УДК 510.67

**В.П. МАШТАЛИР, В.В. ШЛЯХОВ, С.В. ЯКОВЛЕВ**

# ГРУППОВЫЕ СТРУКТУРЫ НА ФАКТОР-МНОЖЕСТВАХ В ЗАДАЧАХ КЛАССИФИКАЦИИ

**Аннотация.** Для задач факторизации информации проанализирована связь свойств дифункциональности и тернарных отношений. Найдены условия, при которых произвольные *n*-арные отношения индуцируют мультиалгебраические системы с единым носителем в виде декартового куба. Рассмотрена аксиоматика мультигрупп. Сформулированы и доказаны условия существования групп на классах эквивалентностей. Приведены примеры продуцирования мультигрупп и случаев, когда единого носителя не существует.

**Ключевые слова:** грануляционное исчисление, мультиалгебраическая система, тернарное отношение, дифункциональность, мультигруппа, фактор-множество.

## ВВЕДЕНИЕ

Генезис задач поиска достаточной (в идеале необходимой) степени точности представления данных (информации, знаний) для их обработки, хранения и интерпретации лежит в области компромиссов, поскольку противоречивость критериев — один из ключевых факторов, определяющих в итоге и корректность, и валидность результатов. Неразличимость и сходство, математической экспликацией которых являются соответственно отношения эквивалентности и толерантности, нередко являются базисом для построения систем, направленных на согласование недостаточности и избыточности [1–3]. Развиваемое в настоящее время грануляционное исчисление [4–7] позволяет представлять некоторое «целое» семействами классов, каждый из которых, в свою очередь, является множеством элементов, неразличимых исходя из внутренних (сущностных), внешних (структурных) или контекстных (предметно-ориентированных) свойств. Иначе говоря, грануляционное исчисление — инструментарий, предназначенный для огрубления–детализации данных, их стратифицированной структуризации и выявления причинно-следственных отношений.

В настоящее время методы грануляционного исчисления — суть междисциплинарных исследований, проводимых, прежде всего, в рамках интервального анализа [8], «грубых» (rough sets) множеств [9, 10], вычислительного интеллекта [11, 12], математического аппарата баз данных с контекстным поиском, универсального шкалирования, кластерных и подобных методов [12–14]. Таким образом, основные идеи, подходы и принципы взяты из различных отраслей знаний, поэтому, с одной стороны (и это не является неожиданностью), ряд исследований представляет собой лишь перенос известных положений в новую сферу, с другой (следует это особо отметить) — терминология и аксиоматика грануляционного исчисления находится лишь в стадии становления. Поэтому насущной является проблема обобщений, быть может, даже метаматематических, что создаст предпосылки для конструктивного развития данного направления. В качестве одного из возможных «языков» грануляционного исчисления можно указать мультиалгебраические системы [15–18], обобщающие результаты традиционных алгебраических систем [19] и позволяющие для различных математических структур синтезировать и идентифицировать алгебры, модели и алгебраические системы с носителями, объединяющими семейства множеств различной природы, а в конечном счете — оперировать гранулами (классами эквивалентностей), не делая различий между отдельными представителями этих классов.

Учет с требуемой степенью обобщения (огрубления) данных или их конкретизации (детализации) в формате анализа внутренних (неявных) регулярностей, продуцируемых природой, и внешних (заданных) связей, фактически определяемых решаемой задачей, является необходимым условием построения эффективных систем классификации. Если при классификации возмущающие воздействия можно адекватно моделировать некоторой математической структурой, то с учетом ее свойств нередко можно получать инвариантные или эквивариантные описания, которые наряду с систематизацией обеспечивают надежное распознавание. Одной из наиболее важных структур моделирования возмущающих воздействий является группа, сохраняющая обратимость трансформаций информации. При этом аппарат представления групп предоставляет широкие возможности для построения инвариантных и эквивариантных отображений. Однако вопросы использования групповых свойств на фактор-множествах до настоящего времени остаются открытыми. В качестве типичного примера необходимости решения задач такого типа можно считать анализ изображений в условиях геометрических трансформаций, индуцированных изменением взаимного расположения и/или ориентации объекта и видеодатчика. Фактор-множеством в данной ситуации являются результаты сегментации отдельных видеокадров.

Цель настоящей статьи — освещение развития мультиалгебраических систем в плане исследования условий индуцирования групповой структуры на разбиениях множеств произвольной природы.

### ДИФУНКЦИОНАЛЬНОСТЬ И ТЕРНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Пусть на декартовом произведении $A \times B$ произвольных множеств $A, B$ задано отношение $T(x, y)$. Если оно дифункционально, т.е. $T = TT^{-1}T$, то это отношение индуцирует и на области определения, и на области значений отношения эквивалентности, фактор-множества по которым равномощны. Из дифункциональности следует

$$\left.\begin{array}{l} T(a_i, b_j) = 1 \\ T(a_k, b_j) = 1 \\ T(a_k, b_l) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow T(a_i, b_l) = 1 .$$

В конечном варианте отношение $T(x, y)$ задано матрицей $A_T$. Если на местах $(i, j), (k, j), (k, l)$ этой матрицы стоят единицы, то и на месте $(i, l)$ тоже будет единица. Очевидно, что эти «четырехугольники» перенумерацией элементов множеств $A$ и $B$ могут быть трансформированы в единичные $2\times 2$ «квадраты» и помещены в любое место матрицы $A_T$. Ясно и то, что подобные матрицы могут быть приведены к блочному виду

$$
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{ccccccccccccc}
\overbrace{\qquad\quad}^{m_1} & & & \overbrace{\qquad\quad}^{m_2} & & & \cdots & \overbrace{\qquad\quad}^{m_r} & & & & &
\end{array} & \\
\left\{
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\
1 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\vdots & & \vdots & & & & & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & & & & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & & & & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}
\right\}
&
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\} n_1 \\
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\} n_2 \\
\quad\vdots \\
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\} n_r \\
\\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

Здесь блоки состоят только из единиц, имеют размеры $(n_i, m_i)$, $i = \overline{1, r}$, и $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$, $\sum_{i=1}^{r} m_i = m$, $n = card\{A\}$, $m = card\{B\}$.

Поскольку любая перенумерация — это действие некоторой перестановки $S_n$, где $n$ – число элементов, любую $(n \times m)$-матрицу можно трансформировать применением двух перестановок: $S_n$ и $S_m$. Результат этой трансформации произвольной матрицы $A$ будем обозначать $S_{n,m}(A)$. Отсюда вытекает справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 1.** Для любого конечного дифункционального отношения $T(x, y)$ всегда найдутся две перестановки, для которых $S_{n,m}(A_T)$ имеет блочный вид.

Отметим, что отношение дифункциональности представляет собой модель $\langle \{A \times B\}, T(x, y) \rangle$ (назовем ее дифункциональной). Но из вышесказанного следует, что на классах эквивалентности порождается мультимодель, в которой мультиотношение единственно и представляет собой простейшую эквивалентность — эквивалентность равенства

$$
I(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases}
$$

Отсюда вытекает следствие.

