УДК 519.856

В.И. НОРКИН, А.И. КИБЗУН, А.В. НАУМОВ

СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧ ДВУХЭТАПНОЙ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ДИСКРЕТНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СЛУЧАЙНЫХ ДАННЫХ К ЗАДАЧАМ ЧАСТИЧНО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

Аннотация. Рассмотрены модели двухэтапного стохастического программирования с квантильным критерием и модели с вероятностным ограничением на случайные значения целевой функции второго этапа. Такие модели позволяют формализовать требования к надежности и безопасности оптимизируемой системы, а также оптимизировать ее функционирование в экстремальных условиях. Предложен способ эквивалентного преобразования моделей при дискретном распределении случайных параметров к задачам частично целочисленного программирования. Число дополнительных целочисленных (булевых) переменных в этой задаче равно числу возможных значений вектора случайных параметров. Полученные смешанные задачи решаются с помощью мощных стандартных компьютерных программ дискретной оптимизации. Приведены результаты численного эксперимента на задаче небольшой размерности.

Ключевые слова: стохастическое программирование, двухэтапные задачи, квантильное программирование, вероятностные ограничения, детерминированный эквивалент, частично целочисленные задачи оптимизации, дискретное программирование.

ВВЕДЕНИЕ

Традиционно в задачах стохастического программирования оптимизируется среднее значение показателя качества управления, зависящего от случайного параметра [1–6]. Наряду со средним значением можно использовать иные показатели качества управления, например медиану или другие квантили распределения [7–9]. Такие критерии качества применяет, в частности, в задачах управления летательными аппаратами [7]. Однако задача оптимизации функции квантили более сложная, чем оптимизация среднего значения, так как функция квантили может быть невыпуклой и разрывной. Для приближенной оптимизации квантили часто используют оптимизацию ее верхней оценки, полученную доверительным методом [7–10] или с помощью CVaR (conditional value at risk) функций [11]. Другие методы приближенной и глобальной оптимизации функции квантили (применительно к задачам портфельной оптимизации) приведены в [12].

В работах [13, 14] некоторые задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением случайных параметров сведены к задачам частично целочисленного программирования. Наиболее общие результаты в этом направлении получены в [15, 16]. Ранее прием сведения задач с вероятностными ограничениями, тесно связанных с задачей оптимизации функции квантили, к задачам частично целочисленного программирования применялся в работах [17–22].

Двухэтапные модели стохастического программирования с целевой функцией в виде математического ожидания являются одними из основных в стохастическом программировании [1–6]. Двухэтапная модель стохастического программирования описывает ситуации принятия решений в условиях неопределенности, когда на первом этапе в условиях стохастической неопределенности принимается детерминированное решение в расчете на то, что при прояснении ситуации на втором этапе будет принято дополнительное оптимальное корректирующее решение. Решение первого этапа оптимизируется по сумме математического ожидания целевых функций первого и второго этапов.

[1] Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины в рамках совместного российско-украинского проекта Ф40.1/016 (2011-2012) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11-07-90407-Укр-ф-а, 11-07-00315-а), а также частично поддержана норвежско-украинским грантом CPEALA-2012/10052.

Двухэтапные модели стохастического программирования являются частным случаем двухуровневых кооперативных моделей принятия оптимальных решений, в которых целевая функция верхнего уровня аддитивно включает среднее значение целевой функции нижнего уровня.

Применительно к оптимизации энергетических систем задачи двухэтапного стохастического программирования можно интерпретировать следующим образом. Переменные первого этапа могут описывать функционирование длительно действующих мощных энергетических установок, запуск и остановка которых весьма затратны. Переменные второго этапа могут описывать производство энергии мобильными установками, запуск и остановка которых относительно дешевы, при этом они сравнительно легко адаптируются к пиковым нагрузкам. В качестве целевой функции задачи (при постоянных ценах на энергию) принимается средняя стоимость производства энергии на всех видах установок. Целевая функция и переменные второго этапа описывают количество произведенной энергии на мобильных установках. В постановку задачи можно включить ограничения снизу на вероятность обеспечения пиковых потребностей в энергии. Для построения стохастической модели энергетической системы необходимы вероятностные сценарии потребности в энергии.

Вместо функции математического ожидания в задаче стохастического программирования иногда целесообразно использовать функцию квантили случайного оптимального значения критериальной функции задачи второго этапа. Это позволяет оптимизировать функционирование стохастической системы в экстремальных условиях. В работах [10, 23–26] двухэтапные задачи стохастического программирования с квантильной целевой функцией решались с помощью доверительного метода [8, 9].

В настоящей статье задачи квантильного двухэтапного стохастического программирования, а также задачи двухэтапного стохастического программирования с вероятностными ограничениями при дискретном распределении случайных данных сводятся к задачам частично целочисленного программирования. Таким образом, результаты из работ [15, 16] распространяются на общие двухэтапные задачи квантильной и вероятностной оптимизации с дискретным распределением. Для решения возникающих при этом частично целочисленных задач используется современный стандартный пакет IBM ILOG CPLEX [27] решения частично целочисленных задач линейного программирования.

Преимущества данного подхода к решению вероятностных и квантильных задач стохастического программирования заключаются в следующем:

— функции вероятности и квантили позволяют формализовать требования к надежности и безопасности оптимизируемой системы, а также оптимизировать ее функционирование в экстремальных условиях;

— допускается наличие как непрерывных, так и дискретных переменных в первоначальной формулировке задачи;

— проблема невыпуклости и разрывности вероятностных и квантильных функций задачи перекладывается на методы дискретной оптимизации;

— в случае непрерывного распределения случайных данных его можно аппроксимировать дискретным, например эмпирическим, распределением с достаточно большим множеством реализаций;

— полученные эквивалентные задачи частично целочисленного программирования можно решать мощными современными программными средствами дискретной оптимизации даже при весьма большом количестве переменных задачи и возможных сценариев для случайных данных.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $(\Omega, \Sigma, \mathrm{P})$ — некоторое вероятностное пространство, $X: \Omega \to \mathrm{X}(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^m$ — векторная случайная величина со значениями в множестве $\mathrm{X}(\Omega)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество допустимых стратегий оптимизации, $\Phi: U \times \mathrm{X}(\Omega) \to \mathbb{R}^1$ и $Q: U \times \mathrm{X}(\Omega) \to \mathbb{R}^1$ — борелевские по $x \in \mathrm{X}(\Omega)$ функции для всех $u \in U$. Определим функции математического ожидания

$$f_1(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}[\Phi(u, X)] = \int_{\Omega} \Phi(u, X(\omega)) d\mathrm{P}(\omega),$$

вероятности

$$P_{\varphi}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{P}\{\Phi(u, X) \le \varphi, Q(u, X) \le 0\} = \mathrm{P}\{\omega \in \Omega : \Phi(u, X(\omega)) \le \varphi, Q(u, X(\omega)) \le 0\}$$

