tag{12}$$

где $T(z_i^0)$ — первый положительный корень уравнения

$$1 - \inf_{v(\cdot)\in V_\sigma[0,t]} \int_0^t \lambda_i(t, \tau, v(\tau), z_i^0)\, d\tau = 0. \tag{13}$$

Доказательство. Покажем существование конечного решения уравнения (11). Для этого воспользуемся неравенством

$$1 - \inf_{v(\cdot)\in V_\sigma[0,t]} \max_{i=\overline{1,k_2}} \int_0^t \lambda_i(t, t-\tau, v(\tau), z_i^0)\, d\tau \le$$
$$\le \min_{i=\overline{1,k_2}} \left(1 - \inf_{v(\cdot)\in V_\sigma[0,t]} \int_0^t \lambda_i(t, t-\tau, v(\tau), z_i^0)\, d\tau \right). \tag{14}$$

С помощью рассуждений, применяемых при доказательстве леммы 1, нетрудно показать, что для каждого $i = \overline{1, k_1}$ и $z_i^0 \notin M_i$ уравнение (13) имеет конечный положительный корень $T_i = T(z_i^0)$. Как отмечалось выше, для всех $i = \overline{1, k_1}$ величина $\delta_i > 0$. Отсюда следует, что $\min\limits_{i=\overline{1,k_1}} T(z_i^0)$ — первый положительный корень уравнения

$$\min_{i=\overline{1,k_1}} \left(1 - \inf_{v(\cdot)\in V_\sigma[0,t]} \int_0^t \lambda_i(t, t-\tau, v(\tau), z_i^0)\, d\tau \right) = 0.$$

В силу этого и неравенства (14) находим требуемую оценку (12).

Теперь покажем, что в случае б) преследование завершается в игре (4) за время $T = T(z^0)$. Пусть убегающий применяет произвольное допустимое управление $\upsilon = \upsilon(\tau)$, $0 \le \tau \le T$. Тогда каждый i-й преследователь, где $i = \overline{1, k_2}$, выбирает управление

$$u_i(T-\tau, \upsilon(\tau)) = \begin{cases} \dfrac{c_i \beta_i(T-\tau)}{b_i \alpha_i(T-\tau)} \upsilon(\tau) - \lambda_i^*(T, T-\tau, \upsilon(\tau), z_i^0) \xi_i(T, z_i^0) & \text{при } 0 \le \tau \le t^*, \\ \dfrac{c_i \beta_i(T-\tau)}{b_i \alpha_i(T-\tau)} \upsilon(\tau) & \text{при } t^* < \tau \le T, \end{cases}$$

где

$$\lambda_i^*(T, T-\tau, \upsilon(\tau), z_i^0) =$$

$$= \frac{1}{|\xi_i(T, z_i^0)|^2} \max \left\{ 0, \delta_i b_i \alpha_i(T-\tau) + 2 \frac{c_i \beta_i(T-\tau)}{b_i \alpha_i(T-\tau)} (\upsilon(\tau), \xi_i(T, z_i^0)) \right\},$$

а t^* — первый положительный корень уравнения

$$1 - \max_{i=\overline{1, k_2}} \int_0^t \lambda_i(T, T-\tau, \upsilon(\tau), z_i^0) d\tau = 0.$$

Допустимость этого управления устанавливается тем же способом, что и в лемме 2 для управления (9).

Если управления $u_i(T-\tau, \upsilon(\tau)) \le \tau \le T$, $i = \overline{1, k_2}$, и $\upsilon = \upsilon(\tau)$, $0 \le \tau \le T$, подставить в уравнения (4) и учесть начальные условия $z_i(0) = z_i^0$, то будем иметь

$$\pi_i z_i(T) = \pi_i e^{TA_i} z_i^0 + \int_0^T [b_i \alpha_i(T-\tau) u_i(T-\tau, \upsilon(\tau)) - c_i \beta_i(T-\tau) \upsilon(\tau)] d\tau = \xi_i(T, z_i^0) -$$

$$- \xi_i(T, z_i^0) \cdot \int_0^{t^*} \lambda_i(T, T-\tau, \upsilon(\tau), z_i^0) d\tau = \xi_i(T, z_i^0) \left(1 - \int_0^{t^*} \lambda_i(T, T-\tau, \upsilon(\tau), z_i^0) d\tau \right).$$

Предположение, что $1 - \int_0^{t^*} \lambda_i(T, T-\tau, \upsilon(\tau), z_i^0) d\tau > 0$ для всех $i = \overline{1, k_2}$ противоречит тому, что

$$\min_{i=\overline{1, k_2}} \left(1 - \int_0^{t^*} \lambda_i(T, T-\tau, \upsilon(\tau), z_i^0) d\tau \right) = 0.$$

Следовательно, существует такое значение i_0 индекса $i = \overline{1, k_2}$, что

$$1 - \int_0^{t^*} \lambda_{i_0}(T, T-\tau, \upsilon(\tau), z_{i_0}^0) d\tau = 0.$$

Отсюда находим, что $\pi_{i_0} z_{i_0}(T) = 0$ или $z_{i_0}(T) \in M_{i_0}$.