**Следствие 1.** Любая дифункциональная модель всегда индуцирует мультимодель в виде эквивалентности равенства.

Отметим, что если у двух дифункциональных моделей число блоков в матрицах $S_{n_1, m_1}(A_{T_1})$ и $S_{n_2, m_2}(A_{T_2})$ совпадает (а природа множеств, формирующих их носитель, несущественна), то индуцируется одна и та же мультимодель в виде эквивалентности равенства, что фактически означает их алгебраическую неразличимость.

Введем определения.

**Определение 1.** Порядком отношения дифункциональности $T$ и соответствующей ей модели дифункциональности назовем число блоков в матрице $S_{n,m}(A_T)$ и обозначим его $\pi(T)$.

**Определение 2.** Два отношения дифункциональности $T_1$ и $T_2$ и соответствующие им модели будем называть изоморфными, если они порождают одну и ту же мультимодель в виде эквивалентности равенства.

Исходя из этого сформулируем следствие.

**Следствие 2**. Две дифункциональности $T_1$ и $T_2$ (дифункциональные модели) изоморфны тогда и только тогда, когда $\pi(T_1) = \pi(T_2)$, т.е. $T_1 \sim T_2 \Leftrightarrow \pi(T_1) = \pi(T_2)$.

Рассмотрим, при каких условиях произвольное тернарное отношение $F(x, y, z)$ на $A \times B \times C$ индуцирует мультисистему с единым носителем. Поскольку произвольное тернарное отношение представляет собой семейства бинарных, среди которых на уровне мультисистем только дифункциональные отношения формируют единый носитель с точностью до природы элементов, то естественно предполагать, что именно это свойство должно быть определяющим.

**Определение 3.** Тернарное отношение $F(x, y, z)$ на $A \times B \times C$ является усеченно-дифункциональным по аргументу $x$, если соответствующее сечение (при любом фиксированном $x \in A$ отношение $F(x, y, z)$ трактуется как бинарное отношение, заданное на $B \times C$) является отношением дифункциональности.

**Определение 4.** Тернарное отношение $F(x, y, z)$ на $A \times B \times C$ называется вполне дифункциональным, если оно является усеченно-дифункциональным по каждому своему аргументу.

**Лемма 1.** Пусть $T_1(x, y)$ и $T_2(x, y)$ — дифункциональные отношения на $A \times B$. Тогда если $\forall x_1, x_2 \in A$, $\forall y \in B$ имеет место $T_1(x_1, y) = T_1(x_2, y) \Leftrightarrow T_2(x_1, y) = T_2(x_2, y)$, то $T_1 \sim T_2$.

**Доказательство.** Рассмотрим необходимость. Если $\forall y \in B$ для каких-то $x_1, x_2 \in A$ имеет место равенство $T_1(x_1, y) = T_1(x_2, y)$, то элементы $x_1$ и $x_2$ принадлежат одному классу эквивалентности, которые индуцируются отношением $T_1$ на множестве $A$, т.е. $x_1 \overset{T_1}{\sim} x_2$ (символ $\overset{T_1}{\sim}$ означает эквивалентность относительно $T_1$). Из этого следует, что $T_2(x_1, y) = T_2(x_2, y)$, т.е. $x_1 \overset{T_2}{\sim} x_2$. Значит, класс эквивалентности $A_1 / T_1$, содержащий элементы $x_1$ и $x_2$, принадлежит классу $A_1 / T_2$, содержащему эти же элементы. Но условие леммы справедливо и для противоположной ситуации; следовательно, $A_1 / T_1 \subset A_1 / T_2$, $A_1 / T_2 \subset A_1 / T_1$ или $A_1 / T_1 = A_1 / T_2$. Таким образом, разбиения, индуцируемые на множестве $A$ дифункциональностями $T_1$ и $T_2$, совпадают, откуда следует совпадение мощностей разбиений $card\{A_1 / T_1\} = card\{A_1 / T_2\}$. Следовательно, $T_1 \sim T_2$.

Достаточность очевидна: условие леммы 1 означает совпадение разбиений $\{A / T_1\}$ и $\{A / T_2\}$, но дифункциональности $T_1$ и $T_2$ в случае их изоморфизма имеют одинаковые разбиения, что и требовалось.

**Замечание 1.** В случае конечности множеств $A$ и $B$ условие леммы 1 означает равенство количества единичных блоков в матрицах $A_{T_1}$ и $A_{T_2}$, т.е. $\pi(T_1) = \pi(T_2)$. Эта ситуация рассмотрена в силу практической важности. Однако если множества $A$ и $B$ произвольны, то в условиях одной области определения двух отношений дифункциональности конечностью можно пренебречь, и лемма 1 справедлива в общем случае. Таким образом, для двух отношений дифункциональности, имеющих одну область определения, критерием изоморфизма является условие леммы 1.

Лемма 1 позволяет получить условия, согласно которым произвольное тернарное отношение, заданное на декартовом произведении произвольных множеств $A, B$ и $C$, индуцирует мультиалгебраическую систему с единым носителем, т.е. мультиотношение, определенное на декартовом кубе некоторого множества, что является необходимым для формирования мультигрупп.

**Утверждение 2.** Произвольное тернарное отношение $F(x, y, z)$ на $A \times B \times C$ имеет все изоморфные один другому сечения тогда и только тогда, когда оно вполне дифункционально, и для любых $x_1, x_2 \in A$, $y_1, y_2 \in B$ и $z \in C$ имеют место условия:

i) $F(x_1, y_1, z) = F(x_1, y_2, z) \Leftrightarrow F(x_2, y_1, z) = F(x_2, y_2, z)$;

ii) $F(x_1, y_1, z) = F(x_2, y_1, z) \Leftrightarrow F(x_1, y_2, z) = F(x_2, y_2, z)$.

**Доказательство.** Рассмотрим достаточность. Нетрудно заметить, что если тернарное отношение $F(x, y, z)$ является вполне дифункциональным, то все сечения являются отношениями дифункциональности, заданными на одной области определения.

Из условия i) видно, что оно включает два сечения: $F(x_1, y, z)$ и $F(x_2, y, z)$, полностью удовлетворяющие условиям леммы 1, так как это условие фактически представляет условие леммы 1 для этих сечений. Но поскольку условие является критерием изоморфизма, то для любых $x_1, x_2 \in A$ имеем изоморфизм $F(x_1, y, z) \sim F(x_2, y, z)$. Рассуждая аналогично, из условия ii) имеем $F(x, y_1, z) \sim F(x, y_2, z)$.

Если обозначить разбиения, индуцируемые некоторым отношением $F$ на множествах $A, B$ и $C$ соответственно через $\{A / F\}$, $\{B / F\}$, $\{C / F\}$, то из $F(x_1, y, z) \sim F(x_2, y, z)$ следует, что мощности разбиений $\{B / F\}$ и $\{C / F\}$ совпадают и не зависят от выбора элемента $x$, т.е. $card\{B / F\} = card\{C / F\}$. Аналогично из условия $F(x, y_1, z) \sim F(x, y_2, z)$ имеем $card\{A / F\} = card\{C / F\}$; но тогда $card\{A / F\} = card\{B / F\} = card\{C / F\}$, что и означает вместе с вполне дифункциональностью отношения $F(x, y, z)$ изоморфизм всех его сечений. Достаточность доказана.