и квантили

$$\varphi_{\alpha}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{\varphi \in \mathbb{R}^1 : P_{\varphi}(u) \ge \alpha\} =$$
$$= \min \{\varphi \in \mathbb{R}^1 : \mathrm{P}\{\Phi(u, X) \le \varphi, Q(u, X) \le 0\} \ge \alpha\}, \tag{1}$$

где α — параметр, $0 < \alpha < P^*$, $\mathrm{P}\{\cdot\}$ — вероятность события в скобках (по определению $\mathrm{P}\{\varnothing\} = 0$), E — знак математического ожидания,

$$P^* \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{u \in U} \mathrm{P}\{\omega \in \Omega : Q(u, X(\omega)) \le 0\}.$$

Заметим, что функция $P_{\varphi}(\cdot)$ определена на всем множестве U. Свойства функций вероятности детально изучены в [28, 2, 29, 8, 9], а квантили — в [30, 8, 9]. Так если $\Phi(u, x), Q(u, x)$ полунепрерывны снизу по u при каждом x, то функция $P_{\varphi}(u)$ полунепрерывна сверху по совокупности переменных (u, φ) [31]. Кроме того, функция $P_{\varphi}(u)$ монотонна (не убывает) по φ и непрерывна справа, поэтому инфинум в определении $\varphi_{\alpha}(u)$ достигается. Функция квантили является специальным случаем маргинальной функции (функции минимума), поэтому при сделанных предположениях она полунепрерывна снизу по (u, α) [32, гл. 1, разд. 1, предложение 21].

В силу непрерывности вероятностной меры имеет место

$$\lim_{\varphi \to +\infty} \mathrm{P}\{\Phi(u, X) \le \varphi, Q(u, X) \le 0\} = \mathrm{P}\{Q(u, X) \le 0\}, \tag{2}$$
$$\lim_{\varphi \to -\infty} \mathrm{P}\{\Phi(u, X) \le \varphi, Q(u, X) \le 0\} = 0. \tag{3}$$

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ КВАНТИЛИ

Простейшая задача (одноэтапного) стохастического программирования имеет вид [1–6]

$$f_1(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}[\Phi(u, X)] \to \inf_{u \in U},$$

где минимизируется среднее значение случайного показателя $\Phi(u, X)$ на множестве U значений детерминированного параметра u. Вместо среднего значения в качестве целевой функции можно использовать медиану распределения случайной величины $\Phi(u, X)$ или квантиль уровня α, $0 < \alpha < P^*$. Задача минимизации функции квантили имеет вид [33, 30, 8]

$$\varphi_{\alpha}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \min \{\varphi \in \mathbb{R}^1 : \mathrm{P}\{\Phi(u, X) \le \varphi, Q(u, X) \le 0\} \ge \alpha\} \to \inf_{u \in U}. \tag{4}$$

Известно, что она эквивалентна следующей задаче [8, sec. 4.2]:

$$\begin{gathered} \varphi \to \inf_{\varphi \in \mathbb{R}^1,\, u \in U}, \\ P_{\varphi}(u) = \mathrm{P}\{\Phi(u, X) - \varphi \le 0, Q(u, X) \le 0\} \ge \alpha. \end{gathered} \tag{5}$$

В дальнейшем рассмотрим и другие эквивалентные оптимизационные задачи, при этом эквивалентность будет пониматься в следующем смысле. Рассмотрим общую задачу математического программирования.

Определение 1. Под задачей математического программирования будем понимать задачу минимизации целевой функции $\Phi: U \to \mathbb{R}^1$, определенной на некотором допустимом множестве U точек (стратегий), в формальной записи

$$\Phi(u) \to \inf_{u \in U}. \tag{6}$$

Элементы $u \in U$ назовем допустимыми решениями задачи. Множество U может быть пустым, тогда будем считать, что задача не имеет допустимых решений.

Определение 2. Нижнюю грань φ^* (конечную или бесконечную) $\Phi(u)$ на U, $\varphi^* = \inf_{u \in U} \Phi(u)$, назовем оптимальным значением целевой функции задачи (6). Если $\varphi^* > -\infty$ и существует допустимая точка $u^* \in U$ такая, что $\varphi^* = \Phi(u^*)$, то полагаем, что оптимальное значение задачи (6) достигается, а точку u^* назовем оптимальным решением задачи. Тогда запишем $\varphi^* = \min_{u \in U} \Phi(u)$. В противном случае, т.е. если $\varphi^* = -\infty$ или не существует точки $u^* \in U$ такой, что $\varphi^* = \Phi(u^*)$, будем считать, что оптимальное значение задачи не достигается.

Определение 3. Две задачи оптимизации вида (6) эквивалентны, если выполнены следующие условия:

1) либо обе задачи имеют допустимые решения (с конечными значениями целевых функций), либо обе не имеют таких решений;

2) если эти задачи имеют допустимые решения, то оптимальные значения их целевых функций (конечные или бесконечные) совпадают;

3) если оптимальные значения их целевых функций конечны, то эти значения в обеих задачах либо достигаются, либо не достигаются;

4) если оптимальные значения достигаются, то по оптимальному решению одной задачи с помощью явно указанного алгоритма за конечное число шагов восстанавливается оптимальное решение другой.

Заметим, что если оптимальное решение задачи u^* существует, то это означает, что оптимальное значение $\varphi^* = \Phi(u^*)$ критериальной функции достигается.

Отметим, что введенное отношение эквивалентности оптимизационных задач транзитивно.

Доказательство эквивалентности оптимизационных задач основано на установлении специального соответствия между множествами допустимых стратегий задач, а именно, для каждой допустимой стратегии одной задачи указывается допустимая стратегия другой с таким же или меньшим значением целевой функции.

Лемма 1. Две оптимизационные задачи

$$\Phi_1(u) \to \inf_{u \in U_1}, \quad \Phi_2(u) \to \inf_{u \in U_2} \tag{7}$$

эквивалентны в смысле определения 3, если известны алгоритмы (отображения) $A_1: U_1 \to U_2$ и $A_2: U_2 \to U_1$, которые для каждой допустимой стратегии одной задачи указывают допустимую стратегию другой задачи с таким же или меньшим значением целевой функции, т.е. для любых $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$ выполнено $\Phi_2(A_1(u_1)) \le \Phi_1(u_1)$, $\Phi_1(A_2(u_2)) \le \Phi_2(u_2)$.

При этом если u_1^* — оптимальное решение первой задачи, то $A_1(u_1^*)$ — оптимальное решение второй задачи и $\Phi_1(u_1^*) = \Phi_2(A_1(u_1^*))$. Наоборот, если u_2^* — оптимальное решение второй задачи, то $A_2(u_2^*)$ — оптимальное решение первой задачи и $\Phi_2(u_2^*) = \Phi_1(A_2(u_2^*))$.