Теорема 2 доказана.

2. ГРУППОВОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ ПРИ ПРОСТОМ ДВИЖЕНИИ ИГРОКОВ. СЛУЧАЙ *l*-ПОИМКИ

В предыдущем разделе рассмотрели пример достаточно общего характера. В настоящем разделе рассматривается задача группового преследования при простом движении игроков для случая l-поимки. При этом исследуется два эффекта, связанные с числом преследователей: 1) время поимки группы преследователей меньше времени поимки отдельного преследователя; 2) группа преследователей завершает преследование за конечное время, а каждый из них, действуя в одиночку, не в состоянии завершить игру. Аналогичные эффекты для случая геометрических ограничений изучены в работах [5, 6, 8, 9, 12, 18, 19, 23–29] и др.

2.1. Постановка задачи. Пусть точки x_i, $i=\overline{1, m}$, и y перемещаются в пространстве R^n со скоростями u_i, $i=\overline{1, m}$, и υ соответственно. Их движения описываются уравнениями

$$\dot{x}_i = u_i, \ \ i=\overline{1, m}, \ \ \dot{y}=\upsilon, \tag{15}$$

где u_i, $i=\overline{1, m}$, и υ выбираются в виде функций $u_i(\cdot)$, $i=\overline{1, m}$, $\upsilon(\cdot)$ из пространства $L_2[0, \infty)$ и удовлетворяют ограничениям

$$\int_0^\infty u_i(\tau)|^2 \, d\tau \le \rho_i, \ \ \rho_i > 0, \ \ i=\overline{1, m}, \tag{16}$$

$$\int_0^\infty \upsilon(\tau)|^2 \, d\tau \le \sigma, \ \ \sigma \ge 0. \tag{17}$$

Такие управления назовем допустимыми в игре (15).

Точки x_i, $i=\overline{1, m}$, преследуют точку y. Процесс преследования считается завершенным, если в некоторый конечный момент времени хотя бы для одного $i=\overline{1, m}$ будет выполнено неравенство $|x_i - y| \le l_i$, $l_i \ge 0$. Пусть x_i^0, $i=\overline{1, m}$, и y^0 — местоположение точек x_i, $i=\overline{1, m}$, и y в начальный момент времени $(t=0)$. Считается, что $|x_i^0 - y^0| > l_i$ при всех $i=\overline{1, m}$.

Для удобства исследования вводятся переменные $z_i = x_i - y$. Тогда уравнения (15) принимают вид

$$\dot{z}_i = u_i - \upsilon, \ \ z_i(0) = z_i^0, \ \ i=\overline{1, m}, \tag{18}$$

где $z_i^0 = x_i^0 - y^0, |z_i^0| > l_i$, а терминальные множества M_i представляются в виде $M_i = \{z_i \in R^n : |z_i| \le l_i\}$, $l_i \ge 0$, $i=\overline{1, m}$.

Для конструирования стратегии преследователям разрешается использовать в каждый момент времени только текущее значение управления $\upsilon(t)$ и постоянные z_i^0, ρ_i, σ и l_i.

Предположение 2. Для игры (15)–(18) справедливо неравенство

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_m > \sigma. \tag{19}$$

При выполнении неравенства (19), как в предыдущей задаче, рассматривается в отдельности два случая:

а) $\rho_i > \sigma$ для некоторых $i=\overline{1, m}$;

б) $\rho_i \le \sigma$ при всех $i=\overline{1, m}$.

Для первого случая игру можно назвать «Львы против буйвола», а для второго — «Гиены против буйвола». Поскольку в первом случае каждый из «львов» может поймать «буйвола», однако их стая быстрее достигает цели. Во втором случае каждая из «гиен» не в состоянии поймать «буйвола», а стая «гиен», поочередно преследуя, сначала обессиливает его, а затем достигает цели.