Перейдем к доказательству необходимости. Если все сечения изоморфны, то вполне-дифункциональность выполняется, поскольку $card\{A / F\} = card\{B / F\} = card\{C / F\}$. Отсюда следует существование взаимно-однозначного соответствия между множествами классов эквивалентностей, что порождает дифункциональности в каждом сечении. Условия i) и ii) будут выполняться как критерии изоморфизма.

Утверждение доказано.

## МУЛЬТИАЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ЕДИНЫМ НОСИТЕЛЕМ В ВИДЕ ДЕКАРТОВОГО КУБА

Пусть дано $n$-арное отношение $S$, заданное на декартовом произведении произвольных множеств $A_1 \times \ldots \times A_n$. Разобьем набор множеств $\{A_i\}_{i=1}^n$ на $k$ непустых частей следующим образом: в первую часть входят матрица $A_1$ и какие-то оставшиеся элементы. Во вторую часть входят минимальный элемент из номеров $A_i$, который не вошел в первую часть, и какие-то элементы из остатка, не вошедшие в первую часть. В третью часть входят минимальный элемент из номеров $A_i$, не вошедший в первые две части, и какие-то элементы остатка и т.д. Отсюда нетрудно понять, что на декартовом произведении множеств $B_1 \times \ldots \times B_k$, где $B_j$ — декартово произведение множеств $A_i$, входящих в $j$-ю часть и расположенных в порядке возрастания номеров. Заданным $n$-арным отношением $S$ индуцируется некоторое $k$-арное отношение, зависящее от способа разбиения на $k$ частей. Все такие разбиения образуют множество, элемент которого обозначим $p_k$.

**Определение 5.** Фактор-отношением $k$-го порядка данного произвольного $n$-арного отношения $S$ назовем $k$-арное отношение, индуцируемое исходным отношением с помощью некоторого разбиения $p_k$ области определения $A_1 \times \ldots \times A_n$ на $k$ частей, и обозначим его $\Phi(p_k) / S$.

Далее сформулируем и докажем следующее утверждение.

**Утверждение 3.** Пусть дано произвольное $n$-арное отношение $S$, заданное на декартовом произведении произвольных множеств $A_1 \times \ldots \times A_n$. Тогда им индуцируется тернарное мультиотношение с единым носителем (на декартовом кубе некоторого множества) в том и только в том случае, когда существует разбиение $p_3$ набора множеств $\{A_i\}_{i=1}^n$ такое, что соответствующее ему фактор-отношение третьего порядка $\Phi(p_3) / S$ удовлетворяет как тернарное отношение условиям утверждения 2.

**Доказательство.** Сначала рассмотрим достаточность. Очевидно, что если существует некоторое разбиение $p_3$ набора $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то соответствующее ему фактор-отношение третьего порядка $\Phi(p_3)/S$, индуцируемое отношением $S$, задано на декартовом произведении множеств $B_1 \times B_2 \times B_3$, где $B_i = A_{i1} \times \ldots \times A_{iri}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, а набор $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ir_i}$ входит в набор $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в порядке возрастания номеров, т.е. $i_1, i_2 < \ldots < i_{ri}$, $r_i$ — мощность $i$-й части разбиения $p_3$, при этом $r_1, r_2, r_3 > 0$, $r_1 + r_2 + r_3 = n$.

Поскольку тернарное отношение $\Phi(p_3)/S$ удовлетворяет условиям утверждения 2, оно имеет все изоморфные один другому сечения. При этом тернарное отношение $\Phi(p_3)/S$ индуцирует на каждом из множеств $B_1, B_2, B_3$ равномощные разбиения или фактически одно разбиение с точностью до состава элементов. Тогда имеют место равенства

$$card\,\{B_1/[\Phi(p_3)/S]\} = card\,\{B_2/[\Phi(p_3)/S]\} = card\,\{B_3/[\Phi(p_3)/S]\}. \quad (1)$$

Отсюда следует, что множества $\{B_i/[\Phi(p_3)/S]\}$ можно взаимно-однозначно отобразить на некоторое множество $C$, на декартовом кубе $C^3$ которого задано тернарное мультиотношение, индуцируемое $\Phi(p_3)/S$ и фактически порожденное произвольным отношением $S$. Достаточность доказана.

Перейдем к доказательству необходимости. Если $S$ порождает некоторое тернарное мультиотношение на декартовом кубе какого-то множества классов эквивалентности $C$, то существует некоторое разбиение $p_3$ набора элементов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Это означает выполнение равенств (1) для соответствующих разбиению $p_3$ множеств $B_1, B_2, B_3$. Но из утверждения 2 следует, что эти равенства обеспечивают изоморфизм всех сечений тернарного мультиотношения, индуцируемого $S$, т.е. выполнения условий вполне дифункциональности и условий i), ii) утверждения 2, что завершает доказательство утверждения.

Таким образом, тернарное мультиотношение с единым носителем может порождаться не только исходным тернарным отношением, но и произвольным $n$-арным. Сформулируем следствие.

**Следствие 3.** Любое $n$-арное отношение индуцирует на классах эквивалентности все отношения по арности от единицы до $n$.

Формирование любой мультиалгебраической системы требует экспериментальной проверки условий ее существования, т.е. необходимо уметь оперировать данными непосредственно на уровне исходного $n$-арного отношения. В связи с этим полученные ранее результаты представим в явном (координатном) виде.

Введем обозначения. Рассмотрим кортеж элементов $x_1, \ldots, x_n$. Его можно различными способами разбить на $m$ частей с сохранением номера элемента $x_i$. На рис. 1 схематично показано такое разбиение. Здесь выделены позиции, которые занимают элементы $x_{ik_1}, x_{ik_2}, \ldots, x_{ik_{r_k}}$, причем такая индексация подчеркивает, что важны не сами элементы кортежа, а номера аргументов, входящих в $k$-ю часть: $i_{k_1}, i_{k_2}, \ldots, i_{k_{r_k}}$. Введем преобразование $f_k(\bar{x}) = \{x_{ik_1}, x_{ik_2}, \ldots, x_{ik_{r_k}}\}$, где $\bar{x}$ есть кортеж $x_1, \ldots, x_n$. Такое преобразование осуществляет выборку элементов

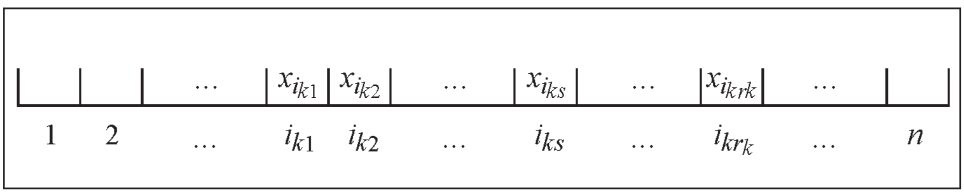


*Рис. 1.* Схема разбиения кортежа

с фиксацией их номеров, например разбиение кортежа $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ на две части: $\{x_1, x_3, x_5\}$ и $\{x_2, x_4\}$, т.е. $f_1(\bar{x}) = \{x_1, x_3, x_5\}$, $f_2(\bar{x}) = \{x_2, x_4\}$, $\bar{x} = \{f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x})\}$. Кроме того, если $\bar{x}$, $\bar{y} \in A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$, то $\{f_1(\bar{x}), f_2(\bar{y})\} = \{x_1, y_2, x_3, y_4, x_5\}$. В общем случае в соответствии с проведенными рассуждениями имеем

$$\forall \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m \in A_1 \times \ldots \times A_n \Rightarrow \{f_1(\bar{x}_1), f_2(\bar{x}_2), \ldots, f_m(\bar{x}_m)\} \in A_1 \times \ldots \times A_n .$$

Теперь можно вернуться к координатной формулировке искомых условий.