Доказательство леммы приведено в [15]. Подобный способ доказательства эквивалентности задач применялся, например, в [34, с. 131; 35, 13, 22, 14]. Таким образом, для доказательства эквивалентности, вообще говоря, нет необходимости предполагать существование решения исходной задачи; его существование или несуществование возможно установить в ходе решения эквивалентной задачи. Если известно, что одна из задач имеет оптимальное решение, то достаточные условия эквивалентности оптимизационных задач из леммы 1 можно несколько ослабить.

Лемма 2. Предположим, что одна из задач (7) (первая) имеет оптимальное решение $u_1^* \in U_1$ и существует допустимая точка $u_2' \in U_2$ другой задачи такая, что $\Phi_2(u_2') \le \Phi_1(u_1^*)$. Предположим также, что известен алгоритм (отображение) $A_2 : U_2 \to U_1$, который для каждой допустимой точки второй задачи указывает допустимую точку первой задачи с таким же или меньшим значением целевой функции, т.е. для любого $u_2 \in U_2$ выполнено $\Phi_1(A_2(u_2)) \le \Phi_2(u_2)$. Тогда и вторая задача имеет оптимальные решения, причем $u_2' \in U_2$ — одно из таких оптимальных решений, а $A_2(u_2')$ — оптимальное решение первой задачи, и оптимальные значения обеих задач совпадают. Таким образом, рассматриваемые оптимизационные задачи эквивалентны.

Доказательство. В силу оптимальности точки u_1^* имеем

$$\Phi_1(u_1^*) \ge \Phi_2(u_2') \ge \Phi_1(A_2(u_2)) \ge \Phi_1(u_1^*),$$

т.е. $\Phi_1(u_1^*) = \Phi_1(A_2(u_2')) = \Phi_2(u_2')$ и, таким образом, $A_2(u_2')$ — оптимальное решение первой задачи. Покажем, что u_2' является оптимальным решением второй задачи. Предположим противное. Тогда существует другая допустимая точка $u_2'' \in U_2$ с меньшим значением целевой функции, $\Phi_2(u_2'') < \Phi_2(u_2')$. Но по предположению существует допустимая точка первой задачи $A_2(u_2'') \in U_1$ такая, что $\Phi_1(A_2(u_2'')) \le \Phi_2(u_2'') < \Phi_2(u_2') \le \Phi_1(u_1^*)$, что противоречит оптимальности точки u_1^*. Лемма доказана.

Предположение 1. Случайная величина X принимает конечное число значений, т.е. $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_K\}$, с вероятностями $p_1 > 0, p_2 > 0, \ldots, p_K > 0$, $\sum_{k=1}^{K} p_k = 1$.

Предположение 2. Заданы функции $\mu_1(u, x)$ и $\mu_2(u, x)$ такие, что для любых $u \in U$, $x \in \mathrm{X}(\Omega)$ выполнено

$$-\infty < \mu_1(u, x) \le \inf_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} \{\Phi(u, x) : Q(u, x) \le 0\}, \tag{8}$$

$$-\infty < \mu_2(u, x) \le \max\left\{0, \inf_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} Q(u, x)\right\}. \tag{9}$$

Условие (9) означает, что либо $\mu_2(u, x) \le 0$, либо $\mu_2(u, x) \le \inf_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} Q(u, x)$.

Рассмотрим задачу частично целочисленного программирования

$$\begin{cases} \varphi \to \inf\limits_{\varphi \in \mathbb{R}^1,\, u \in U,\, w_1, \ldots, w_K}, \\ \Phi(u, x_k) - \varphi \le (\Phi(u, x_k) - \mu_1(u, x_k)) w_k, \ \ k = \overline{1, K}, \\ Q(u, x_k) \le (Q(u, x_k) - \mu_2(u, x_k)) w_k, \ \ k = \overline{1, K}, \\ \sum\limits_{k=1}^{K} w_k p_k \le 1 - \alpha, \\ w_k \in \{0, 1\}, \ \ k = \overline{1, K}. \end{cases} \tag{10}$$

В работе [15] получен следующий результат о возможности сведения задачи квантильной оптимизации (4) к задачам частично целочисленного программирования.

Теорема 1. Если выполнены предположения 1 и 2, то частично целочисленная задача оптимизации (10) эквивалентна в смысле определения 3 каждой из задач (4), (5). При этом если $(\varphi^*, u^*, w_1^*, \ldots, w_K^*)$ — оптимальное решение задачи (10), то u^*, (φ^*, u^*) — оптимальные решения соответственно задач (4), (5).

Замечание 1. В работе [15] вместо (8) использовалось более сильное условие: $-\infty < \mu_1(u,x) \le \inf\limits_{x\in \mathrm{X}(\Omega)} \Phi(u,x)$ для любого $u\in U$. Однако доказательство и результат теоремы 1 сохраняют силу при более слабом условии (8).

Замечание 2. Задача (10) в общем случае является задачей нелинейного частично целочисленного программирования, даже если функции Φ, Q линейны по u. Однако в силу определенной свободы в выборе функций μ_1, μ_2 их часто можно выбрать так, что задача (10) оказывается выпуклой (или даже линейной) частично целочисленной, для решения которой можно применять методы сокращения перебора, реализованные в пакетах программ частично целочисленного программирования, например IBM ILOG CPLEX [27]. В общем случае решение задачи (10) сводится к перебору вариантов-подмножеств $I_1 \subseteq \{1,\ldots,K\}$ таких, что $\sum_{k\in I_1} p_k \le 1-\alpha$, решению соответствующих подзадач математического программирования вида

$$\begin{cases} \varphi \to \inf\limits_{\varphi\in\mathbb{R}^1,\, u\in U}, \\ \Phi(u,x_k) \le \varphi,\ \ k\in\{1,2,\ldots,K\}\setminus I_1, \\ \mu_1(u,x_k)\le\varphi,\ \ k\in I_1, \\ Q(u,x_k)\le 0,\ \ k\in\{1,2,\ldots,K\}\setminus I_1, \\ \mu_2(u,x_k)\le 0,\ \ k\in I_1, \end{cases} \tag{11}$$

и выбору варианта с минимальным значением целевой функции. Если множество U выпукло и функции Φ, Q, μ_1, μ_2 выпуклы по $u\in U$, то (11) — задача выпуклого программирования. Если, кроме того, Φ, Q, μ_1, μ_2 кусочно-линейны по u, а U задается линейными ограничениями, то (11) сводится к задаче линейного программирования.