2.2. Разрешающая функция. Пусть $\rho_i > \sigma$ для некоторых $i=\overline{1, m}$. Тогда определим функцию

$$\lambda_i(\upsilon, z_i^0) = \max\{\lambda \ge 0 : \lambda(M_i - z_i^0) \cap U_i(\lambda, \upsilon) \ne \varnothing\},$$

где $U_i(\lambda, \upsilon) = (|\upsilon|^2 + \lambda\delta_i)^{1/2} S - \upsilon, \delta = \rho_i - \sigma$, S — шар радиуса 1 с центром в нуле пространства R^n. Найдем те $\lambda \geq 0$, для которых выполнено соотношение $\lambda(l_i S - z_i^0) \cap U_i(\lambda, v) \neq \varnothing$, что эквивалентно неравенству (см. [22])

$$\lambda W_{l_i S - z_i^0}(-\psi) + W_{U_i(\lambda, v)}(\psi) \geq 0$$

для всех $\psi \in R^n$ при $|\psi| = 1$. Отсюда

$$\lambda((\psi, z_i^0) + l_i |\psi|) + (|v|^2 + \lambda\delta_i)^{1/2} |\psi| - (\psi, v) \geq 0$$

или

$$\lambda l_i + (|v|^2 + \lambda\delta_i)^{1/2} \geq (\psi, v - \lambda z_i^0).$$

Однако $\max\limits_{|\psi|=1} (\psi, v - \lambda z_i^0) = |v - \lambda z_i^0|$. Тогда получаем $\lambda l_i + (|v|^2 + \lambda\delta_i)^{1/2} \geq$ $\geq |v - \lambda z_i^0|$. Выполнив элементарные выкладки, находим, что

$$0 \geq \lambda[\lambda^2 h_i^2 - 2\lambda(h_i(\delta_i + 2(v, z_i^0)) + 2l_i^2 \delta_i) + (\delta_i + 2(v, z_i^0))^2 - 4l_i^2 |v|^2],$$

где $h_{\mathrm{i}} = |z_i^0|^2 - l_i^0 > 0$. Отсюда получаем, что $0 \leq \lambda \leq \max\{0, \lambda_i^*(v, z_i^0)\}$, где

$$\lambda_i^*(v, z_i^0) = (h_i(\delta_i + 2(v, z_i^0)) + 2l_i^2 \delta_i + |z_i^0 \delta_i + v h_i| 2l_i) / h_i^2.$$

Таким образом, в этой задаче разрешающую функцию $\lambda_i(v, z_i^0)$ определяем в виде

$$\lambda_i(v, z_i^0) = \max\{0, \lambda_i^*(v, z_i^0)\}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\lambda_i(v, z_i^0) = \begin{cases} > 0, & \text{если } \delta_i + 2(v, z_i^0) + 2l_i |v| > 0, \\ 0, & \text{если } \delta_i + 2(v, z_i^0) + 2l_i |v| \leq 0. \end{cases}$$

2.3. «Львы против буйвола». Пусть $\rho_i > \sigma$ для $i = \overline{1, k_1}$, $\rho_i = \sigma$ для $i = \overline{k_1 + 1, k_2}$ и $\rho_i < \sigma$ для $i = \overline{k_2 + 1, m}$. Тогда с помощью разрешающей функции $\lambda_i(v, z_i^0)$, определенной в п. 2.2, находим стратегию для каждого преследователя с индексами $i = \overline{1, k_2}$ вида

$$u_i(v, z_i^0) = v + \lambda_i(v, z_i^0)(m_i(v, z_i^0) - z_i^0), \tag{20}$$

где $m_i(v, z_i^0) = -\dfrac{v - \lambda_i(v, z_i^0) z_i^0}{|v - \lambda_i(v, z_i^0) z_i^0|} l_i$. Для $i = \overline{k_2 + 1, m}$ положим $\lambda_i \equiv 0$.

Из вида стратегии (20) легко вычислить, что

$$|u_i(v, z_i^0)|^2 = |v|^2 + \delta_i \lambda_i(v, z_i^0). \tag{21}$$

Затем рассмотрим уравнение

$$\Lambda(t, v(\cdot)) = 1 - \max_{i = \overline{1, k_2}} \int_0^t \lambda_i(v(\tau), z_i^0) d\tau = 0 \tag{22}$$

относительно t, $t \geq 0$. Пусть $T = T(z^0, v(\cdot))$ — первый положительный корень этого уравнения, где $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего и $z^0 = (z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0)$ — начальное состояние игры. Существование и ограниченность такого корня доказывается при установлении справедливости следующей теоремы.

Теорема 3. В игре (18) в случае а) из произвольной точки z^0 с помощью стратегии (20) возможно завершение преследования за время $T(z^0, \upsilon(\cdot)) \leq$ $\leq \min\limits_{i=\overline{1, k_1}} \left(\dfrac{|z_i^0| - l_i}{\sqrt{\rho_i} - \sqrt{\sigma}} \right)^2$ при всех допустимых управлениях убегающего.