**Лемма 2**. Если для $n$-арного отношения $S$, заданного на декартовом произведении произвольных множеств $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, существует разбиение $p_3$ такое, что

$$B_1 = A_{11} \times A_{12} \times \ldots \times A_{1r_1},$$

$$B_2 = A_{21} \times A_{22} \times \ldots \times A_{2r_2},$$

$$B_3 = A_{31} \times A_{32} \times \ldots \times A_{3r_3},$$

где $r_1 + r_2 + r_3 = n$, и для любых $\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2 \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ выполняется импликация

$$\left.\begin{array}{l} S(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{y}_1), f_3(\bar{z}_1)) = 1; \\ S(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{y}_2), f_3(\bar{z}_1)) = 1; \\ S(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{y}_2), f_3(\bar{z}_2)) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow S(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{y}_1), f_3(\bar{z}_2)) = 1,$$

тогда индуцированное тернарное отношение $\Phi(p_3)/S$ на $B_1 \times B_2 \times B_3$ является усеченно-дифункциональным по первому аргументу $\bar{x} \in B_1$.

Справедливость леммы очевидна. Из определения преобразований $f_1, f_2, f_3$ с учетом импликации в условии леммы следует дифункциональность $\Phi(p_3)/S$.

Нетрудно заметить, что если будут справедливы импликации по другим аргументам, то из леммы 2 следует усеченная дифункциональность $\Phi(p_3)/S$ по остальным аргументам, т.е. индуцированное тернарное отношение $\Phi(p_3)/S$ является вполне дифункциональным. В итоге сформулируем координатную формулировку утверждения 3.

**Утверждение 4.** Произвольное $n$-арное отношение $S$ индуцирует тернарную мультисистему с единым носителем, если существует разбиение $p_3$, удовлетворяющее следующим условиям:

i) для любых $\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2 \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ справедлива импликация

$$\left.\begin{array}{l} S(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{y}_1), f_3(\bar{z}_1)) = 1; \\ S(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{y}_2), f_3(\bar{z}_1)) = 1; \\ S(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{y}_2), f_3(\bar{z}_2)) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow S(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{y}_1), f_3(\bar{z}_2)) = 1;$$

ii) для любых $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}, \bar{z}_1, \bar{z}_2 \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ справедлива импликация

$$\left.\begin{array}{l} S(f_1(\bar{x}_1), f_2(\bar{y}), f_3(\bar{z}_1)) = 1; \\ S(f_1(\bar{x}_2), f_2(\bar{y}), f_3(\bar{z}_1)) = 1; \\ S(f_1(\bar{x}_2), f_2(\bar{y}), f_3(\bar{z}_2)) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow S(f_1(\bar{x}_1), f_2(\bar{y}), f_3(\bar{z}_2)) = 1;$$

iii) для любых $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{z} \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ справедлива импликация

$$\left.\begin{aligned} &S(f_1(\bar{x}_1), f_2(\bar{y}_1), f_3(\bar{z}))=1;\\ &S(f_1(\bar{x}_2), f_2(\bar{y}_1), f_3(\bar{z}))=1;\\ &S(f_1(\bar{x}_2), f_2(\bar{y}_2), f_3(\bar{z}))=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow S(f_1(\bar{x}_1), f_2(\bar{y}_2), f_3(\bar{z}))=1;$$

iv) для любых $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{z} \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ имеют место равенства

$$S(f_1(\bar{x}_1), f_2(\bar{y}_1), f_3(\bar{z})) = S(f_1(\bar{x}_1), f_2(\bar{y}_2), f_3(\bar{z})) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S(f_1(\bar{x}_2), f_2(\bar{y}_1), f_3(\bar{z})) = S(f_1(\bar{x}_2), f_2(\bar{y}_2), f_3(\bar{z})),$$

$$S(f_1(\bar{x}_1), f_2(\bar{y}_1), f_3(\bar{z})) = S(f_1(\bar{x}_2), f_2(\bar{y}_1), f_3(\bar{z})) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S(f_1(\bar{x}_1), f_2(\bar{y}_2), f_3(\bar{z})) = S(f_1(\bar{x}_2), f_2(\bar{y}_2), f_3(\bar{z})).$$

Справедливость утверждения достаточно очевидна. Импликации i)– iii) рассмотрены выше, а условия iv) есть не что иное, как условия утверждения 2 об изоморфизме сечений тернарного отношения.

Отметим практическую важность утверждения 4, поскольку оно в явном виде указывает способ проведения эксперимента при построении и обосновании математической модели.

Покажем, что индуцируемые на классах эквивалентностей отношения не допускают дальнейшей процедуры факторизации. Действительно, следствие 3 означает, что в случае, когда область определения произвольного $n$-арного отношения представляет собой декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ произвольных множеств $A_i$, $i = \overline{1, n}$, разбить набор $\{A_1, \ldots, A_n\}$ в качестве множества на непересекающиеся подмножества можно различными способами, а их количество варьируется от единицы до $n$. Допустим, $n$-арное отношение $S$ индуцирует $k$-арное отношение $F$ на декартовом произведении множеств вида

$$\begin{cases} B_1 = A_{11} \times A_{12} \times \ldots \times A_{1r_1};\\ B_2 = A_{21} \times A_{22} \times \ldots \times A_{2r_2};\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ B_k = A_{k1} \times A_{k2} \times \ldots \times A_{k_{r_k}}, \end{cases}$$

где $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$. Сохраняя обозначения, используемые в утверждении 4, имеем $\bar{n} = \{f_1(\bar{n}), f_2(\bar{n}), \ldots, f_k(\bar{n})\}$. Тогда отношение $F$, фактически заданное на декартовом произведении $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_k$ на каждом из множеств $B_i$, $i = \overline{1, k}$, индуцирует процедуру факторизации такую, что $b_{mi_m} \overset{F}{\sim} b_{mj_m}$, где $b_{mj_m} \in B_m$, а $m \in \{1, \ldots, k\}$, если имеет место равенство

$$F(b_{1i_1}, b_{2i_2}, \ldots, b_{mi_m}, \ldots, b_{ki_k}) = F(b_{1i_1}, b_{2i_2}, \ldots, b_{mj_m}, \ldots, b_{ki_k}) \tag{2}$$

для любого набора элементов

$$\{b_{1i_1}, \ldots, b_{m-1i_{m-1}}, b_{m+1i_{m+1}}, \ldots, b_{ki_k}\} \in B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_{m-1} \times B_{m+1} \times \ldots \times B_k.$$

Таким образом, индуцируется $k$-арное мультиотношение $M(P_k)/F$, которое не допускает дальнейшей процедуры факторизации, т.е. на каждом месте отношения $M(P_k)/F$ классы эквивалентностей состоят из одного элемента. Сформулируем и докажем этот факт более точно.

