УДК 519.21

Б.В. НОРКИН

СИСТЕМНЫЙ ИМИТАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ СТРАХОВОГО БИЗНЕСА[1]

Аннотация. Рассмотрены задачи вычислительной актуарной математики, динамического финансового анализа, оптимизации страхового бизнеса и возможность их решения с помощью параллельных вычислений на графических ускорителях. Оценка вероятности разорения и других показателей функционирования страховой компании выполняется методом статистического моделирования Монте-Карло. Во многих случаях это единственно применимый метод. Поскольку вероятность разорения достаточно мала, для достижения приемлемой точности оценок может потребоваться астрономическое число стохастических экспериментов. Параллелизация метода Монте-Карло и использование графических ускорителей позволяют получить достаточно точный результат за приемлемое время. Представлены результаты численных экспериментов на разработанной системе актуарного моделирования, позволяющей использовать графический ускоритель, поддерживающий технологию Nvidia CUDA 1.3 и выше.

Ключевые слова: вычислительная страховая математика, динамический финансовый анализ, имитационное моделирование, оптимизация страхового бизнеса, процесс риска, вероятность разорения, эффективная граница, параллельные вычисления, метод Монте-Карло, GPGPU, CUDA.

ВВЕДЕНИЕ

Суть страхового бизнеса состоит в получении максимума чистой прибыли при достаточных страховых резервах для покрытия страховых требований. В качестве меры риска можно принять вероятность разорения, или неплатежеспособности компании, а прибыльность оценивать по распределению полученных дивидендов и остатку капитала в конце планового периода времени. При этом важно соблюсти тонкий баланс между прибыльностью и рисками. Так, известный парадокс де Финетти [1; 2, Theorem 1.10(vi)] состоит в том, что оптимальная стратегия, максимизирующая чистую среднюю дисконтированную прибыль (дивиденды) компании, приводит к разорению с вероятностью единица (на бесконечном интервале времени).

Для формального описания деятельности страховой компании часто используется классический случайный процесс риска (модель Крамера–Лундберга), моделирующий стохастическую эволюцию капитала страховой компании [1–7]. В этой модели, с одной стороны, капитал монотонно и линейно возрастает с течением времени за счет непрерывно поступающих премий, с другой — в случайные моменты времени (прихода страховых требований) убывает на случайную величину (требования). Компания разоряется, если капитал становится меньше нуля.

Очевидно, что данный процесс не отражает многих аспектов деятельности страховой компании, например перестрахование, инвестиции, займы, выплату дивидендов, возможность катастрофических требований и др. Поэтому для моделирования реальной страховой компании используют стохастические имитационные модели динамического финансового анализа [8–10], учитывающие влияние многих управляющих и случайных факторов на динамику резервов компании. В качестве управляющих параметров принимают доли отчислений в страховой резерв, отчисления на инвестиционную деятельность, дивиденды, перестрахование, текущие расходы и другие стратегические параметры управле-

[1] Работа выполнена частично при поддержке гранта Президента Украины для поддержки научных исследований молодых ученых, № GP/F49/121.

ния, а в качестве важных случайных факторов — уровень страховых выплат (по отношению к страховым премиям), доходность инвестиций, уровень инфляции, уровень выплат по договорам перестрахования и др. При этом результаты моделирования при заданных значениях управляющих параметров неоднозначны, а суть случайные величины. Однократное моделирование траектории изменения показателей функционирования компании во времени не дает полного представления о качестве управления. Необходимо промоделировать большое число траекторий, чтобы получить представление о вероятностном распределении результатов работы компании. Тогда можно вычислить любые детерминированные характеристики выбранной стратегии управления: вероятность разорения на заданном интервале времени, ожидаемые дивиденды, ожидаемое значение остаточного резерва и др. Однако проблема состоит в том, что для оценки этих показателей, например вероятности разорения, может потребоваться астрономическое число симуляций, которое невозможно выполнить за приемлемое время даже на современных компьютерах. Данная проблема осознана в страховой математике, поэтому, например, для классического процесса риска получены разнообразные формулы приближенной оценки вероятности разорения [3–7]. Но они не работают для более общих, а тем более реальных моделей страховой деятельности.

Универсальным, а часто единственным, методом моделирования сложных динамических стохастических систем является метод статистического имитационного моделирования Монте-Карло. Но он может потребовать огромного числа симуляций для достижения достаточной точности, поскольку вероятность разорения обычно является малой величиной [6]. Например, при использовании десятилетней страховой (квартальной) статистики и десятилетнего планового горизонта число возможных сценариев эволюции капитала имеет порядок 10^{64}, и соответственно вероятность каждого отдельного сценария равна 10^{-64}. Полный перебор такого количества сценариев, точное вычисление усредненных показателей функционирования компании по всем сценариями и вероятности разорения невозможны на современных компьютерах. Однако наращивание вычислительной мощности и параллелизация позволяют приближенно решить проблему методом Монте-Карло с приемлемой точностью. В работах [11–13] параллельная версия метода Монте-Карло (наряду с параллельным методом последовательных приближений) реализована на кластере из нескольких персональных компьютеров и применена для нахождения вероятности разорения как функции от начального капитала страховой компании. В [14, 15] анонсирована программная система, предназначенная для параллельного имитационного моделирования эволюции резервов страховой компании (параллельный метод Монте-Карло) и решения разнообразных актуарных вычислительных задач. Система позволяет производить расчеты как на центральном (многоядерном) процессоре, так и с помощью графического ускорителя с программной архитектурой Nvidia CUDA [16], а также десятки миллионов симуляций в реальном времени, оперативно моделировать функционирование страховой компании при тех или иных значениях управляющих параметров, оценивать вероятность разорения, прогнозировать ожидаемые результаты, исследовать зависимость показателей работы компании от любых управляющих параметров, сопоставлять риск и доходность. В системе используют данные реальной страховой статистики. В настоящей статье описываются принципы работы новой версии системы и приводятся результаты численных экспериментов.