Доказательство. Вначале покажем ограниченность и существование корня $T(z^0, \upsilon(\cdot))$ уравнения (22). Для этого, учитывая ограничение на управления $\upsilon = \upsilon(t)$, $t \geq 0$, в виде (17) и используя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\Lambda(t, \upsilon(\cdot)) = \min_{i=\overline{1, k_2}} \left(1 - \int_0^t \frac{1}{h_i^2} \max\{0, h_i(\delta_i + 2(\upsilon(\tau), z_i^0)) + 2l_i^2 \delta_i + 2l_i |z_i^0 \delta_i + \upsilon(\tau) h_i|\} d\tau \right) \leq$$

$$\leq \min_{i=\overline{1, k_2}} \left(1 - \frac{1}{h_i^2} \max\{0, t\delta_i (h_i + 2l_i^2) + 2h_i \int_0^t (\upsilon(\tau), z_i^0) d\tau + 2l_i \int_0^t |z_i^0 \delta_i + \upsilon(\tau) h_i| d\tau\} \right) \leq$$

$$\leq \min_{i=\overline{1, k_2}} \left(1 - \frac{1}{h_i^2} \max\{0, t\delta_i (h_i + 2l_i^2) - 2h_i \int_0^t |\upsilon(\tau)| |z_i^0| d\tau + 2l_i \int_0^t (|z_i^0| \delta_i - |\upsilon(\tau)| h_i) d\tau\} \right) =$$

$$= \min_{i=\overline{1, k_2}} \left(1 - \frac{1}{h_i^2} \max\left\{ 0, t\delta_i (h_i + 2l_i^2 + 2l_i |z_i^0|) - 2h_i (|z_i^0| + l_i) \int_0^t |\upsilon(\tau)| d\tau \right\} \right) \leq$$

$$\leq \min_{i=\overline{1, k_2}} \left(1 - \frac{1}{h_i^2} \max\left\{ 0, t\delta_i (|z_i^0| + l_i)^2 - 2h_i (|z_i^0| + l_i) \sqrt{t} \left(\int_0^t |\upsilon(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \right\} \right) \leq$$

$$\leq \min_{i=\overline{1, k_2}} \left(1 - \frac{1}{h_i^2} \max\{0, t(\rho_i - \sigma)(|z_i^0| + l_i)^2 - 2h_i \sqrt{t\sigma} (|z_i^0| + l_i)\} \right).$$

Нетрудно проверить, что последняя часть в этой цепочке неравенств обращается в нуль в момент времени $t = \theta$, где $\theta = \min\limits_{i=\overline{1, k_1}} \left(\dfrac{|z_i^0| - l_i}{\sqrt{\rho_i} - \sqrt{\sigma}} \right)^2$. Следовательно, в силу непрерывности функции $\Lambda(t, \upsilon(\cdot))$ по t, $t \geq 0$, имеем $\Lambda(\theta, \upsilon(\cdot)) \leq 0$. Отсюда и из того, что $\Lambda(0, \upsilon(\cdot)) = 1$, находим существование такого момента $T = T(z^0, \upsilon(\cdot))$, что $\Lambda(T, \upsilon(\cdot)) = 0$. При этом $T(z^0, \upsilon(\cdot)) \leq \theta$, что и требовалось показать.

Теперь покажем, что из произвольной точки $z^0 = \{z_1^0\ z_2^0, \ldots, z_m^0\}$ при $|z_i^0| > l_i$ для всех $i = \overline{1, m}$ преследование завершается именно в момент времени $T(z^0, \upsilon(\cdot))$. Для этого преследователи должны придерживаться реализации стратегий вида (20). Тогда уравнения (18) преобразуются к виду

$$\dot{z}_i = \lambda_i(\upsilon(t), z_i^0)(m_i(\upsilon(t), z_i^0) - z_i^0),$$

$$z_i(0) = z_i^0, \; i = \overline{1, k_2}, \; 0 \leq t \leq T.$$

Отсюда по формуле Коши получаем

$$z_i(t) = z_i^0 + \int_0^t \lambda_i(\upsilon(\tau), z_i^0)(m_i(\upsilon(\tau), z_i^0) - z_i^0) d\tau,$$

где $0 \leq t \leq T$. Учитывая равенство $\Lambda(T, \upsilon(\cdot)) = 0$ и вид функции $m_i(\upsilon(\tau), z_i^0)$, находим

$$\min_{i=\overline{1,k_2}} (|z_i(T)| - l_i) =$$

$$= \min_{i=\overline{1,k_2}} \left(\left| z_i^0 - z_i^0 \int_0^T \lambda_i(\upsilon(\tau), z_i^0) d\tau + \int_0^T \lambda_i(\upsilon(\tau), z_i^0) m_i(\upsilon(\tau), z_i^0) d\tau \right| - l_i \right) \le$$

$$\le \min_{i=\overline{1,k_2}} \left(|z_i^0| \left(1 - \int_0^T \lambda_i(\upsilon(\tau), z_i^0) d\tau \right) - l_i \left(1 - \int_0^T \lambda_i(\upsilon(\tau), z_i^0) d\tau \right) \right) =$$

$$= \min_{i=\overline{1,k_2}} \left(1 - \int_0^T \lambda_i(\upsilon(\tau), z_i^0) d\tau \right) (|z_i^0| - l_i) \le 0 .$$

Следовательно, получаем существование такого i_0, что $|z_{i_0}(T)| \le l_{i_0}$.