Обозначим $\{B_m / F\}_{m=1}^{k}$ классы эквивалентностей, которые индуцируются на множествах $\{B_m\}_{m=1}^{k}$ вследствие отношения $F$, т.е. мультиотношение $M(P_k)/F$ задано на декартовом произведении $B_1/F \times B_2/F \times \ldots \times B_k/F$. Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 5.** Если для какого-либо фиксированного $m \in \{1, \ldots, k\}$ найдутся два элемента $b_m(F)$, $b'_m(F) \in B_m / F$, для которых имеет место равенство

$$M(P_k)/F(b_1(F), \ldots, b_m(F), \ldots, b_k(F)) =$$
$$= M(P_k)/F(b_1(F, \ldots, b'_m(F), \ldots, b_k(F)), \tag{3}$$

где $\{b_1(F), \ldots, b_{m-1}(F), b_{m+1}(F), \ldots, b_k(F)\}$ — произвольный набор, принадлежащий декартовому произведению $B_1/F \times \ldots \times B_{m-1}/F \times B_{m+1}/F \times \ldots \times B_k/F$, то $b_m(F) = b'_m(F)$.

**Доказательство.** Допустим, что выполняется равенство (3). При этом $b_m(F)$ и $b'_m(F)$ — классы эквивалентностей. Выберем по представителю от каждого класса $b_{mi_m} \in b_m(F)$ и $b'_{mi_m} \in b'_m(F)$. Аналогично выберем произвольных представителей от остальных классов, т.е. $b_{1i_1} \in b_1(F), \ldots, b_{m-1 i_{m-1}} \in b_{m-1}(F) \in$ $\in b_{m+1 i_{m+1}} \in b_{m+1}(F)$, ... , $b_{ki_k} \in b_k(F)$. Тогда на основании (3) имеет место равенство (2) для отношения $F$, т.е.

$$F(b_{1i_1}, \ldots, b_{mi_m}, \ldots, b_{ki_k}) = F(b_{1i_1}, \ldots, b'_{mi_m}, \ldots, b_{ki_k})$$

или $b_{mi_m} \overset{F}{\sim} b'_{mi_m}$, т.е. элементы $b_{mi_m}$, $b'_{mi_m}$ принадлежат обоим классам эквивалентностей $b_m(F)$ и $b'_m(F)$. Следовательно, они пересекаются: $b_m(F) \cap b'_m(F) \neq \varnothing$, но выполнение последнего равенства для классов эквивалентностей означает их совпадение. Теорема доказана.

Из утверждения 5 вытекает следующее: для произвольного $n$-арного отношения $S$ классы эквивалентностей, формирующиеся на декартовых произведениях множеств из набора $A_1, \ldots, A_n$, являются максимально полными. Мультисистемы, индуцирующиеся отношением $S$ и в то же время являющиеся отношениями, «различают» на любом месте своих аргументов все элементы, и в этом смысле процедура факторизации является окончательной.

## АКСИОМАТИКА МУЛЬТИГРУПП

Одна из реализаций мультисистем — распространение свойств традиционных математических структур на фактор-множества. При изучении различных информационных сред важное значение имеет обратимость тех или иных искусственных или природных свойств, определяющих их функциональность, адекватность и т.п. Иначе говоря, мультигруппы как инструмент изучения разбиений множеств произвольной природы представляют собой объект, имеющий и теоретическое, и практическое значение. Поскольку любая бинарная операция равносильна тернарному отношению, начнем с анализа свойств мультигрупп.

**Лемма 3.** Произвольное тернарное отношение $S$, заданное на декартовом кубе непустого множества $G$ элементов произвольной природы, индуцирует групповую операцию, относительно которой становится группой, если оно удовлетворяет следующим условиям:

i) $\forall a, b \in G \ \exists!\, c \in G : S(a, b, c) = 1$;

ii) $\forall a, b, c, c_1, c_2, c_3, c_4 \in G$: $S(a, b, c_1) = S(c_1, c, c_2) = S(b, c, c_3) =$ $= S(a, c_3, c_4) = 1 \Rightarrow S(c_1, c, c_4) = 1$;

iii) $\forall a \in G \ \exists e : S(e, a, a) = 1$;

iv) $\forall a \in G \ \ \exists a^{-1} \in G: \ S(a^{-1}, a, e) = 1$;

v) $\forall a, b \in G: \ S(a, b, c) = 1 \Rightarrow S(b, a, c) = 1$ в случае, когда индуцируемая отношением $S$ группа является абелевой.

**Доказательство.** Нетрудно заметить, что свойство i) леммы 3 — это описание закона композиции на языке тернарного отношения $S$. Действительно, если для произвольных $a$ и $b$ из $G$ найдется единственный элемент $c$ из $G$, удовлетворяющий равенству $S(a, b, c) = 1$, то его можно сопоставить элементам $a$ и $b$ из $G$, считая это равенство эквивалентным групповой операции $ab = c$.

Рассмотрим теперь ассоциативность. Если имеет место импликация ii), то рассмотренная эквивалентность тернарного отношения и групповой операции обеспечивает эквивалентность пар равенств $ab = c_1$ и

$$S(a, b, c_1) = 1, \tag{4}$$

а также равенства $c_1 c = c_2$ и равенства

$$S(c_1, c, c_2) = 1, \tag{5}$$

это означает, что

$$(ab)c = c_2 . \tag{6}$$

Аналогично равенство $bc = c_3$ эквивалентно отношению

$$S(b, c, c_3) = 1, \tag{7}$$

а равенство $ac_3 = c_4$ эквивалентно равенству

$$S(a, c_3, c_4) = 1, \tag{8}$$

т.е. получаем, что

$$a(bc) = c_4 . \tag{9}$$

Однако согласно свойству ii) из (4), (5), (7), (8) имеем $S(c_1, c, c_4) = 1$. Сравним это равенство с (5): первые два аргумента совпадают, т.е. из свойства i) леммы 3 следует единственность элемента из $G$, стоящего на третьем месте, т.е. $c_2 = c_4$, но тогда с учетом (6) и (9) получим $(ab)c = a(bc)$, что и требовалось доказать.

Теперь нетрудно понять, что выполнение свойства iii) означает эквивалентность равенств $ea = a$ и $S(e, a, a) = 1$, что означает существование левой единицы.

Аналогично свойство iv) означает эквивалентность равенств $a^{-1}a = e$ и $S(a^{-1}, a, e) = 1$, что свидетельствует о существовании левого обратного элемента.

Наконец, свойство v) устанавливает коммутативность операции, индуцируемой отношением $S$, так как равенство $S(a, b, c) = 1$ эквивалентно равенству $ab = c$, а равенство $S(b, a, c) = 1$ эквивалентно равенству $ba = c$, откуда следует $ab = ba$, т.е. имеем абелеву группу. Лемма доказана.