Использование графического ускорителя (Nvidia GeForce GTX 560 2Gb) позволило сократить время расчетов на порядок по сравнению с параллельными расчетами на четырехъядерном центральном процессоре Intel Core i5 3570K. Более того, скорость вычислений делает возможным последовательную (покоординатную) оптимизацию работы компании по параметрам с учетом доходности и риска. Отметим, что заложенные в системе стратегии управления являются параметрическими, т.е. зависят от конечного набора числовых параметров. Все вариации управляемых параметров отображаются в пространстве показателей работы компании, а именно в плоскости «доходность–риск», что позволяет выполнять целенаправленный перебор значений оптимизируемых параметров. Одновременный контроль доходности и риска дает возможность в какой-то мере преодолеть парадокс де Финетти. Отметим, что в [17, 18] указанный парадокс разрешался путем введения явного ограничения на вероятность разорения. В работе [2] рассматриваются (вычислительно более сложные) задачи стохастического оптимального управления страховой компанией.

Использование параллельных вычислений, в частности мультиядерных графических ускорителей, является новым перспективным направлением в вычислительной актуарной математике. Применение параллельных вычислений для оптимизации математических ожиданий в стохастическом программировании обсуждалось еще Дж. Данцигом [19, 20]. В работе [21] рассматриваются близкие вопросы параллельного моделирования случайных блужданий на графических ускорителях. В [22, 23] графические ускорители используются для решения некоторых оптимизационных задач.

ПРОЦЕССЫ РИСКА КАК МОДЕЛИ ЭВОЛЮЦИИ РЕЗЕРВОВ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ

Агрегированные модели. Страховая компания обязана поддерживать некоторый уровень страховых резервов для покрытия текущих случайных страховых требований. Математическая модель стохастической эволюции резервов x^t страховой компании имеет вид

$$x^t = u + \int_0^t (c - d(x^s))ds - S_t, \ 0 \le t \le T, \tag{1}$$

где t — временной параметр $(0 \le t \le T)$, $x_0 = u \ge 0$ — начальный капитал (страховой резерв), $S_t = \sum_{k=1}^{N_t} z_k$ — агрегированные случайные страховые требования, z_k — случайные требования в моменты $(t_1 + \ldots + t_k)$, где времена t_i имеют функцию распределения $\bar{F}_{t_i}(\cdot)$, N_t — число поступивших к моменту t случайных требований, c — агрегированная страховая премия в единицу времени, $d(\cdot)$ — некоторая функция, выражающая интенсивность выплат дивидендов и других отчислений в зависимости от текущих резервов, $0 \le d(\cdot) \le c$. Здесь функция $d(\cdot)$ имеет смысл позиционного управления дивидендами. Например,

$$d(x) = \begin{cases} \gamma(x - b(x)), & x \ge b(x), \\ 0, & x < b(x), \end{cases}$$

где $b(\cdot)$ — некоторая монотонно возрастающая функция, называемая дивидендным барьером, γ — доля капитала, не используемая на ведение бизнеса (например, дивиденды). Минимальный дивидендный барьер законодательно регулируется [24, ст. 30]. В классической модели Крамера–Лундберга–де Финетти [1–7] (с вычитанием постоянных дивидендов d, $0 \le d \le c$) уравнение эволюции капитала имеет вид

$$x^t = u + (c - d)t - \sum_{k=1}^{N_t} z_k, \ 0 \le t \le T, \tag{2}$$

где $\{z_k, k = 1, 2, \ldots\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины требований с общей функцией распределения $F(\cdot)$ и средним μ, N_t — целочисленная случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ (временная интенсивность прихода требований в экспоненциальном распределении).

Перестрахование рисков является важным аспектом страховой деятельности. С одной стороны, доход компании уменьшается на величину премии, выплачиваемой перестрахующим компаниям, с другой — величина фактических страховых требований к компании уменьшается за счет частичного покрытия требований перестраховующими компаниями. В страховой статистике перестрахование отображается с помощью следующих показателей: объем r и удельный вес α (исходящего) перестрахования в общем объеме премий, объем q входящего перестрахования от резидентов и нерезидентов (иностранных перестрахователей), уровень β перестраховых выплат (отношение перестраховых выплат к стоимости перестрахования).

С учетом перестрахования уравнение эволюции резервов (1) принимает вид

$$x^t = u + \int_0^t (c - r - d(x^s))ds - (S_t - Q_t(r)),\ 0 \le t \le T,$$

где $r = \alpha c$ — часть премии, выплачиваемая перестрахователю, $Q_t(r)$ — результирующие агрегированные выплаты по договорам перестрахования до момента t.

На практике финансовое состояние компании регистрируется в дискретные моменты времени, например поквартально [25, 26]. В этом случае математическая модель стохастической эволюции резервов x^t страховой компании имеет вид

$$x^t = x^{t-1} + c^t - r^t - (s^t - q^t) - d^t, \tag{3}$$

где $t = 0, 1, \ldots, T-1$ — дискретный временной параметр, $x^0 = u \ge 0$ — начальный капитал (резерв), x^t — текущий страховой резерв в момент t, $\{c^t,\ r^t,\ d^t,\ s^t, q^t\}$ — соответственно суммарные квартальные премии, затраты на договоры перестрахования, дивидендные выплаты, случайные страховые требования и выплаты по договорам перестрахования за период t.

В качестве агрегированной модели страховых выплат в (3) можно использовать соотношение [18]

$$s^t - q^t = c^t \xi^t - r^t \zeta^t = c^t (\xi^t - \alpha^t \zeta^t), \tag{4}$$

где $\alpha^t = r^t / c^t$ — уровень затрат на перестрахование, (ξ^t, ζ^t) — реализация некоторого случайного вектора (ξ, ζ), распределение которого находится из страховой статистики. Например, пусть известна историческая статистика $\{c^\tau, r^\tau, s^\tau, q^\tau, \tau = 1, \ldots, m\}$. Тогда в качестве эмпирического распределения вектора (ξ, ζ) можно взять частоту попадания векторов $\{(s^\tau / c^\tau, q^\tau / r^\tau),\ \tau = 1, \ldots, m\}$ в борелевские подмножества пространства $\mathbb{R}^2$.