Остается показать допустимость стратегии (20). Из равенства (21) находим

$$\int_0^T |u_i(\upsilon(\tau), z_i^0)|^2 d\tau = \int_0^T |\upsilon(\tau)|^2 d\tau + \delta_i \int_0^T \lambda_i(\upsilon(\tau), z_i^0) d\tau \le \sigma + \delta_i \int_0^T \lambda_i(\upsilon(\tau), z_i^0) d\tau .$$

Так как T — решение уравнения (22), то для всех $i = \overline{1, k_2}$ имеем $\int_0^T \lambda_i(\upsilon(\tau), z_i^0) d\tau \le 1.$

Следовательно, для всех $i = \overline{1, k_2}$ получаем $\int_0^T |u_i(\upsilon(\tau), z_i^0)|^2 d\tau \le \sigma + \delta_i = \rho_i$,

что и завершает доказательство теоремы 3.

Как следует из теоремы 3, *i*-й преследователь, для $i = \overline{1, k_2}$ в отдельности, может завершить преследование не позже, чем за время $\theta_i = \left(\dfrac{|z_i^0| - l_i}{\sqrt{\rho_i} - \sqrt{\sigma}} \right)^2$.

2.4. «Буйвол в окружении львов». Теперь рассмотрим особые случаи, в которых время поимки группы преследователей строго меньше времени поимки отдельного преследователя. Для этого предположим, что при всех $i = \overline{1, k_2}$ выполнены соотношения $\rho_i = \rho > \sigma,\ l_i = l \ge 0, |z_i^0| = R > l$. В этом случае стратегия преследователей принимает вид

$$u(\upsilon, z_i^0) = \upsilon + \lambda(\upsilon, z_i^0)(m(\upsilon, z_i^0) - z_i^0), \tag{23}$$

где

$$\lambda(\upsilon, z_i^0) = \max\,\{0, h(\delta + 2(\upsilon, z_i^0)) + 2l^2\delta + 2l\,|\,z_i^0\delta + \upsilon h\,|\} / h^2,$$

$$h = R^2 - l^2,\ \ \delta = \rho - \sigma,\ \ m(\upsilon, z_i^0) = -\frac{\upsilon - \lambda(\upsilon, z_i^0) z_i^0}{|\upsilon - \lambda(\upsilon, z_i^0) z_i^0|}\, l.$$

Теорема 4. Если $0 \in \mathrm{co}\,\{z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0\}$, то при произвольном допустимом управлении убегающего преследователи, применяя стратегию (23), завершают преследование из заданного положения z^0 за время $T = T(\upsilon(\cdot), z^0) \le \dfrac{(R-l)^2}{\rho - \sigma}$,

где $T(\upsilon(\cdot), z^0)$ — первый положительный корень уравнения

$$\Lambda(t, \upsilon(\cdot)) = 1 - \max_{i=\overline{1,m}} \int_0^t \lambda(\upsilon(\tau), z_i^0) d\tau = 0 . \tag{24}$$

Доказательство. Сначала покажем существование и ограниченность $T = T(\upsilon(\cdot), z^0)$. Для этого рассмотрим следующие очевидные соотношения:

$$\Lambda(t,\upsilon(\cdot)) \le 1 - \frac{1}{h^2}\max_{i=\overline{1,m}} \max\left\{0, t\delta(h+2l^2) + 2h\int_0^t (\upsilon(\tau), z_i^0)d\tau + 2l\int_0^t |z_i^0\delta + \upsilon(\tau)h\,|\,d\tau\right\} \le$$

$$\le 1 - \frac{1}{h^2}\max_{i=\overline{1,m}} \max\left\{0, t\delta(h+2l^2) + 2h\int_0^t (\upsilon(\tau), z_i^0)d\tau + 2l\left\| tz_i^0\delta + h\int_0^t \upsilon(\tau)\,d\tau \right\|\right\} =$$

$$= 1 - \frac{1}{h^2}\max_{i=\overline{1,m}} \max\left\{0, t\delta(h+2l^2) + 2h\left(\int_0^t \upsilon(\tau)\,d\tau, z_i^0\right) + \right.$$

$$\left. + 2l\left(t^2R^2\delta^2 + 2t\delta h\left(\int_0^t \upsilon(\tau)d\tau, z_i^0\right) + h^2\left(\int_0^t \upsilon(\tau)d\tau\right)^2\right)^{1/2}\right\} \le 1 - \frac{t\delta}{h^2}(h+2l^2+2Rl).$$