Полученные результаты позволяют найти те свойства произвольного $n$-арного отношения, которые обеспечивают индуцирование этим отношениям мультигруппы. В утверждении 4 найдены условия, при которых $n$-арное отношение $S$ индуцирует тернарную мультисистему с единым носителем. Из утверждения 5 следует, что именно на этом этапе окончательно формируются классы эквивалентностей, на которых может формироваться групповая операция. Остается распространить результаты леммы 3 на $n$-арные отношения.

С использованием нотации леммы 2 тернарная мультисистема $\Phi(p_3)/S$ (далее будем обозначать ее через $T$) задана на декартовом произведении классов

$B_1/T \times B_2/T \times B_3/T$. Если выполняются условия утверждения 4, то между классами эквивалентностей имеем взаимно-однозначные соответствия $\alpha$: $B_1/T \leftrightarrow B_2/T$; $\beta$: $B_2/T \leftrightarrow B_3/T$; $\gamma$: $B_1/T \leftrightarrow B_3/T$, т.е. справедлива схема

$$\begin{tikzcd} B_1/T \arrow[rr, leftrightarrow, "\alpha"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\gamma"'] & & B_2/T \arrow[dl, leftrightarrow, "\beta"] \\ & B_3/T & \end{tikzcd}$$

Абстрагируясь (что часто имеет прямой практический смысл) от природы элементов множеств $B_i/T$, $i=\overline{1,3}$, можно анализировать одно множество $B$, на декартовом кубе которого индуцируется тернарное мультиотношение. Если выбрать произвольный элемент $\bar{x}=\{x_1,\ldots,x_n\}$ из множества $A_1\times\ldots\times A_n$, на котором задано $n$-арное отношение $S$, то отображение $f_1(\bar{x})$ переводит его в множество $B_1$, т.е. $f_1(\bar{x})\in B_1$. Отметим, что элемент $f_1(\bar{x})$ принадлежит определенному классу эквивалентностей $B_1/T$, который, в свою очередь, соответствует определенному элементу множества $B$. Аналогичная ситуация имеет место для множеств $B_2$ и $B_3$ (схематично представлено на рис. 2). Здесь полагается, что отображения $\alpha_i$ ставят в соответствие элементу множества $B_i$ класс, которому он принадлежит. Каждое множество $B_i/T=\{B_{i1}/T,\ldots,B_{ik}/T,\ldots,B_{is}/T\}$ состоит из $s$ элементов, а каждый класс вследствие отображения $\beta_i$ переходит в элемент множества $B$, состоящего из элементов $C_i,\ldots,C_p,\ldots,C_s$.

Очевидно, что прослеживается и обратная цепочка. По произвольному элементу $C_p\in B$ для любого $i\in\{1,\,2,\,3\}$ можно установить соответствующий ему класс $B_{ik}/T$; в множестве $B_i/T$ выбрать любой элемент этого класса $f_i(\bar{x})$. Ясно, что обратные отображения не все однозначны, а именно $\beta_i^{-1}$ — однозначное отображение в отличие от многозначных отображений $\alpha_i^{-1}$ и $f_i^{-1}$, однако можно выбирать любой элемент образа $\alpha_i^{-1}$ и $f_i^{-1}$. В результате имеем схему, представленную на рис. 3 для любых пар номеров $i$ и $j$ ($i,j\in\{1,2,3\}$, $i\neq j$, $p,k,m\in\{1,\,\ldots,s\}$, поскольку при $i=j$ возникающие отображения не представляют интереса для продуцирования тернарной мультигруппы). На рис. 3 в виде суперпозиции отображений индуцируются многозначные отображения $\psi_{ij}$ и $\varphi_{ij}$:

$$\psi_{ij}:A_1\times\ldots\times A_n\to A_1\times\ldots\times A_n, \tag{10}$$

$$\psi_{ij}=f_i\circ\alpha_i\circ\beta_j\circ\beta_j^{-1}\circ\alpha_j^{-1}\circ f_j^{-1}, \tag{11}$$

$$\varphi_{ij}:B_i\to B_j, \tag{12}$$

$$\varphi_{ij}=\alpha_i\circ\beta_j\circ\beta_j^{-1}\circ\alpha_j^{-1}, \tag{13}$$

где знак $\circ$ представляет символ суперпозиции отображений. Укажем на ряд свойств, которыми эти отображения обладают.

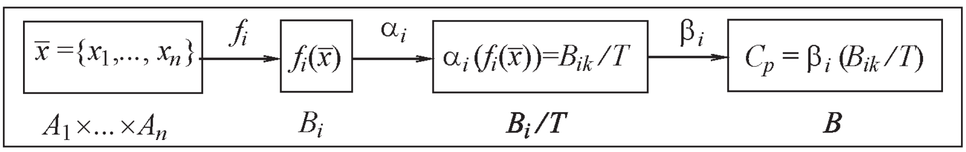


*Рис. 2.* Схема индуцирования тернарной мультисистемы ($i=\overline{1,3}$)

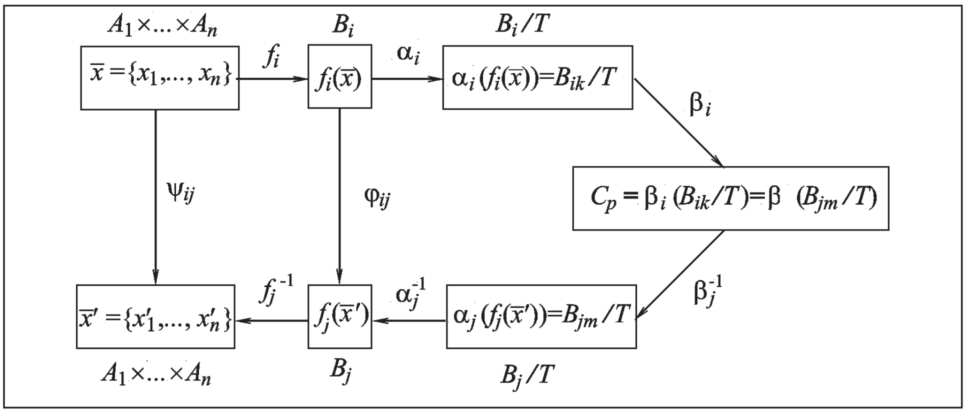


*Рис. 3.* Схема индуцирования тернарной мультисистемы (общий случай)

**Свойство 1.** $\forall \bar{x} \in A_1 \times \ldots \times A_n \Rightarrow \psi_{ij}(\bar{x}) = f_j^{-1}(\varphi_{ij}(f_i(\bar{x})))$.

Это свойство указывает на связь между отображениями $\psi_{ij}$ и $\varphi_{ij}$, которое очевидно вытекает из равенств (11) и (13), указывающих на то, что $\psi_{ij} = f_i \circ \varphi_{ij} \circ f_j^{-1}$. Однако эта суперпозиция эквивалентна импликации в свойстве 1.

**Свойство 2.** Отображения $\varphi_{ij}$ позволяют корректным образом осуществлять любые перестановки аргументов в тернарной мультисистеме, индуцируемой произвольным *n*-арным отношением $S$.