Замечание 3. Результат теоремы 1 можно обобщить на задачи квантильной оптимизации с функциями дискретного максимума, а именно, пусть в задачах (4), (5) функции Φ, Q имеют вид

$$\Phi(u,x)=\max_{i\in I}\Phi_i(u,x),\ \ Q(u,x)=\max_{j\in J}Q_j(u,x), \tag{12}$$

где I, J — конечные множества индексов. Предположим, что существуют функции $\mu_{1i}(u,x)$, $\mu_{2j}(u,x)$, удовлетворяющие при каждом $u\in U, x\in\mathrm{X}(\Omega)$ и $i\in I$, $j\in J$ условиям

$$-\infty<\mu_{1i}(u,x)\le \inf_{x\in\mathrm{X}(\Omega)}\Phi_i(u,x), \tag{13}$$

$$-\infty<\mu_{2j}(u,x)\le \max\left\{0, \inf_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} Q_j(u,x)\right\}. \tag{14}$$

Составим следующую задачу частично целочисленного программирования:

$$\begin{cases} \varphi \to \inf\limits_{\varphi\in\mathbb{R}^1,\, u\in U,\, w_1,\ldots,w_K}, \\ \Phi_i(u,x_k)-\varphi \le (\Phi_i(u,x_k)-\mu_{1i}(u,x_k))w_k,\ \ i\in I,\ \ k=\overline{1,K}, \\ Q_j(u,x_k)\le (Q_j(u,x_k)-\mu_{2j}(u,x_k))w_k,\ j\in J,\ \ k=\overline{1,K}, \\ \sum\limits_{k=1}^{K} w_k p_k \le 1-\alpha, \\ w_k\in\{0,1\},\ \ k=\overline{1,K}. \end{cases} \tag{15}$$

Следствие 1. Задачи (4), (5) при условиях (12)–(14) эквивалентны задаче частично целочисленного программирования (15).

Замечание 4. Хотя задачи (10), (15) не линейны по (u, w_k), в силу достаточной свободы в выборе функций $\mu_1, \mu_2, \mu_{1i}, \mu_{2j}$ последние можно подобрать так, что коэффициенты при w_k не будут зависеть от u и, таким образом, указанные задачи станут линейными по w_k. Линейность по w_k позволяет использовать непрерывную релаксацию задач (10), (15) для получения оценок снизу оптимальных значений этих задач. Если при этом функции Φ, Q являются функциями максимума из линейных функций и множество U полиэдрально, то приходим к задаче (15) частично целочисленного линейного программирования, которую можно решить стандартными программными пакетами оптимизации, например IBM ILOG CPLEX [27]. Следующие примеры иллюстрируют эти возможности.

Пример 1. Сделаем предположения об области изменений функций задачи. Пусть существуют (известны) константа μ и функции $M(x)$ и $N(x)$ такие, что функции Φ, Q из (4), (10) удовлетворяют следующим условиям:

2.1′. $-\infty < \mu \le \inf\limits_{u \in U,\, x \in \mathrm{X}(\Omega)} \{\Phi(u, x) : Q(u, x) \le 0\}$;

2.2′. $\sup\limits_{u \in U} \Phi(u, x) \le M(x) < \infty$, $\sup\limits_{u \in U} Q(u, x) \le N(x) < \infty$ выполнено для всех $x \in \mathrm{X}(\Omega)$.

Выберем функции

$$\mu_1(u, x) = \Phi(u, x) - M(x) + \mu, \quad \mu_2(u, x) = Q(u, x) - N(x). \tag{16}$$

Они удовлетворяют предположению 2. Действительно, для любого $u \in U$ в силу условий 2.1′ и 2.2′ выполнено

$$\mu_1(u, x) \le \mu \le \inf_{u \in U,\, x \in \mathrm{X}(\Omega)} \{\Phi(u, x) : Q(u, x) \le 0\} \le \inf_{x \in X(\Omega)} \{\Phi(u, x) : Q(u, x) \le 0\},$$
$$\mu_2(u, x) = Q(u, x) - N(x) \le 0.$$

Функции $M(x)$, $N(x)$ и число μ заведомо существуют, если функции $\Phi(u, x)$, $Q(u, x)$ непрерывны по u при каждом $x \in \mathrm{X}(\Omega)$ и множество U компактно.

Подставляя (16) в (10), приходим к следующей линейной по булевым переменным задаче частично целочисленного программирования, эквивалентной при предположениях 1, 2.1′ и 2.2′ исходным задачам (4), (5):

$$\begin{cases} \varphi \to \inf\limits_{\varphi \in \mathbb{R}^1,\, u \in U,\, w_1 \in \{0, 1\}, \ldots, w_K \in \{0, 1\}}, \\ \sum\limits_{k=1}^{K} p_k w_k \le 1 - \alpha, \\ \Phi(u, x_k) - \varphi \le (M(x_k) - \mu) w_k, \ k = 1, 2, \ldots, K, \\ Q(u, x_k) \le N(x_k) w_k, \ k = 1, 2, \ldots, K. \end{cases} \tag{17}$$

Пример 2. Рассмотрим частный случай задачи (4), когда функции $\Phi(u, x)$ и $Q(u, x)$ сепарабельны и имеют вид

$$\Phi(u, x) = \Phi_1(u) + \Phi_2(x), \quad Q(u, x) = Q_1(u) + Q_2(x).$$

Предположим, что существует константа μ_3 такая, что

$$-\infty < \mu_3 \le \min\left\{ \inf_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} \Phi_2(x), \inf_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} Q_2(x) \right\}.$$

Выберем

$$\mu_1(u, x) = \Phi_1(u) + \mu_3, \quad \mu_1(u, x) = Q_1(u) + \mu_3. \tag{18}$$

Эти функции удовлетворяют предположениям 2. Действительно,

$$\mu_1(u, x) = \Phi_1(u) + \mu_3 \le \Phi_1(u) + \inf_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} \Phi_2(x) \le$$
$$\le \inf_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} \{\Phi_1(u) + \Phi_2(x)\} \le \inf_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} \{\Phi(u, x) : Q(u, x) \le 0\}.$$

Аналогично проверяется второе условие предположения 2. Подставляя (18) в (10), приходим еще к одной задаче частично целочисленного программирования, эквивалентной при сделанных предположениях задаче (4):

$$\begin{cases} \varphi \to \inf\limits_{\varphi \in \mathbb{R}^1,\, u \in U,\, w_1, \ldots, w_K}, \\ \Phi_1(u) + \Phi_2(x_k) - w_k(\Phi_2(x_k) - \mu_3) \le \varphi, \ k = \overline{1, K}, \\ Q_1(u) + Q_2(x_k) - w_k(Q_2(x_k) - \mu_3) \le 0, \ k = \overline{1, K}, \\ \sum\limits_{k=1}^{K} w_k p_k \le 1 - \alpha, \\ w_k \in \{0, 1\}, \ k = \overline{1, K}. \end{cases} \tag{19}$$

Заметим, что если функции $\Phi_1(u)$ и $Q_1(u)$ выпуклы по $u \in U$, то задача (19) является задачей смешанного выпуклого программирования.