Последнее неравенство вытекает из условия $0 \in \mathrm{co}\,\{z_1^0, z_1^0, \ldots, z_m^0\}$, так как в каком бы положении не находились точки z_i^0, всегда среди них существует такое z_j^0, $j = \overline{1,m}$, что $\left(\int_0^t \upsilon(\tau)d\tau, z_j^0\right) = (y(t) - y^0, z_j^0) \ge 0$. Очевидно, что функция $1 - \frac{t\delta}{h^2}(h+2l^2+2Rl)$ обращается в нуль в момент времени $t = \frac{(R-l)^2}{\rho-\sigma}$. Отсюда и из непрерывности функции $\Lambda(t,\upsilon(\cdot))$ по t вытекает существование такого момента $T = T(\upsilon(\cdot), z^0)$, что $\Lambda(T,\upsilon(\cdot)) = 0$, и оценка для этого времени $T(\upsilon(\cdot)z^0) \le (R-l)^2 \setminus \delta$.

Поскольку дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям, приведенным при доказательстве предыдущей теоремы, на этом доказательство теоремы 4 завершаем.

Замечание. При сделанных выше предположениях каждый преследователь завершает игру за время $\left(\frac{R-l}{\sqrt{\rho}-\sqrt{\sigma}}\right)^2$, превышающее $\frac{(R-l)^2}{\rho-\sigma}$.

2.5. «Буйвол за окружением львов». Теорема 5. Если $0 \notin \mathrm{co}\,\{z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0\}$, то существует хотя бы пара таких точек $z_{i_1}^0$ и $z_{i_2}^0$, что $z_{i_1}^0 \ne z_{i_2}^0$, $i_1, i_2 \in \overline{1,m}$, и преследователи, применяя стратегию (23), завершают игру за время $T = T(\upsilon(\cdot), z^0) < \left(\frac{R-l}{\sqrt{\rho}-\sqrt{\sigma}}\right)^2$, где $T(\upsilon(\cdot), z^0)$ — первый положительный корень уравнения (24).

Доказательство. Поскольку $z_{i_1}^0 \ne z_{i_2}^0$, то и $\int_0^t (\upsilon(\tau), z_{i_1}^0)d\tau \ne \int_0^t (\upsilon(\tau), z_{i_2}^0)d\tau$. Следовательно, хотя бы для одного из i_1 или i_2 выполнено неравенство $\left(\int_0^t \upsilon(\tau)d\tau, z_i^0\right) > -R\int_0^t |\upsilon(\tau)|\,d\tau$. В силу этого и из доказательства предедушей теоремы имеем

$$\Lambda(t,\upsilon(\cdot)) < 1 - \max_{i=\overline{1,m}} \frac{1}{h^2}\max\left\{0, t\delta(h+2l^2) - 2hR\int_0^t |\upsilon(\tau)|\,d\tau + 2l\int_0^t (R\delta - |\upsilon(\tau)|)d\tau\right\} \le$$

$$\le 1 - \frac{1}{h^2}\max\,\{0, t\delta(R+l)^2 - 2h\sqrt{t\sigma}(R+l)\}.$$

Поскольку последняя часть этих неравенств обращается в нуль в момент времени $\theta=\left(\frac{R-l}{\sqrt{\rho}-\sqrt{\sigma}}\right)^2$, то получаем, что $T(v(\cdot), z^0)<\theta$. Так как доказательство о возможности завершения игры и допустимости реализации стратегии (23) проводится так же, как в теореме 3, то этим и завершаем доказательство теоремы 5.

2.6. «Гиены против буйвола». Пусть $\rho_i \le \sigma$ для всех $i=\overline{1, m}$, но $\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_m>\sigma$. В таком случае величину σ представим в виде $\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_m$, где $\sigma_i=\sigma\rho_i/(\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_m)$, $i=\overline{1, m}$. Очевидно, что $\rho_i>\sigma_i$. Здесь, как и в п. 2.3, преследователи применяют стратегию в виде (20), т.е.

$$u_i(v, z_i^*)=v+\lambda_i(vz_i^*)(m(v, z_i^*)-z_i^*),\ i=\overline{1, m}, \tag{25}$$

где в разрешающей функции $\lambda_i(v, z_i^*)$ величина δ_i имеет вид $\delta_i=\rho_i-\sigma_i$ при всех $i=\overline{1, m}$ и $z_i^*=z_i(t_i)$ — положение z_i-го объекта в момент t_i, т.е. в момент вступления в «активное» действие.