Действительно, поскольку имеет место (10) и (12), то, например, при $i=1, j=2$ для любых $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \in A_1 \times \ldots \times A_n$ корректной является запись $S(f_i(\bar{x}_1), \varphi_{12}(f_1(\bar{x}_2)), f_3(\bar{x}_3))$, поскольку $\varphi_{12}(f_1(\bar{x}_2))$ принадлежит $B_2$. Важно подчеркнуть следующее: для любого сечения по аргументам $x_1, \ldots, x_n$, осуществляемого отображениями $f_i$, с помощью отображений $\varphi_{ij}$ в тернарной мультисистеме $\Phi(p_3)/S$ его можно поместить на любые два оставшихся места. Подобные операции важны при формулировке условий существования мультигруппы на языке произвольного *n*-арного отношения $S$, которое ее индуцирует.

**Свойство 3.** Для любого $\bar{x} \in A_1 \times \ldots \times A_n$ элементы $f_i(\bar{x})$ и $\varphi_{ij}(f_i(\bar{x}))$ соответствуют одному элементу множества $B$ или для них выполняется равенство

$$\beta_j(\alpha_j(f_i(\bar{x}))) = \beta_j(\alpha_j(\varphi_{ij}(f_i(\bar{x})))).$$

Это свойство очевидным образом следует из рис. 2 и определений используемых отображений. На основе рассмотренных свойств можно сформулировать лемму.

**Лемма 4.** Отображения $\varphi_{ij} : B_i \to B_j$ позволяют любое «усечение» аргументов $x_1, \ldots, x_n$ переставлять с *i*-го места на *j*-е в тернарной мультисистеме $\Phi(p_3)/S$, при этом элементы $f_i(\bar{x}) \in B_i$ и $\varphi_{ij}(f_i(\bar{x})) \in B$ принадлежат классам эквивалентностей $B_{i_k}/T$ и $B_{j_m}/T$ соответственно множеств $B_i$, $B_j$, которые переходят при отображениях $\beta_i$ и $\beta_j$ в один и тот элемент множества $B$. Таким образом, выполняется равенство $C_p = \beta_i(B_{i_k}/T) = \beta_j(B_{j_m}/T)$, где $f_i(\bar{x}) \in B_{i_k}/T$; $\varphi_{ij}(f_i(\bar{x})) \in B_{j_m}/T$; $C_p \in B$, $p \in \{1, 2, \ldots, s\}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$.

## УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ МУЛЬТИГРУПП

Сформулируем и докажем итоговый результат, отвечающий на основной вопрос: при каких условиях произвольное *n*-арное отношение $S$ индуцирует мультигруппу?

**Теорема 1** (о существовании мультигрупп). Пусть произвольное $n$-арное отношение $S$ , заданное на декартовом произведении $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ множеств произвольной природы, удовлетворяет условиям утверждения 4 и набору свойств:

i) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in A_1 \times \ldots \times A_n \ \exists \bar{z} : S(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{y}), f_3(\bar{z})) = 1$,

если $\exists \bar{z}' : S(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{y}), f_3(\bar{z}')) = 1$, то

$$\beta_3(\alpha_3(f_3(\bar{z}))) = \beta_3(\alpha_3(f_3(\bar{z}')));$$

ii) $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4 \in A_1 \times \ldots \times A_n$ таких, что

$$\begin{cases} S(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{y}), f_3(\bar{z}_1)) = 1; \\ S(\varphi_{31}(f_3(\bar{z}_1), f_2(\bar{z}), f_3(\bar{z}_2)) = 1; \\ S(\varphi_{21}(f_2(\bar{y})), f_2(\bar{z}), f_3(\bar{z}_3)) = 1; \\ S(f_2(\bar{y}), \varphi_{32}(f_3(\bar{z}_3)), f_3(\bar{z}_4)) = 1, \end{cases}$$

следует $S(\varphi_{31}(f_3(\bar{z}_1), f_2(\bar{z}), f_3(\bar{z}_4))) = 1$;

iii) $\forall \bar{x} \in A_1 \times \ldots \times A_n \ \exists \bar{e} \in A_1 \times \ldots \times A_n : S(f_1(\bar{e}), f_2(\bar{x})), \varphi_{23}(f_2(\bar{x})) = 1$;

iv) $\forall \bar{x} \in A_1 \times \ldots \times A_n \ \exists \bar{x}^{-1} \in A_1 \times \ldots \times A_n : S(f_1(\bar{x}^{-1}), f_2(\bar{x})), \varphi_{13}(f_2(\bar{e}))) = 1$.

Тогда $S$ индуцирует мультисистему, образующую группу на классах эквивалентностей.

**Доказательство.** Из утверждения 4 следует, что $n$-арное отношение $S$ индуцирует тернарную мультисистему $\Phi(p_3)/S$, заданную на декартовом кубе множества $B$, представляющего собой множество классов эквивалентностей. Если $S$, как тернарное отношение, удовлетворяет условиям леммы 3, то на множестве $B$ будет индуцироваться групповая операция, а само множество $B$ относительно этой операции будет образовывать группу на классах эквивалентностей. Покажем, что тернарное отношение $\Phi(p_3)/S$ удовлетворяет условиям леммы 3, и тогда теорема будет доказана.

Как сказано выше, суперпозиция отображений $f_i, \alpha_i, \beta_i, i = \overline{1,3}$, вида $F_i(\bar{x}) = \beta_i(\alpha_i(f_i(\bar{x})))$ ставит в соответствие произвольному элементу $\bar{x} \in A_1 \times \ldots \times A_n$ класс эквивалентностей, которому он принадлежит, т.е. некоторый элемент множества $B$. В свою очередь, введенные ранее отображения $\varphi_{ij}$ $(i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j)$ позволяют переставлять $f_i(\bar{x})$ как аргументы отношения $S$ с сохранением классов эквивалентностей, что дает возможность переставлять аргументы тернарного отношения $\Phi(p_3)/S$. Именно это позволяет решить поставленную задачу.

Действительно, рассмотрим свойство i) теоремы 1. Обозначим $F_1(\bar{x}) = \beta_1(\alpha_1(f_1(\bar{x}))) = a$, $F_2(\bar{x}) = \beta_2(\alpha_2(f_2(\bar{x}))) = b$, $F_3(\bar{x}) = \beta_3(\alpha_3(f_3(\bar{x}))) = c$. Тогда произвольность элементов $\bar{x}, \bar{y}$ будет означать произвольность элементов $a$ и $b$ как элементов множества $B$. А из первого свойства мультитернарного отношения $\Phi(p_3)/S$ следует, что для любых $a, b \in B$ существует $c \in B$, для которого $[\Phi(p_3)/S](a, b, c) = 1$. При этом единственность элемента $c \in B$ обеспечивается второй частью свойства i), поскольку из равенств $F_3(\bar{z}) = c$, $F_3(\bar{z}') = c'$ следует, что для $c' \in B$ выполняется $[\Phi(p_3)/S](a, b, c') = 1$, т.е. $c = c'$. Таким образом, групповая операция на множестве $B$ определена.