Часто доступная страховая статистика имеет вид $\{c^\tau, r^\tau, s^\tau - q^\tau, \tau = 1, \ldots, m\}$ [25, 26]. В предположении, что все договоры перестрахования построены по пропорциональному принципу, т.е. $q^\tau = (r^\tau / c^\tau) s^\tau = \alpha^\tau s^\tau$, соотношение (4) приобретает вид $s^t - q^t = s^t (1 - \alpha^t)$.

Рассмотрим вероятность разорения (неплатежеспособности) $\psi(\cdot) = \Pr\{\inf_{0 \le t \le T} x^t < 0\}$ страховой компании как функцию от параметров процесса $\{x^t\}$. Эту вероятность можно использовать как меру риска при управлении страховой компанией. Например, вероятность разорения (на бесконечном интервале времени) в классической модели страховой компании (2) с экспоненциальным распределением требований имеет следующий вид [3–7]:

$$\psi(u, c, d, \lambda, \mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\rho} \exp\left(-\dfrac{\rho u}{(1+\rho)\mu}\right), & \rho > 0, \\ 1, & \rho \le 0, \end{cases} \tag{5}$$

где $\rho = (c-d)/(\lambda\mu)-1$. В данном случае зависимость $\psi(u, c, d, \lambda, \mu)$ известна в явном виде. Если распределение требований не является экспоненциальным, то для вероятности разорения справедлива оценка [3–7]

$$\psi(u, c, d, \lambda, F) \le e^{-Ru}, \tag{6}$$

где R — положительный корень (если он существует) уравнения

$$\frac{\lambda}{c-d}\int_0^{+\infty} e^{Ry}(1-F(y))dy = 1.$$

В более общей модели (1) зависимость вероятности разорения от параметров неизвестна и может быть получена только методом Монте-Карло. Формула (5) в данной работе используется для тестирования и настройки метода Монте-Карло. Кроме вероятности разорения, интерес представляет распределение капитала x^T в некоторый момент времени T и полученных дивидендов $\int_0^T d(x^s)ds$, их средние значения и дисперсии в этот момент, а также зависимость этих величин от разнообразных параметров.

Моделирование портфеля страховых договоров. В страховании под портфелем понимается структура агрегированных страховых премий, полученных от разных видов страхования, а также структура платежей за перестрахование различных видов рисков. Динамика страховых резервов с учетом (фиксированной) структуры страхового портфеля при постоянных дивидендах описывается следующими соотношениями [18]:

$$x^t = x^{t-1} + \sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i) - \sum_{i=1}^{n}(\xi_i^t y_i - \zeta_i^t z_i) - d,\ x^0 = u,\ t = 1, \ldots, T,$$

$$0 \le z_i \le y_i,\ i = 1, \ldots, n+1,\ 0 \le d \le \sum_{i=1}^{n} y_i \le c.$$

Здесь векторная переменная $y = (y_1, \ldots, y_n)$ задает (фиксированную) структуру портфеля страховых договоров компании, причем y_i задает премию в единицу времени от i-го вида страхования; векторная переменная $z = (z_1, \ldots, z_n)$ задает структуру портфеля договоров перестрахования, где переменная z_i задает плату в единицу времени за перестрахование рисков в i-м виде страхования; переменная $x = (x^0, x^1, \ldots, x^T)$ описывает стохастическую динамику страховых резервов компании в дискретные моменты времени $t = 0, 1, \ldots, T$ и является случайной векторной величиной; переменная d задает детерминированные отчисления от премий, не связанные со страховыми выплатами (например, налоги, зарплата, поддержание инфраструктуры, дивиденды и т.д.). В настоящей статье не рассматриваются задачи оптимального управления страховой компанией, поэтому переменные y, z, d не зависят от времени. Параметр c задает планируемый объем премий по всем страховым договорам в единицу времени; $x^0 = u$ — начальный резервный капитал; T — плановый горизонт времени (число кварталов или лет, учитываемых для оценки вероятности разорения). Таким образом, величина $\left(c - d - \sum_{i=1}^{n} z_i\right)$ задает отчисления в единицу времени с премий в страховые резервы компании. Величины $(\xi_1^t, \ldots, \xi_n^t)$ задают (случайные) убыточности различных видов страхования $i = 1, \ldots, n$ на единицу дохода от премий в единичный интервал времени (квартал, год и т.п.) с номером t, т.е. $\xi_i^t y_i$ — суммарные страховые выплаты по i-му виду страхования в период времени $t=1,\ldots,T$. Величина ζ_i^t задает случайную доходность от перестрахования рисков i-го вида, т.е. выплаты от перестраховщиков, приходящиеся на единицу премий перестраховщикам по рискам i-го вида.

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРАХОВОГО БИЗНЕСА

Страховой бизнес предполагает получение максимума чистой прибыли при достаточных страховых резервах для покрытия возможных страховых требований с заданной степенью надежности. В конкурентной среде компания стремится сохранить или увеличить свою долю на рынке.

Оптимизация в классической модели страховой деятельности. Традиционная теория микроэкономики страхования основана на понятии ожидаемой полезности [3]. Экономические агенты, включая страховые компании, выбирают свое поведение, исходя из принципа максимизации ожидаемой полезности. Функции полезности позволяют качественно объяснить многие явления экономики, но малопригодны для практических расчетов, поскольку не измеримы физическими или иными прямыми методами.

Другой подход к анализу страховой деятельности основан на исследовании доходности и риска (вероятности разорения). В качестве меры доходности могут использоваться собранные дивиденды [1, 2, 17, 18], капитал компании в конце планового периода [6] или средняя доходность страховой деятельности [27], а в качестве меры риска — дисперсия капитала [6], вероятность разорения [2, 6], ее экспоненциальные оценки сверху [27, 28], коэффициент Лундберга [2, Ch. 4; 3, разд. 14.5; 29], математическое ожидание максимальных суммарных потерь [3, разд. 13.6, 14.4, 14.5] и другие характеристики события разорения. В этом подходе основная проблема — вычисление или оценка вероятности разорения страховой компании. Данной проблеме посвящена обширная литература [3–7].