Как отмечено в постановке игры «Гиены против буйвола», в этом случае «гиены» поочередно будут применять стратегию (25), т.е. когда j-й преследователь применяет эту стратегию, то для $i=\overline{j+1, m}$ полагается $u_i\equiv 0$.

Теорема 6. Если $\int_{t_i}^{\theta_i}|v(\tau)|^2\,d\tau\le\sigma_i$, где $\theta_i=\theta_i(v(\cdot), z_i^*)$ — первый положительный корень уравнения $1-\int_{t_i}^{t}\lambda_i(v(\tau), z_i^*)d\tau=0$, то из точки z_i^* i-й преследователь, применяя стратегию (25), завершает преследование за время $\theta_i\le\left(\frac{|z_i^*|-l_i}{\sqrt{\rho_i}-\sqrt{\sigma_i}}\right)^2+t_i$.

Если в теореме 3 положить $k_1=1$, то получим доказательство и для этой теоремы. Поэтому повторяться не будем.

Теорема 7. В игре (18) в случае б) преследователи, применяя стратегии (25) поочередно, завершают преследование из произвольной точки z^0 за ограниченное время.

Доказательство. Пусть из точки $z_1^0=z_1^*$, $|z_1^0|>l_1$, с момента времени $t_1=0$ первый преследователь начинает применять стратегию $u_1(v(\cdot), z_1^0)$ (см. (25)). Если до момента времени $T_1=\left(\frac{|z_1^0|-l_1}{\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\sigma_1}}\right)^2$ со стороны убегающего не израсходован ресурс σ_1, то в силу теоремы 6 игра завершается не позже этого времени. Теперь допустим, что в некоторый момент времени $t=t_2$, $t_2<T_1$, выполнено соотношение $\int_0^{t_2}|v(\tau)|^2\,d\tau=\sigma_1$, при этом $\int_0^{t}|v(\tau)|^2\,d\tau>\sigma_1$ для $t>t_2$. С момента t_2 второй преследователь из точки $z_2^*=z_2(t_2)=z_2^0-\int_0^{t_2}v(\tau)d\tau$ начинает применять стратегию $u_2(v(\cdot), z_2^*)$. Если же неравенство $\int_0^{t}|v(\tau)|^2\,d\tau\le\sigma_2$ выполнено до момента времени $T_2=\left(\frac{|z_2^*|-l_2}{\sqrt{\rho_2}-\sqrt{\sigma_2}}\right)^2+t_2$, то убегающий будет пойман вторым преследователем не позже, чем за время T_2. Пусть до некоторого момента времени $t_3 < T_2$ убегающий остается непойманным и вторым преследователем, и для этого момента t_3 имеет место равенство $\int_{t_2}^{t_3} |v(\tau)|^2 d\tau = \sigma_2$. При этом считаем, что $\int_{t_2}^{t} |v(\tau)|^2 d\tau > \sigma_2$ для $t > t_3$. Теперь с момента t_3 из точки $z_3^* = z_3(t_3) = z_3^0 - \int_0^{t_3} v(\tau) d\tau$ начинает действовать третий преследователь и т.д.

Предположим, что при таком способе действия преследователей с индексами от 1 до $m-1$ поимка не осуществлена. Тогда со стороны убегающего будет израсходован ресурс $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{m-1}$. Значит, когда очередь доходит до m-го преследователя, у убегающего остается только $\sigma_m = \sigma - (\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{m-1})$ ресурса. Поскольку $\rho_m > \sigma_m$, то согласно теореме 6 m-й преследователь, применяя стратегию $u_m(v(\cdot), z_m^*)$ из начальной точки $z_m^* = z_m(t_m) = z_m^0 - \int_0^{t_m} v(\tau) d\tau$, завершает преследование не позже, чем за время $T_m = \left(\dfrac{|z_m^*| - l_m}{\sqrt{\rho_m} - \sqrt{\sigma_m}} \right)^2 + t_m$.