Пример 3. В работе [14] рассмотрен еще один частный случай задачи (4), когда функции $\Phi(u, x)$ и $Q(u, x)$ являются кусочно-линейными выпуклыми функциями максимума вида

$$\begin{aligned} \Phi(u, x) &= \max_{i=1, \ldots, k_1} (A_{1i} u + B_{1i} x + b_{1i}), \\ Q(u, x) &= \max_{j=1, \ldots, k_2} (A_{2j} u + B_{2j} x + b_{2j}), \end{aligned} \tag{20}$$

где $u \in [0, \bar{u}]^n$, $x \in \mathbb{R}^m$, $A_{1i}, A_{2j}, B_{1i}, B_{2j}$ — строки матриц A_1, A_2, B_1, B_2 соответственно, b_{1i}, b_{2j} — компоненты векторов b_1, b_2. Пусть μ_3 определяется следующим образом:

$$\mu_3 \le \min \left\{ \min_{i=\overline{1, k_1},\ k=\overline{1, K}} B_{1i} x_k, \ \min_{j=\overline{1, k_2},\, k=\overline{1, K}} B_{2j} x_k \right\}.$$

В указанной работе доказано, что в этом случае при многогранном выпуклом множестве U задача (5) эквивалентна задаче частично целочисленного линейного программирования

$$\begin{cases} \varphi \to \inf\limits_{\varphi \in \mathbb{R}^1,\, u \in U,\, w_1, \ldots, w_K}, \\ A_{1i} u + \mu_3 + w_k(B_{1i} x_k - \mu_3) + b_{1i} \le \varphi, \ i = \overline{1, k_1}, \ k = \overline{1, K}, \\ A_{2j} u + \mu_3 + w_k(B_{2j} x_k - \mu_3) + b_{2j} \le 0, \ j = \overline{1, k_2}, \ k = \overline{1, K}, \\ \sum\limits_{k=1}^{K} p_k w_k \ge \alpha, \\ w_k \in \{0, 1\}, \ k = \overline{1, K}. \end{cases} \tag{21}$$

Данная задача является частным случаем задачи (15).

Замечание 5. Для проверки корректности постановки задач (4), (5) в силу (2) необходимо найти

$$P^* = \sup_{u \in U} \mathrm{P}\{Q(u, X) \le 0\}. \tag{22}$$

Задача максимизации вероятности (22) в предположении (9) сводится к следующей задаче частично целочисленного программирования [15, 22, 14]:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{K} p_k w_k \to \sup_{u \in U,\, w_1 \in \{0, 1\}, \ldots, w_K \in \{0, 1\}}, \\ &Q(u, x_k) \le (Q(u, x_k) - \mu_2(u, x_k)) w_k, \ k = 1, \ldots, K. \end{aligned} \tag{23}$$

ЗАДАЧИ ДВУХЭТАПНОГО КВАНТИЛЬНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Двухэтапная задача стохастического программирования с критерием в форме математического ожидания имеет следующий вид [1, Ch. 12; 3, sec. 3.4; 4, Ch. 2; 5, гл. IV, § 3; 6, гл. 6]:

$$f_1(u) + \mathrm{E}[\Phi(u, X)] \to \min_{u \in U},$$

где

$$\Phi(u, x) = \begin{cases} f_2^*(u, x) = \inf\limits_{v \in W(u, x)} f_2(u, v, x), & W(u, x) \neq \varnothing, \\ +\infty, & W(u, x) = \varnothing, \end{cases} \tag{24}$$

$$W(u, x) = \{v \in V(x) : Q_2(u, v, x) \le 0\},$$

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество допустимых стратегий первого этапа; $u \in U$ — детерминированная стратегия первого этапа; $f_1(u)$ — целевая функция первого этапа; X — случайный параметр, принимающий (в данной статье) конечное множество значений $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_K\}$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_K$ (предположение 1); $V(x) \subset \mathbb{R}^m$ — множество допустимых стратегий второго этапа при $X = x$; $v \in V(x)$ — стратегия второго этапа (коррекция); $f_2(u, v, x)$ — целевая функция второго этапа; $Q_2(u, v, x)$ — функция в ограничениях второго этапа; E — знак математического ожидания.

Отметим, что множество допустимых стратегий в двухэтапной задаче может быть у́же, чем U, поскольку оно включает неявное ограничение $\mathrm{E}[\Phi(u, X)] < +\infty$. Неинтегрируемость величины $\Phi(u, X)$ может возникать как в силу неинтегрируемости случайных параметров задачи, так и в силу возможных бесконечных значений $\Phi(u, X)$.

Вместо среднего $\mathrm{E}[\Phi(u, X)]$ в двухэтапной задаче возможно использование медианы или квантили уровня α случайной величины $\Phi(u, X)$ [10, 23–25].

Определим функции вероятности и квантили:

$$P_\varphi(u) = \mathrm{P}\{\Phi(u, X) \le \varphi\}, \; \varphi_\alpha(u) = \min\nolimits_\varphi \{\varphi : P_\varphi(u) \ge \alpha\}, \; 0 < \alpha < 1.$$

Двухэтапная задача квантильной оптимизации имеет вид

$$\{f_1(u) + \varphi_\alpha(u)\} \to \min_{u \in U}. \tag{25}$$

Она эквивалентна следующей задаче:

$$f_1(u) + \varphi \to \min_{u \in U, \, \varphi \in \mathbb{R}^1}, \qquad \mathrm{P}\{\Phi(u, X) \le \varphi\} \ge \alpha. \tag{26}$$

Задача (26) с фиксированным параметром φ, например $\varphi = 0$, и $\Phi(u, x)$ из (24) имеет самостоятельное значение и называется задачей двухэтапного стохастического программирования с вероятностным ограничением (на случайные значения целевой функции второго этапа).

Лемма 3. Задачи (25) и (26) эквивалентны.

Доказательство. Пусть u' — допустимое решение задачи (25), тогда $\varphi' = \varphi_\alpha(u')$ конечно. В силу свойств квантили

$$\mathrm{P}\{\Phi(u', X) \le \varphi'\} = \mathrm{P}\{\Phi(u', X) \le \varphi_\alpha(u')\} \ge \alpha.$$

Таким образом, (φ', u') — допустимое решение задачи (26) с тем же самым значением $f_1(u') + \varphi_\alpha(u')$ целевой функции.