В работе [17], следуя [1], применялся другой критерий оптимизации — уровень чистой прибыли (дивидендов), а для разрешения парадокса де Финетти накладывалось ограничение сверху на вероятность разорения. При этом вместо точной вероятности разорения использовалась ее экспоненциальная оценка (ранее такой прием применялся в [27]). Данный подход позволяет получить выражение для коэффициента Лундберга в явном виде, исключить сложное вероятностное ограничение из формулировки задачи, декомпозировать задачу и во многих случаях получить аналитические решения. Он применялся для решения ряда задач управления страховым бизнесом, а именно для выбора начального страхового резерва, оптимизации тарифов, страхового портфеля (состава страховых договоров), договоров перестрахования и оптимального управления дивидендной политикой компании [17]. В качестве переменных оптимизации использовались как параметры договоров перестрахования, так и иные характеристики функционирования страховой компании, например цены полисов, уровни инвестиций в ту или иную сферу ее деятельности. Искомыми величинами являлись уровень выплат дивидендов и другие параметры управления компанией, рассчитанные как функции начального капитала. Подобный подход для компании в целом рассмотрен в [28]. Полученные функции могут использоваться для текущего управления компанией, а именно: в них подставляется текущее случайное значение капитала и найденные параметры применяются для оперативного управления компанией.

Оптимизация структуры страхового портфеля при конечном числе сценариев для случайных данных. В обозначениях предыдущего раздела задачу приближенной оптимизации чистого дохода (дивидендов) страховой компании при ограничении на вероятность разорения можно сформулировать в следующем виде [18]:

$$d \to \max_{\{x^t\},\,\{y_i\},\,\{z_i\},\,d},$$

$$x^t = x^{t-1} + \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i) - \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^t y_i - \zeta_i^t z_i) - d, \; x_0 = u, \; t = 1, \ldots, T,$$

$$0 \le z_i \le y_i \le c, \; i = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \le c, \; x^T \ge \alpha x^0, \quad \Pr\{x^t \ge 0, \; i = 1, \ldots, T\} \ge 1 - \varepsilon.$$

Здесь целевая функция — величина дивидендов, полученных в единицу времени. Оптимизация осуществляется по переменным $\{x^t\}, \{y_i\}, \{z_i\}, d, \; i = 1, \ldots, n$, $t = 1, \ldots, T$. Параметр c обозначает планируемый объем поступающих премий (за вычетом обязательных текущих расходов). Векторные величины $\xi^t = (\xi_1^t, \ldots, \xi_n^t)$ задают (случайные) убыточности различных видов страхования $i = 1, \ldots, n$ на единицу дохода от премий в единичный интервал времени (квартал, год и т.п.) с номером t, т.е. $\xi_i^t y_i$ — суммарные страховые выплаты по i-му виду страхования в период времени t. Соответственно величины $\zeta^t = (\zeta_1^t, \ldots, \zeta_n^t)$ задают (случайные) доходности перестрахования рисков вида $i = 1, \ldots, n$ в единичный интервал времени с номером t, т.е. $\zeta_i^t z_i$ — суммарные выплаты по i-му виду перестрахования в период времени t. Ограничение $x^T \ge \alpha x^0$ задает обязательное требование на величину остаточного резерва в конечный момент T, $\alpha > 0$. Функция $f(\{x^t\}, \{y_i\}, d) = \Pr\{x^t \ge 0, i = 1, \ldots, T\}$ описывает вероятность неразорения компании при структуре (y, z) портфеля страховых и перестраховых договоров и величине дивидендов d.

Несмотря на статичный характер, данная постановка является сложной вычислительной задачей, поскольку вероятность неразорения — разрывная невыпуклая функция своих аргументов. Эта задача относится к одноэтапным моделям стохастического программирования (в данном контексте одноэтапность означает, что независимые переменные модели $\{y_i, z_i, d\}$ — детерминированные величины, т.е. не зависят от случайных параметров, хотя временных этапов может быть несколько). В случае конечного числа сценариев $\{\xi_s^t, \zeta_s^t, t = 1, \ldots, T\}$, $s = 1, \ldots, S$, имеющих вероятности $\{p_s, s = 1, \ldots, S\}$, для случайных данных $\{\xi^t, \zeta^t, t = 1, \ldots, T\}$ в работе [18] предложено сводить данную задачу к эквивалентной задаче смешанного целочисленного программирования:

$$d \to \max_{\{x_s^t\},\,\{y_i\},\,\{z_i\},\,d,\,\{\nu_s\}},$$

$$x_s^t = x_s^{t-1} + \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i) - \sum_{i=1}^{n} (\xi_{is}^t y_i - \zeta_{is}^t z_i) - d, \; x_0 = u, \; t = 1, \ldots, T,$$

$$0 \le z_i \le y_i \le c, \; i = 1, \ldots, n, \; 0 \le d \le \sum_{i=1}^{n} y_i \le c,$$

$$x_s^T \ge \alpha x_0, \; s = 1, \ldots, S,$$

$$x_s^t \ge -M_s \nu_s, \; s = 1, \ldots, S, \; t = 1, \ldots, T,$$

$$\sum_{i=1}^{S} \nu_i \le \varepsilon, \; \nu_s \in \{0, 1\}, \; s = 1, \ldots, S.$$

Здесь M_s — константы такие, что $x_s^t \ge -M_s$ для всех $t = 1, \ldots, T$ в сценарии s, например $M = u - (\max_{i,t} \xi_{is}^t) cT - 2cT$. Полученную задачу можно решать с помощью современного программного обеспечения дискретной оптимизации, например IBM ILOG CPLEX [30].