Остается показать ограниченность времени $T_m = T_m(v(\cdot), z^0)$. Для этого имеем, что $t_i \le \left(\dfrac{|z_{i-1}^*| - l_{i-1}}{\sqrt{\rho_{i-1}} - \sqrt{\sigma_{i-1}}} \right)^2 + t_{i-1}$, $i = \overline{1, m-1}$. В силу этих соотношений получаем

$$T_m < \left(\frac{|z_1^0| - l_1}{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\sigma_1}} \right)^2 + \left(\frac{|z_2^*| - l_2}{\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\sigma_2}} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{|z_0^*| - l_m}{\sqrt{\rho_m} - \sqrt{\sigma_m}} \right)^2 .$$

Согласно неравенству Коши–Буняковского для z_m^* находим

$$|z_m^*| \le |z_m^0| + \left| \int_0^{t_m} v(\tau) d\tau \right| \le |z_m^0| + \sqrt{t_m} \left(\int_0^{t_m} |v(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \le |z_m^0| + \sqrt{t_m} \sqrt{\sigma_0 + \ldots + \sigma_{m-1}} .$$

Однако $t_m \le \left(\dfrac{|z_{m-1}^*| - l_{m-1}}{\sqrt{\rho_{m-1}} - \sqrt{\sigma_{m-1}}} \right)^2 + t_{m-1}$. Итак, ограниченность вектора z_m^* и времени t_m следует из ограниченности вектора z_{m-1}^* и времени t_{m-1}, а вектора z_{m-1}^* и времени t_{m-1} — из ограниченности z_{m-2}^* и t_{m-2} и т.д. В итоге получаем, что вектор z_2^* и время t_2 ограничены, что очевидно из ограниченности $z_1^* = z_1^0$ и t_1. Отсюда следует и ограниченность функции $T_m(v(\cdot), z^0)$ некоторым временем $T(z^0)$.

Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю А.А. Азамову за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. — М.: Наука, 1988. — Т. 2. — 576 с.
2. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. — 1980. — **112**, № 3. — С. 308–330.

3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 455 с.
4. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 480 с.
5. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. — 1976. — № 3. — С. 145–146.
6. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Групповое преследование в дифференциальных играх // Wiss. Z. Techn. Hochsch. — 1982. — **6**, N 2. — P. 13–27.
7. Пшеничный Б.Н., Онопчук Ю.Н. Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1968. — № 1. — С. 13–22.
8. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. — Киев: Наук. думка, 1992. — 260 с.
9. Чикрий А.А. Конфликтно-управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992. — 384 с.
10. Чикрий А.А. Безмагорычный В.В. Метод разрешающих функций в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Автоматика. — 1993. — № 4. — С. 26–36.
11. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2009. — **15**, № 4. — С. 290–301.
12. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. — Л.: ЛГУ, 1977. — 224 с.
13. Петров Н.Н. «Мягкая» поимка в примере Л. С. Понтрягина со многими участниками // Прикладная математика и механика. — 2003. — **67**, вып. 5. — С. 759–770.
14. Петров Н.Н. Нестационарный пример Понтрягина с фазовыми ограничениями // Проблемы управления и информатики. — 2000. — № 4. — С. 18–24.
15. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. — Ижевск: Удмурт. ун-т, 2009. — 266 с.
16. Никольский М.С. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Управляемые системы. — 1969. — Вып. 2. — С. 49–59.
17. Сатимов Н., Фазылов А.З., Хамдамов А.А. О задаче преследования и уклонения в дифференциальных и дискретных играх многих лиц с интегральными ограничениями // Дифференц. уравнения. — 1984. — **20**, № 8. — С. 1388–1396.
18. Сатимов Н.Ю. Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр. — Ташкент: Изд-во НУУз., 2003. — 296 с.
19. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М.: Изд-во МГУ, 1990. — 198 с.
20. Ушаков В.Н. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Прикладная математика и механика. — 1972. — **36**, № 1. — С. 15–22.
21. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 288 с.
22. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. — М.: Высш. шк., 2001. — 239 с.
23. Азамов А. О задаче качества для игр простого преследования с ограничением // Сердика. Българ. мат. спис. — 1986. — № 12. — С. 38–43.
24. Ибрагимов Г.И. Дифференциальная игра многих лиц с интегральными ограничениями на управления игроков // Изв. высш. учеб. зав. Математика. — 2004. — № 4. — С. 48–52.
25. Саматов Б.Т. Построение П-стратегии в игре простого преследования с интегральными ограничениями // Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. — Ташкент: Фан, 1986. — С. 402–412.
26. Саматов Б.Т. О задаче преследования-убегания при линейном изменении ресурса преследователя // Мат. тр. — 2012. — **15**, № 2. — С. 159–171.
27. Хайдаров Б.К. Позиционная *l*-поимка в игре одного убегающего и нескольких преследователей // Прикладная математика и механика. — 1984. — **48**, вып. 4. — С. 574–579.
28. Azamov A.A., Samatov B.T. The П-strategy: analogies and applications // The Fourth Intern. Conf. Game Theory and Management, June 28–30, 2010, St. Petersburg, Russia (Col. papers). — St. Peterburg, 2010. — P. 33–47.
29. Azamov A.A., Samatov B.T. П-strategy. An elementary introduction to the theory of differential games. — Tashkent: Nat. Univ. of Uzb., 2000. — 32 p.

Поступила 26.11.2012