Обратно, пусть (φ', u') — допустимое решение задачи (26), т.е. $u' \in U$, $\mathrm{P}\{\Phi(u', X) \le \varphi'\} \ge \alpha > 0$ и $-\infty < f_1(u') + \varphi' < +\infty$. В силу непрерывности вероятностной меры $\lim\limits_{\varphi \to -\infty} \mathrm{P}\{\Phi(u', X) \le \varphi\} = 0$. Поэтому $-\infty < \varphi_\alpha(u') \le \varphi'$ и, следовательно, для значений целевых функций задач (26), (25) имеем неравенство

$f' = f_1(u') + \varphi' \geq f_1(u') + \varphi_\alpha(u') > -\infty$, т.е. u' — допустимое решение для задачи (25). Таким образом, в силу леммы 1 задачи (25) и (26) эквивалентны. Лемма доказана.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{gathered} f_1(u) + \varphi \to \min_{u \in U,\, \varphi \in \mathbb{R}^1,\, v_1 \in V(x_1), \ldots, v_K \in V(x_K)}, \\ \sum_{k=1}^{K} p_k I\{ f_2(u, v_k, x_k) \leq \varphi,\; Q_2(u, v_k, x_k) \leq 0 \} \geq \alpha, \end{gathered} \tag{27}$$

где $I\{\cdot\}$ — индикатор условий в фигурных скобках, равный единице, если все условия в скобках выполнены, и равный нулю в противном случае.

Предположение 3 (о существовании решения задачи второго этапа). Если множество $W(u, x) = \{ v \in V(x) : Q_2(u, v, x) \leq 0 \}$ не пусто, то inf в (24) достигается и, таким образом, существует $v(u, x) \in W(u, x)$ такое, что $\Phi(u, x) = f_2(u, v(u, x), x)$.

Это предположение выполнено, например, если для любых $u \in U$, $x \in X(\Omega)$ функция $Q_2(u, v, x)$ полунепрерывна снизу по v на компактном множестве $V(x)$.

Лемма 4. При предположениях 1, 3 задачи (26) и (27) эквивалентны.

Доказательство. Пусть (φ', u') — допустимое решение задачи (26), т.е. $u' \in U$, $\mathrm{P}\{\Phi(u', X) \leq \varphi'\} \geq \alpha$, где функция $\Phi(u, x)$ определена в (24). Обозначим I'_α множество индексов k таких, что $\Phi(u', x_k) \leq \varphi'$. Очевидно, что $\sum_{k \in I'_\alpha} p_k \geq \alpha$. Для $k \in I'_\alpha$ множество $W(u', x_k)$ не пусто и в силу предположения 3 существуют $v'_k \in V(x_k)$ такие, что $f_2(u', v'_k, x_k) = \Phi(u', x_k) \leq \varphi'$ и $Q_2(u', v'_k, x_k) \leq 0$. Для $k \notin I'_\alpha$ выберем произвольные $v'_k \in V(x_k)$. Набор $(\varphi', u', v'_1, \ldots, v'_K)$ допустим для задачи (27) с тем же значением $f' = f_1(u') + \varphi'$ целевой функции.

Обратно, пусть набор $(\varphi', u', \{v'_k\}_1^K)$ является допустимым для задачи (27). Покажем, что (φ', u') — допустимое решение для задачи (26). Обозначим с помощью I'_α множество индексов k таких, что $v'_k \in V(x_k)$, $f_2(u', v'_k, x_k) \leq \varphi'$ и $Q_2(u', v'_k, x_k) \leq 0$. Очевидно, что $\sum_{k \in I'_\alpha} p_k \geq \alpha$. Для $k \in I'_\alpha$ выполнено $\Phi(u', x_k) \leq$ $\leq f_2(u', v'_k, x_k) \leq \varphi'$, поэтому $\mathrm{P}\{\Phi(u', X) \leq \varphi'\} \geq \sum_{k \in I'_\alpha} p_k \geq \alpha$, и, таким образом, (f', φ', u') — допустимое решение для задачи (26) с тем же самым значением $f' = f_1(u') + \varphi'$ целевой функции. Следовательно, согласно лемме 1 задачи (26) и (27) эквивалентны. Лемма доказана.

В силу транзитивности отношения эквивалентности задачи (25)–(27) эквивалентны при предположениях 1, 3. Задача (27) — того же типа, что и (5), для которой возможность сведения к частично целочисленному эквиваленту (15) при предположениях 2 доказана в теореме 1. Сделаем дополнительные предположения относительно задачи (25) и, следовательно, (27).

Предположение 4. Известны функции $\mu_1(u, v, x)$ и $\mu_2(u, v, x)$ такие, что для любых $u \in U$, $x \in X(\Omega)$, $v \in V(x)$ выполнены следующие условия:

4.1. $-\infty < \mu_1(u, v, x) \leq \inf\limits_{x \in X(\Omega)} \inf\limits_{v \in V(x)} \{ f_2(u, v, x) : Q_2(u, v, x) \leq 0 \}$;

4.2. $-\infty < \mu_2(u, v, x) \leq \max \left\{ 0, \inf\limits_{x \in X(\Omega)} \inf\limits_{v \in V(x)} Q_2(u, v, x) \right\}$.

Несколько более слабым является следующее предположение, однако предполагающее существование решения у задачи (25).

Предположение 4′. Условия 4.1, 4.2 выполнены не для всех $u \in U$, а только для некоторого оптимального решения u^* задачи (25) и всех $x \in X(\Omega)$, $v \in V(x)$.

Обозначим $w_1, \ldots, w_K$ набор булевых переменных. Рассмотрим следующую задачу частично целочисленного программирования:

$$
\begin{cases}
f_1(u)+\varphi \to \min\limits_{u\in U,\,\varphi\in\mathbb{R}^1,\,v_1,\ldots,v_K;\,w_1,\ldots,w_K}, \\
\sum\limits_{k=1}^{K} p_k w_k \le 1-\alpha, \\
f_2(u,v_k,x_k)-\varphi \le (f_2(u,v_k,x_k)-\mu_1(u,v_k,x_k))w_k,\ \ k=1,2,\ldots,K, \\
Q_2(u,v_k,x_k) \le (Q_2(u,v_k,x_k)-\mu_2(u,v_k,x_k))w_k,\ \ k=1,2,\ldots,K, \\
v_k\in V(x_k),\ \ w_k\in\{0,1\},\ \ k=1,2,\ldots,K.
\end{cases}
\tag{28}
$$

Основной результат статьи представляет следующая теорема о возможности сведения задачи двухэтапной квантильной оптимизации (25) с дискретным распределением случайных данных к задаче частично целочисленного программирования (28).