Параллельное имитационное моделирование и оптимизация страхового бизнеса с использованием графических ускорителей вычислений. Рассмотренные в предыдущих разделах методы оптимизации страхового бизнеса имеют ограниченное применение, поскольку используют идеализированные модели эволюции резервов и упрощенные постановки оптимизационных задач. Кроме того, недостаточно решить задачу при каком-то одном наборе параметров и заданном распределении случайных данных, гораздо важнее определить, как зависит решение от изменения параметров и распределений. Альтернативный подход к оптимизации страхового бизнеса состоит в имитационном моделировании процессов эволюции резервов страховой компании и статистической оценке (методом Монте-Карло) показателей ее функционирования при различных значениях управляемых параметров [8–10]. Он предполагает выполнение огромной вычислительной работы и требует применения параллельных вычислений [11–15]. Суть метода — независимое параллельное моделирование большого числа S траекторий стохастической эволюции резервов x_t страховой компании на интервале времени $[0, T]$ для заданного набора параметров (u, c, d, λ, μ) и вычислении доли $p_S(t)$ неразорившихся траекторий к моменту времени t, а также среднего чистого дохода (полученных дивидендов)

$$D_S = (1/S)\sum_{s=1}^{S}\int_0^{\tau_s} d(x_s^t)dt,$$

где $\{x_s^t, 0 \le t \le \tau_s\}$ — траектория процесса риска (1), (2) или (3) в s-м испытании, τ_s — момент разорения или $\tau_s = T$, если разорения до момента T в s-м испытании не произошло. В процессе параллельного моделирования вычислительные ядра не обмениваются информацией, а по завершении моделирования информация о траекториях собирается на одном ядре и строятся функции $p_S(u, c, d, \lambda, \mu, T)$ и $D_S(u, c, d, \lambda, \mu, T)$ как функции того или иного параметра. Результаты моделирования отображаются в плоскости «изменяемый параметр–вероятность разорения» и в пространстве «риск–доход», т.е. в плоскости «вероятность разорения–полученные дивиденды». Точность оценки вероятности разорения методом Монте-Карло можно оценить с помощью экспоненциального неравенства Хеффдинга [31]

$$\Pr\{|p_S(u, c, d, \lambda, \mu, T) - \psi(u, c, d, \lambda, \mu, T)| \ge \delta\} \le 2e^{-S\delta^2/2},$$

откуда (10^{-k})-доверительная граница для $|p_N - \psi|$ имеет вид

$$\delta_k(S) = \sqrt{2(k\ln 10 + \ln 2)}/\sqrt{S}. \tag{7}$$

Разброс значений (стандартное отклонение) дивидендов оценивается стандартными формулами математической статистики, например, оценка стандартного отклонения для дивидендов имеет вид

$$\sigma_S = \left(\frac{1}{S-1}\sum_{s=1}^{S}\left(\int_0^{\tau_s} d(x_s^t)dt - D_S\right)^2\right)^{1/2}.$$

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО НА GPU ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АКТУАРНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Для проведения расчетов разработана программная система страхового моделирования [14, 15]. Графический интерфейс системы позволяет изучать зависимость какой-либо функции полезности (например, величины полученных дивидендов или остаточного резерва) от различных параметров работы компании.

Можно также строить зависимость вероятности разорения (используемой в качестве меры риска) от параметров. Система работает в среде MS Windows; для графического интерфейса необходим .NET 4, расчетная часть может функционировать самостоятельно на любом процессоре архитектуры x86, но рекомендуется использование процессора семейства Intel Ivy Bridge. Если в системе имеется графический ускоритель, поддерживающий технологию CUDA 1.3 и выше, его можно использовать для ускорения вычислений (в десять и более раз).

В системе реализованы следующие функции:

- выбор модели (классическая модель с непрерывным временем или модель с дискретным временем);
- загрузка статистических данных и стандартный анализ данных;
- задание интервалов и сетки для изменяемых параметров модели;
- задание параметра статистического моделирования (числа симуляций);
- задание параметров для распараллеливания вычислений (распределение нагрузки между вычислительными ядрами GPU);
- сохранение и загрузка проекта (данных и параметров модели);
- возможность проведения вычислений на CPU или GPU;
- построение и графическое представление зависимостей вероятности разорения, суммарных дивидендов и остаточного резерва от любого исследуемого параметра;
- оценка ошибок результатов расчетов;
- отображение результатов моделирования (эффективной границы) в плоскости «вероятность разорения–суммарные дивиденды»;
- оценка скорости вычислений;
- помощь пользователю;
- вывод результатов в память и на печать.

Система позволяет исследовать зависимость работы компании от следующих параметров: временной интервал, начальный капитал, суммарная квартальная премия, текущие расходы, уровень перестрахования, доходность депозитных вкладов, величина и вероятность катастрофических требований, параметры дивидендной политики (долевые отчисления, абсолютные отчисления, дивидендный барьер), параметры законодательного регулирования страхового бизнеса. В текущей версии системы в одном цикле вычислений (run) может изменяться только один параметр. За одну минуту работы с системой может быть исследована зависимость от всех параметров.

Система работает с использованием реальных статистических данных, полученных для конкретных компаний путем обработки информации из украинских журналов «Страхова справа», Insurance TOP, а также с сайта [25].

Для реализации параллельного метода Монте-Карло ключевое значение имеет проблема параллельного генерирования большого числа длинных независимых числовых последовательностей, состоящих из независимых случайных чисел. В программной среде CUDA [16] она решается с помощью библиотеки генерирования псевдослучайных чисел CUDA CURAND [32]. При решении задачи на четырехъядерном Intel Core i5 3570K задействован аппаратный генератор случайных чисел (RdRand), встроенный в процессоры семейства Ivy Bridge [33].

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для проведения тестовых численных экспериментов использовались классическая модель Крамера–Лундберга (2) с экспоненциально распределенными величинами требований и модель с дискретным временем (3). Для вероятности разорения $\psi(u, c, d, \alpha, \mu)$ модель (2) допускает простое аналитическое решение (5). Численные эксперименты выполнялись на персональном компьютере со следующей конфигурацией: Intel Core i5 3570K, Nvidia GeForce GTX 560.

Ускорение вычислений на GPU. Проведено сравнение времени оценки вероятности разорения для процесса (3), (4) с параметрами $T = 40$, $u = 140$, $c = 100$ на CPU и GPU. Во всех экспериментах скорость параллельных вычислений на GPU (Nvidia GeForce GTX 560 на штатных частотах) более чем в десять раз превосходила скорость параллельных вычислений на CPU (Intel Core i5 3570K на штатных частотах). На рис. 1, *а* показаны графики зависимости вероятности разорения ψ при изменении дивидендных отчислений (от 30 до 40%) с текущего капитала, полученные на GPU (точки) и CPU (сплошная линия) при одном и том же числе 25 600 траекторий на одно значение параметра. Затененная область показывает ошибку вычислений (7) при $k = 2$ (99%-й доверительный интервал), оцененную с помощью неравенства Хеффдинга. Из графика видно, что неравенство Хеффдинга малопригодно для оценок точности вероятностей порядка 10^{-2} и меньших, так как реальная точность вычислений (величина колебаний показана сплошной кривой на рис. 1, *а*) на порядок выше. На рис. 1, *б* представлена зависимость ψ от величины полученных дивидендов (эффективная граница).