Ассоциативность этой операции определяется свойством ii). Введем по аналогии обозначения $F_1(\bar{x}) = a$, $F_2(\bar{y}) = b$, $F_3(\bar{z}_1) = c_1$, $F_2(\bar{z}) = c$, $F_2(\bar{z}_2) = c_2$, $F_3(\bar{z}_3) = c_3$, $F_3(\bar{z}_4) = c_4$. Из указанных выше свойств отображений $\varphi_{ij}$ вытекает, что, например, $\varphi_{31}(f_3(\bar{z}_1))$ соответствует таким элементам множества

$A_1 \times \ldots \times A_n$ при многозначном отображении $f_1^{-1}$, которые лежат в классе эквивалентностей, обозначенном $C_1$ в множестве $B$. В этом случае, например, из первого равенства свойства ii) для тернарного отношения $\Phi(p_3)/S$ следует $[\Phi(p_3)/S](c_1, c, c_2) = 1$ (здесь использовано свойство: если для отношения $S$ имеет место равенство $S(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{y}), f_3(\bar{z})) = 1$, то при введенных обозначениях $[\Phi(p_3)/S](a, b, c) = 1$). Теперь нетрудно увидеть, что равенства свойства ii) для отношения $\Phi(p_3)/S$ имеют вид

$$[\Phi(p_3)/S](a, b, c_1) = [\Phi(p_3)/S](c_1, c, c_2) = [\Phi(p_3)/S](b, c, c_3) =$$

$$= [\Phi(p_3)/S](a, c_3, c_4) = 1 .$$

Но в этом случае справедлива импликация свойства ii), а для отношения $\Phi(p_3)/S$ выполняется равенство $[\Phi(p_3)/S](c_1, c, c_4) = 1$. Окончательно можно сделать вывод о выполнимости для $\Phi(p_3)/S$ свойства ii) леммы 3, что означает ассоциативность групповой операции на $B$ — множестве классов эквивалентностей.

Аналогично при обозначениях $F_2(\bar{e}) = e$, $F_2(\bar{x}) = a$ будут иметь место свойства ii) и iv) леммы 3 в применении к отношению $\Phi(p_3)/S$, т.е. в итоге доказано, что мультитернарное отношение $\Phi(p_3)/S$, индуцируемое произвольным $n$-арным отношением $S$, удовлетворяет условиям леммы 3, что завершает доказательство теоремы.

**Замечание 2.** Для обеспечения коммутативности групповой операции $n$-арное отношение $S$ должно обладать следующим свойством: $\forall \bar{x}, \bar{y} \in A_1 \times \ldots \times A_n$ из равенства $S(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{y}), f_3(\bar{z})) = 1$ следует $S(\varphi_{21}(f_1(\bar{y})), \varphi_{12}(f_1(\bar{x})), f_3(\bar{z})) = 1$, что легко показать, используя схему доказательства теоремы о существовании мультигрупп.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Факторизация информации (например, в задачах распознавания образов) в том или ином признаковом пространстве концептуально является одним из основных подходов, лежащих в основе и обработки, и интерпретации данных. Применение классов эквивалентностей, выступающих в качестве объектов обобщения–детализации, приводит к необходимости решения целого класса задач. В первую очередь, следует выполнить поиск и анализ внутренних эквивалентностей, установить правомочность (согласованность) использования совокупности эквивалентностей, в том числе внешних, введение которых диктуется предметной областью, и, наконец, дать приемлемое определение контекстно-зависимых операций на классах эквивалентностей. В этом плане предложенные результаты являются основой для изучения групповых свойств, возникающих на разбиениях множеств произвольной природы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Zhang L., Zhang B. Fuzzy reasoning model under quotient space structure // Inform. Sci. — 2005. — **173**, No 3. — P. 353–364.
2. Zhang L., Zhang B. Quotient spaces and granular computing // Handbook of Granular Comput. / W. Pedrycz, A. Skowron, V. Kreinovich (eds.). — Chichester: John Wiley and Sons Ltd., 2008. — P. 411–424.
3. Zhang L., Zhang B. The theory and application of tolerance relations // Intern. J. of Granular Computing, Rough Sets and Intelligent Systems. — 2009. — **1**, No. 2. — P. 179–189.

4. Zadeh L.A. Towards a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic // Fuzzy Sets Systems. — 1997. — **19.** — P. 111–127.

5. Yao Y. The art of granular computing // Rough Sets and Intelligent Systems Paradigms / M. Kryszkiewicz et al. (eds.); Lecture Notes in Artificial Intelligence. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag. — 2007. — **4585.** — P. 101–112.

6. The puzzle of granular computing / B. Apolloni et al. (eds.) // Series: Studies in Computational Intelligence. — Berlin, Heidelberg: Spinger-Verlag. — 2008. — **138.** — 496 p.

7. Lin T.Y. Granular computing I: The concept of granulation and its formal model // Intern. J. Granular Comput. Rough Sets and Intelligent Systems. — 2009. — **1**, N 1. — P. 21–42.

8. Kreinovich V. Interval computation as an important part of granular computing: an introduction // Handbook of Granular Comput. / W. Pedrycz, A. Skowron, V. Kreinovich (eds.). — Chichester: John Wiley and Sons Ltd., 2008. — P. 3–32.

9. Granular computing: at the junction of rough sets and fuzzy sets / R. Bello, R. Falcón, W. Pedrycz, J. Kacprzyk (eds.) // Series: Studies in Fuzziness and Soft Comput. — Berlin; Heidelberg: Spinger-Verlag, 2008. — 335 p.

10. Stepaniuk J. Rough-granular computing in knowledge discovery and data mining / J. Stepaniuk // Studies in Computational Intelligence. — Berlin; Heidelberg: Spinger-Verlag, 2008. — **152.** — 158 p.

11. Zadeh L.A. Some reflections on soft computing, granular computing and their roles in the conception, design and utilization of information/intelligent systems // Soft Computing. — 1998. — **2**, N 1. — P. 23–25.

12. Pedrycz W. Granular computing in multi-agent systems // Rough Sets and Knowledge Technology / G. Wang et al. (eds.); Lecture Notes in Artificial Intelligence. — Berlin; Heidelberg: Spinger-Verlag, 2008. — **5009**. — P. 3–17.

13. Polkowski L. Granulation of knowledge in decision systems: The approach based on rough inclusions. The method and its applications // Rough Sets and Intelligent Systems Paradigms / M. Kryszkiewicz et al. (eds.); Lecture Notes in Artificial Intelligence. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. — **4585**. — P. 69–79.

14. Pedrycz W. Knowledge-based clustering: from data to information granules. — N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 2005. — 316 p.

15. Машталир В.П., Шляхов В.В. Свойства мультиалгебраических систем в задачах компаративного распознавания // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 6. — С. 12–32.

16. Герасин С.Н., Шляхов В.В. О внешней и внутренней согласованности произвольных *n*-арных отношений // Доп. НАН України. — 2006. — № 1. — С. 77–82.

17. Шляхов В.В., Яковлев С.Я. Об изоморфизме мультиалгебраических систем // Там же. — 2002. — № 9. — С. 67–70.

18. Kagramanyan A., Mashtalir V., Shlyakhov V. Multialgebraic systems in information granulation // Intern. J. “Information Theories and Applications”. — 2008. — **15**, N 1. — P. 55–63.

19. Мальцев А.И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с.

*Поступила 22.02.2013*