Теорема 2. При условиях 1, 3, 4 задачи (25)–(28) эквивалентны в смысле определения 3. Если решение задачи (25) существует и выполнены предположения 1, 2, 4′, то задачи (25)–(28) также эквивалентны. Отсюда следует, что если $(\varphi^*,\,u^*,\,v_1^*,\ldots,v_K^*,\,w_1^*,\ldots,w_K^*)$ — оптимальное решение задачи (28), то u^* — оптимальное решение задачи (25), $(\varphi^*,\,u^*)$ — оптимальное решение задачи (26), а $(\varphi^*,\,u^*,\,v_1^*,\ldots,v_K^*)$ — оптимальное решение задачи (27).

Доказательство. Эквивалентность задач (25)–(27) доказана в леммах 3, 4. Докажем эквивалентность задач (27) и (28) с помощью леммы 1.

В предположениях 1, 3, 4 докажем первое утверждение теоремы. Пусть $(\varphi',\,u',\,v_1',\ldots,v_K')$ — допустимое решение задачи (27) со значением целевой функции $f_1(u')+\varphi'$. Определим значения булевых переменных

$$
w_k' = \begin{cases} 0, & f_2(u',v_k',x_k)-\varphi' \le 0,\ Q_2(u',v_k',x_k)\le 0, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}
$$

Покажем, что $(\varphi',\,u',\,v_1',\ldots,v_K',\,w_1',\ldots,w_K')$ — допустимое решение задачи (28). Обозначим I_0' и I_1' множества индексов k таких, что $w_k'=0$ и $w_k'=1$ соответственно. Тогда из ограничения-неравенства (27) следует

$$
\sum_{k=1}^{K} p_k w_k' = 1-\sum_{k=1}^{K} p_k(1-w_k') = 1-\sum_{k\in I_0'} p_k =
$$
$$
=1-\sum_{k=1}^{K} p_k I\{f_2(u',v_k',x_k)-\varphi'\le 0,\ Q_2(u',v_k',x_k)\le 0\}\le 1-\alpha\,.
$$

Таким образом, ограничение $\sum_{k=1}^{K} p_k w_k' \le 1-\alpha$ в (28) выполнено. Проверим две следующие группы ограничений в (28). Для $k\in I_0'$ данные ограничения принимают вид $f_2(u',v_k',x_k)-\varphi'\le 0$, $Q_2(u',v_k',x_k)\le 0$ и выполнены в силу определения множества индексов I_0'. Для $k\in I_1'$ эти ограничения принимают вид $\mu_1(u',v_k',x_k)-\varphi'\le 0$, $\mu_2(u',v_k',x_k)-\varphi'\le 0$. Проверим их выполнение. В силу предположения допустимости $(\varphi',u',v_1',\ldots v_K')$ из (27) следует, что $I_0'\ne\varnothing$ и существуют $x_{k'}, v_{k'}'\in V(x_{k'})$ такие, что $f_2(u',v_{k'}',x_{k'})-\varphi'\le 0$, $Q_2(u',v_{k'}',x_{k'})\le 0$. В силу предположения 4.1 для $k\in I_1'$ имеет место

$$
\mu_1(u',v_k',x_k)\le \inf_{x\in \mathrm{X}(\Omega)}\inf_{v\in V(x)}\{f_2(u',v,x): Q_2(u',v,x)\le 0\}\le
$$
$$
\le f_2(u',v_{k'}',x_{k'})\le\varphi'
$$

и, значит, справедливо неравенство $\mu_1(u',v_k',x_k)-\varphi'\le 0$. В силу предположения 4.2 выполнено или $\mu_2(u',v_k',x_k)\le 0$ (что и требуется), или

$$
\mu_2(u',v_k',x_k)\le \inf_{x\in \mathrm{X}(\Omega)}\inf_{v\in V(x)} Q_2(u',v,x)\le Q_2(u',v_{k'}',x_{k'})\le 0\,.
$$

Таким образом, второе неравенство $\mu_2(u', v'_k, x_k) \le 0$ также выполнено. Следовательно, $(\varphi', u', v'_1, \ldots, v'_K, w'_1, \ldots, w'_K)$ — допустимое решение задачи (28) с тем же самым значением $f_1(u') + \varphi'$ целевой функции.

Пусть $(\varphi', u', v'_1, \ldots, v'_K, w'_1, \ldots, w'_K)$ — допустимое решение задачи (28) со значением целевой функции $f_1(u') + \varphi'$. Проверим, что $(\varphi', u', v'_1, \ldots, v'_K)$ — допустимое решение задачи (27). Обозначим I'_0 множество индексов k таких, что $w'_k = 0$. В силу допустимости имеет место $\sum_{k=1}^{K} p_k w'_k \le 1 - \alpha$, что эквивалентно неравенству $\sum_{k \in I'_0} p_k \ge \alpha$. При $k \in I'_0$ выполнено $w'_k = 0$, поэтому из ограничений (28) следует $f_2(u', v'_k, x_k) - \varphi' \le 0$, $Q_2(u', v'_k, x_k) \le 0$. Проверим выполнение вероятностного ограничения в (27):

$$\sum_{k=1}^{K} p_k I\{f_2(u', v'_k, x_k) - \varphi' \le 0, Q_2(u', v'_k, x_k) \le 0\} \ge$$

$$\ge \sum_{k \in I'_0} p_k I\{f_2(u', v'_k, x_k) - \varphi' \le 0, Q_2(u', v'_k, x_k) \le 0\} = \sum_{k \in I'_0} p_k \ge \alpha .$$

Таким образом, $(\varphi', u', v'_1, \ldots, v'_K)$ — допустимое решение задачи (27) с тем же самым значением $f_1(u') + \varphi'$ целевой функции. Справедливость первого утверждения теоремы следует из леммы 1. Второе утверждение теоремы доказывается аналогично, но на основе леммы 2.

Теорема доказана.

Предположения 4 допускают некоторый произвол в выборе функций $\mu_1(\cdot), \mu_2(\cdot)$. Выберем их так, чтобы упростить задачу (28).

Предположения 5 (об области изменения функций задачи). Пусть существуют (известны) константа μ и функции $M_2(x)$ и $N_2(x)$ такие, что выполняются следующие условия:

5.1. $\inf\limits_{u \in U, x \in X(\Omega), v \in V(x)} \{f_2(u, v, x) : Q_2(u, v, x) \le 0\} \ge \mu > -\infty;$

5.2. $\sup\limits_{u \in U, v \in V(x)} f_2(u, v, x) \le M_2(x) < \infty, \quad \sup\limits_{u \in U, v \in V(x)} Q_2(u, v, x) \le N_2(x) < \infty .$

Функции $M_2(x)$, $N_2(x)$ и число μ заведомо существуют, если функции $f_2(u, v, x)$, $Q_2(u, v, x)$ непрерывны по $(u, v) \in U \times V(x)$ при каждом $x \in \mathrm{X}(\Omega)$ и множества $U, V(x)$ компактны, а множество $\mathrm{X}(\Omega)$ конечно.