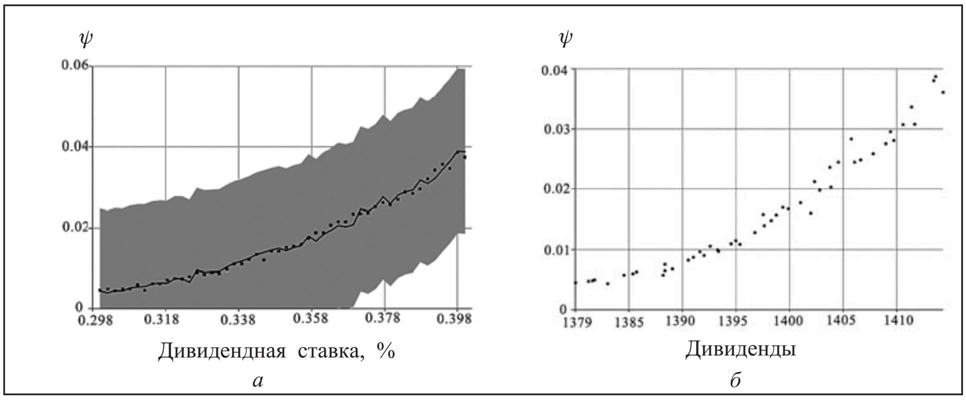

Рис. 1

Точность и время оценки малых вероятностей разорения на GPU. Система позволяет оценивать весьма малые вероятности разорения за приемлемое время: например, вероятность разорения до порядка 10^{-7} как функция параметра «отчисления дивидендов» на сетке из 30 точек оценивается в пределах одной минуты. При (близких к реальным) значениях параметров $u = 140$ (начальный страховой резерв, млн гривен), $c = 100$ (суммарная квартальная премия, млн гривен), $T = 10$ лет (временной интервал), $\gamma \in [0.12, 0.15]$ (доля капитала, ежеквартально отчисляемая на выплату дивидендов) время расчета графиков зависимости вероятности разорения от γ с низкой (рис. 2, *а*) и высокой (рис. 2, *б*) точностями 59,6 с и 4067 с соответственно. Скорость имитационных вычислений составила 9,34 млн траекторий в секунду.

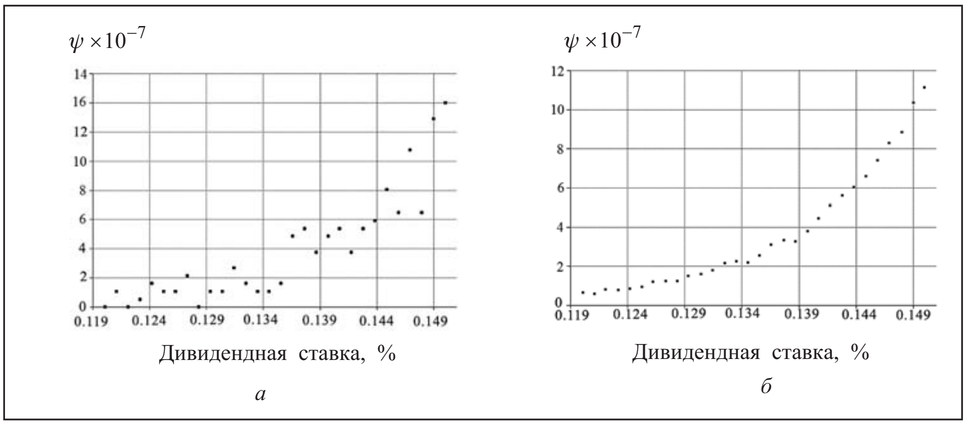

Рис. 2

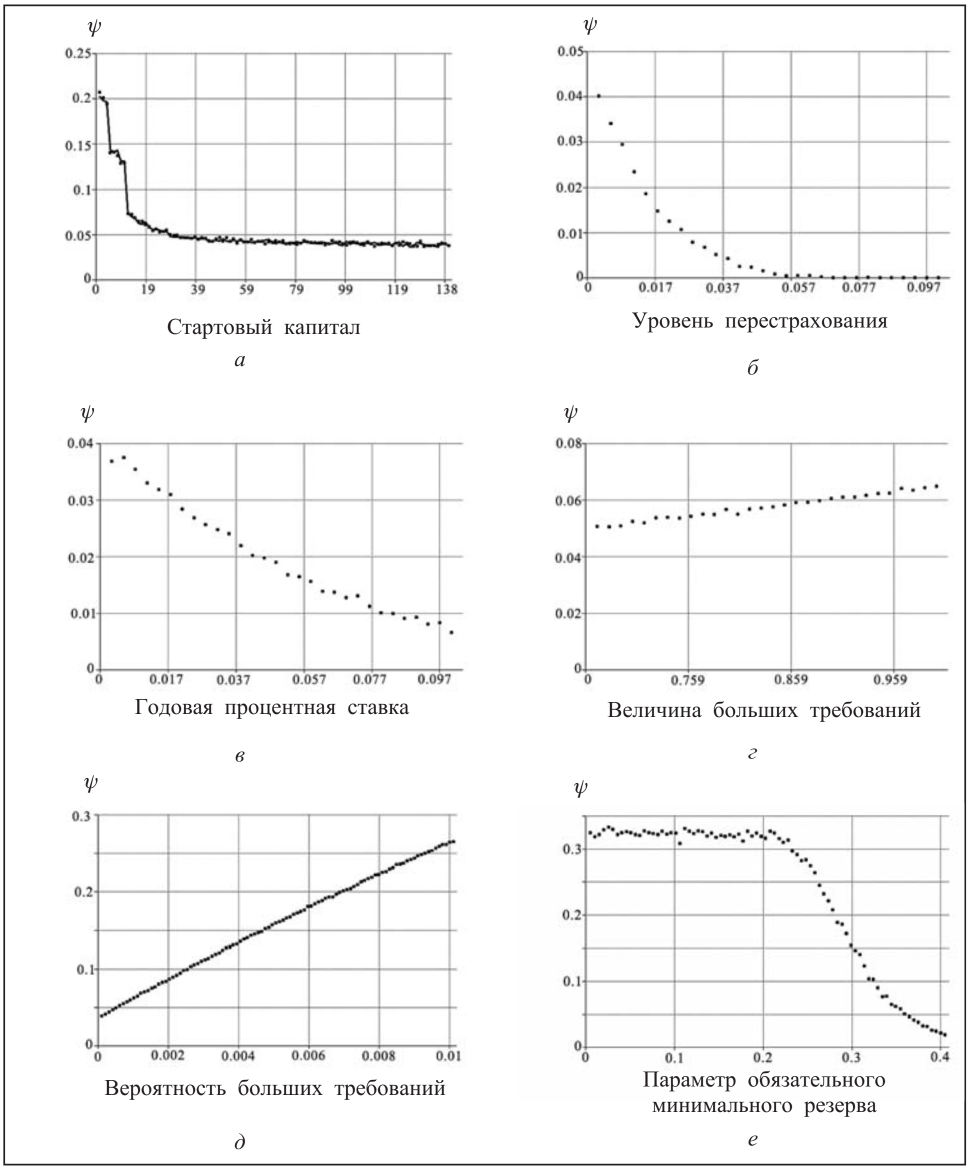

Рис. 3

Исследование зависимости вероятностей разорения и чистого дохода от параметров с помощью GPU. Разработанная система страхового моделирования позволяет в реальном времени исследовать зависимость вероятности разорения ψ и чистого дохода (суммарных дивидендов, остаточного капитала) страховой компании как функцию от любого параметра модели. Для этого достаточно в окне интерфейса системы задать минимальное и максимальное значения изменяемого параметра, а также число промежуточных значений. В численных экспериментах параметры варьировались в следующих пределах: $T = 40$ кварталов, $u \in [0, 140]$, $c = 100$, отчисления с текущего капитала на дивиденды $\gamma \in [0, 0.4]$, уровень перестрахования $\alpha \in [0, 0.1]$, большие требования $z_{LCS} \in [0.67c, c]$, вероятность большого требования $p \in [0, 0.1]$. Сокращение времени вычислений достигается за счет массивного распараллеливания метода статистического моделирования с помощью графического ускорителя GPU. На рис. 3 показаны зависимости вероятности разорения ψ от: *а* — стартового капитала $u \in [0, 140]$; *б* — уровня перестрахования $\alpha \in [0, 0.1]$; *в* — годовой процентной ставки $\delta \in [0, 0.1]$;

г — величины больших требований (в долях от премии $c = 100$ и при вероятности требования $p_{LCS} = 0.01$); *д* — вероятности больших требований ($z_{LCS} = c = 100$); *е* — параметра законодательного регулировании обязательного минимального резерва (минимум из доли предшествующих годовых требований и 18 % предшествующих годовых требований) с возможностью больших требований $z_{LCS} = 0.67c$ с вероятностью $p_{LCS} = 0.01$).

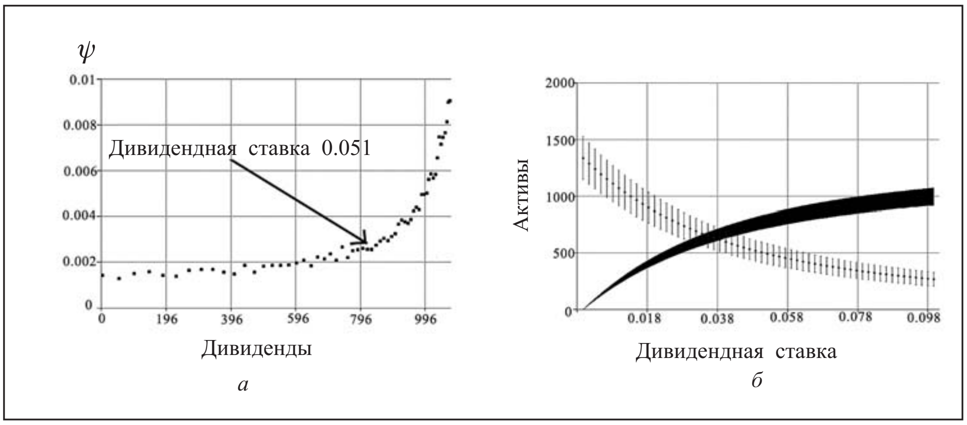

Рис. 4

Оптимизация страхового бизнеса с помощью эффективной границы. Важнейшим инструментом анализа и оптимизации страхового, как и любого другого рискового бизнеса, является эффективная граница [8–10]. Она отображает на одном графике связь между доходностью бизнеса (средними дивидендами) и риском (вероятностью разорения). Использование эффективной границы позволяет в определенной мере обойти парадокс де Финетти, состоящий в том, что оптимальная стратегия начисления дивидендов приводит к разорению с вероятностью единица. При выборе дивидендной стратегии можно учитывать соответствующую вероятность разорения. На рис. 4, *а* приведена такая граница для следующего набора параметров: $T = 40$, $u = 140$, $c = 100$, $z_{LCS} = c$, $p_{LCS} = 0.03, \gamma \in [0, 0.1]$. Путем наведения курсора на точки эффективной границы система позволяет отобразить, каким значениям переменного параметра соответствует та или иная точка. При выборе оптимального значения параметра необходимо учитывать (случайные) значения остаточного капитала компании x^T. На рис. 4, *б* показаны соответствующие зависимости (с указанием ошибки — стандартного отклонения) средних полученных дивидендов и среднего остаточного капитала от уровня отчислений дивидендов $\gamma \in [0, 0.1]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оценка вероятности разорения и других параметров функционирования страховой компании, а также исследование зависимостей этих величин от параметров — нетривиальная вычислительная проблема актуарной математики. Использование параллельных вычислений и графических ускорителей позволяет производить численные расчеты в сложных общих актуарных моделях методом Монте-Карло, при этом приемлемая относительная точность на вероятностях разорения порядка до $10^{-6} - 10^{-7}$ достигается практически в режиме реального времени.

Разработанная система актуарного моделирования позволяет в реальном времени за счет ускорения вычислений на GPU исследовать зависимость вероятности разорения и ожидаемого чистого дохода страховой компании как функцию любого параметра управления компанией и, таким образом, дает возможность изучить влияние факторов управления на функционирование страховой компании. Система позволяет также сопоставлять в реальном времени доходность и риск при выборе параметров управления компанией и предоставляет практическую альтернативу аналитическим методам оптимизации страхового бизнеса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Finetti B. de Su un' impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio // Trans. of the XVth Intern. Congress of Actuaries. — 1957. — **2**. —P. 433–443.
2. Schmidli H. Stochastic control in insurance. — London: Springer-Verlag, 2008. — 254 p.
3. Актуарная математика / Н. Бауэрс, Х. Гербер, Д. Джонс и др. — М.: Янус-К, 2001. — 656 с.
4. Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. Математические основы теории риска. — 2-е изд. — М.: Физматлит, 2011. — 620 с.
5. Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко Я.М., Ядренко М.Й. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. — Київ: Інформтехніка, 1995. — 380 с.
6. Daykin C.D., Pentikäinen T., Pesonen M. Practical risk theory for actuaries. — London; New York: Chapman and Hall, 1994. — 576 p.
7. Encyclopedia of actuarial science / J.L. Teugels, B. Sundt (Eds.). — Chichester: Wiley, 2004. — Vol. 1. — 1197 p.; Vol. 2. — 1842 p.
8. Kaufmann R., Gadmer A., Klett R. Introduction to dynamic financial analysis // ASTIN Bull. — 2001. — **31**, N 1. — P. 213–249.
9. Blum P., Dacorogna M. DFA — dynamic financial analysis // Encyclopedia of actuarial science / J.L. Teugels, B. Sundt (Eds.). — Chichester: Wiley, 2004. — **1**. — P. 3342–3355.
10. Hardy M.R. Dynamic financial modeling of an insurance enterprise // Encyclopedia of actuarial science / J.L. Teugels, B. Sundt (Eds.). — Chichester: Wiley, 2004. — **1**. — P. 3618–3628.
11. Norkin B. Parallel computations in insurance business optimization // Proc. of the 1st Intern. Conf. on High Perform. Comput. (Oct. 12–14, 2011, Kyiv). — Kyiv, 2011. — P. 33–39.
12. Норкин Б.В. Распараллеливание методов оценки риска банкротства страховой компании // Теорія оптимальних рішень. — Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2010. — С. 33–39.
13. Норкин Б.В. О вероятности разорения управляемого процесса авторегрессии // Комп'ютерна математика. — Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2011. — С. 142–150.
14. Норкин Б.В. Об актуарных вычислениях с использованием графических процессоров // Тр. междунар. конф. «Высокопродуктивные вычисления» (HPC-UA 2012, Киев, 8–10 окт. 2012 г.). — Киев: НАН Украины, 2012. — С. 268–274.
15. Norkin B.V. On performing actuarial calculations on GPU // Вісн. НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка: Зб. наук. пр. — К.: Век+, 2012. — № 56. — С. 113–119.
16. Параллельные вычисления на GPU. Архитектура и программная модель CUDA / А.В. Боресков, А.А. Харламов, Н.Д. Марковский и др. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2012. — 336 с.
17. Норкин Б.В. Математические модели оптимизации страхового дела // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 1. — С. 128–145.
18. Норкин Б.В. Об оптимизации портфеля страховых договоров // Прикл. статистика. Актуар. та фін. математика. — 2011. — № 1–2. — С. 197–203.
19. Dantzig G.B. Need to do planning under uncertainty and the possibility of using parallel processors for this purpose // Ekonom.-mat. obzor. — 1987. — **23**. — P. 121–135.
20. Dantzig G.B., Glynn P.W. Parallel processors for planning under uncertainty // Ann. Oper. Res. — 1990. — **22**. — P. 1–21.
21. Haizhen Wu. Parallel computing using GPUs. — March 1, 2011. — http:// ecs.victoria.ac.nz/twiki/pub/EResearch/EcsTeslaResource/Parallel.Computing.Using.Graphics.Cards.pdf.
22. Li J., Hu X., Zhanlong Pang Z., Qian K. A parallel ant colony optimization algorithm based on fine-grained model with gpu-acceleration // Intern. J. Innov. Comput., Inform. and Control. — 2009. — **5**, N 11(A). — P. 3707–3716.
23. Нурминский Е.А., Поздняк П.Л. Решение задачи поиска наименьшего расстояния до политопа с использованием графических ускорителей // Вычисл. технологии. — 2011. — **16**, вып. 5 — С. 80–88.
24. Закон України «Про страхування» // Відом. Верх. Ради України (ВВР). — 1996. — № 18. — Ст. 78. — http://zakon1.rada.gov.ua/laws/show/85/96-вр.

25. З а л е т о в А . И . Страхование в Украине. — Киев: Междунар. агенция «BeeZone», 2002. — 452 с.

26. http://forinsurer.com/.

27. Н а к о н е ч н ы й А . Н . Оптимизация процессов риска // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 5. — С. 42–48.

28. S t a t i s t i c a l tools for finance and insurance / P. Cízek, W. Härdle, R. Weron (Eds.). — N.Y.: Springer, 2005. — 517 p.

29. W a t e r s H . R . Some mathematical aspects of reinsurance // Insurance: Math. Econ. — 1983. — N 2. — P. 17–26.

30. IBM ILOG CPLEX V12.1. User's manual for CPLEX. — Intern. Business Machines Corp., 2009. — 952 p.

31. H o e f f d i n g W . Probability inequalities for sums of bounded random variables // J. Amer. Statist. Assoc. — 1963. — **58**. — P. 13–30.

32. NVIDIA, CUDA CURAND Library, 2010.

33. I n t e l Digital Random Number Generator (DRNG): Software Implementation Guide. — http://software.intel.com/en-us/articles/intel-digital-random-number-generator-drng-software-implementation-guide/.

Поступила 22.04.2013