Выберем функции

$$\mu_1(u, v, x) = f_2(u, v, x) - M_2(x) + \mu, \quad \mu_2(u, v, x) = Q_2(u, v, x) - N_2(x).$$

Они удовлетворяют предположениям 4. Действительно, для любого $u \in U$ в силу условий 5.1, 5.2 выполнено

$$\mu_1(u, v, x) = f_2(u, v, x) - M_2(x) + \mu \le \mu \le$$

$$\le \inf_{u \in U, x \in \mathrm{X}(\Omega), v \in V(x)} \{f_2(u, v, x) : Q_2(u, v, x) \le 0\},$$

$$\mu_2(u, v_2, x) = Q_2(u, v, x) - N_2(x) \le 0.$$

Подставляя соотношения $\mu_1(u, v, x) = f_2(u, v, x) - M_2(x) + \mu$, $\mu_2(u, v, x) = Q_2(u, v, x) - N_2(x)$ в (28), приходим к следующей линейной по булевым переменным эквивалентной (при предположениях 5) задаче смешанного целочисленного программирования [16]

$$\begin{cases} f_1(u)+\varphi \to \min\limits_{u\in U,\varphi\in\mathbb{R}^1;\, v_1,\ldots,v_K;\, w_1,\ldots,w_K}, \\ \sum\limits_{k=1}^{K} p_k w_k \le 1-\alpha, \\ f_2(u, v_k, x_k)-\varphi \le (M(x_k)-\mu)w_k,\ k=1,2,\ldots,K, \\ Q_2(u, v_k, x_k) \le N(x_k)w_k,\ k=1,2,\ldots,K, \\ v_k \in V(x_k),\, w_k \in \{0,1\},\ k=1,2,\ldots,K. \end{cases} \tag{29}$$

Отметим, что если функции $f_2(u, v, x)$, $Q_2(u, v, x)$ кусочно-линейны по (u, v), например, являются функциями максимума из линейных по (u, v) функций, а множества U, $V(x)$ задаются линейными ограничениями, то задача (29) сводится к задаче линейного частично целочисленного программирования.

Замечание 6. Рассмотрим задачу (26) с фиксированным φ, например $\varphi\equiv 0$ (которая в этом случае называется задачей двухэтапного стохастического программирования с вероятностным ограничением), а также задачи (27)–(29) с тем же самым фиксированным φ. При этом лемма 4 и теорема 2 остаются справедливыми. Таким образом, задача двухэтапного стохастического программирования с вероятностным ограничением (26) с $\varphi\equiv 0$ при дискретном распределении случайных данных эквивалентно сводится к задаче частично целочисленного программирования (29) с $\varphi\equiv 0$.

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В работе [26] рассмотрен численный пример двухэтапной линейной задачи квантильной оптимизации вида (25), где на первом этапе решается задача

$$c_1^{\mathrm T} u+\varphi_\alpha(u)\to \min_{u\in U},\ U=\{u: A_1u\ge b_1,\, u\ge 0\},$$

а задача второго этапа имеет вид

$$\Phi(u, x)=\min_{y\in Y(u,x)} c_2^{\mathrm T} v,\ Y(u, x)=\{v: v\ge 0,\, B_2v\ge x-A_2u\}.$$

Параметры задач имеют следующие числовые значения: $\alpha=0.5$,

$$c_1=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\ c_2=\begin{pmatrix}0.1\\0.36\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}-0.875 & 1.8\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1.1 & 1.7\\ 2.8 & 2.4\end{pmatrix},\ A_1=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ b_1=\begin{pmatrix}-10\\-10\end{pmatrix}.$$

Случайный вектор X (правых частей) задан рядом распределения в виде

x_k	$\begin{pmatrix}2.5\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1.5\\2.1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2.3\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3.2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}$
p_k	0.05	0.10	0.10	0.25	0.15	0.15	0.15	0.05

Приближенное решение $u'=(u_1', u_2')$, найденное алгоритмом, предложенным в [26], имеет вид

u_1'	u_2'	$\Phi_\alpha(u')$	$c_1^{\mathrm T} u'+\Phi_\alpha(u')$
0	1.56	0.1	1.67

Решим эту задачу путем сведения к задаче частично целочисленного линейного программирования вида (29):

$$c_1^{\mathrm{T}} u + \varphi \to \min_{0 \le u_1, u_2 \le \overline{U};\ \varphi \ge \mu;\ 0 \le v_1, \ldots, v_K \le \overline{V};\ w_1 \in \{0,1\}, \ldots, w_K \in \{0,1\}},$$

$$\sum_{k=1}^{K} p_k w_k \le 1 - \alpha, \quad A_1 u \ge b_1,$$

$$c_2^{\mathrm{T}} v_k - \varphi \le (M_2(x_k) - \mu) w_k, \quad k = 1, 2, \ldots, K,$$

$$-A_{2i} u - B_{2i} v_k + x_{ki} \le N_2(x_k) w_k, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \ldots, K,$$

где A_{2i}, B_{2i} — i-е строки матриц A_2, B_2; $x_k = \{x_{ki}, i = 1, 2\}$; $\mu = 0$; $\overline{U} = \overline{V} = 100$;

$$M_2(x_k) \equiv M = \overline{V}(c_{21} + c_{22}) = 46;$$

$$N_2(x_k) \equiv N = \max_{i=1,2} \left(\overline{U} \sum_{j=1,2} |(A_2)_{ij}| + \overline{V} \sum_{j=1,2} |(B_2)_{ij}| + \max_{k=1,\ldots,K} |x_{ki}| \right) = 303.5.$$

Данная задача содержит 11 непрерывных переменных, восемь булевых переменных, одно булево ограничение-неравенство, два непрерывных ограничений-неравенств, 24 смешанных ограничений-неравенств. Точное решение этой задачи $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ получено с помощью программы IBM ILOG CPLEX V12.1 [27] (с параметрами по умолчанию на персональном компьютере AMD Athlon 64 3200+, 200MHz Bus Frequency, 1.50 GB DDR1 RAM) за 0.05 секунды:

$$u_1^* = 0, \ u_2^* = 1.5331, \ \varphi^* = 0.1188, \ c_1^{\mathrm{T}} u^* + \varphi^* = 1.6518.$$

Очевидно, что найденное оптимальное решение u^* лучше, чем приближенное решение u'.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Функции квантили можно использовать вместо функций среднего значения в задачах стохастического программирования. Они описывают функционирование стохастической системы в экстремальных условиях. Этот подход популярен в современной финансовой оптимизации. Однако функции квантили, как правило, не выпуклы. Поэтому для решения задач квантильной оптимизации применяют либо эвристические приближенные методы, либо методы глобальной оптимизации. Кроме того, задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением случайных данных можно свести к детерминированным задачам частично целочисленного программирования. При этом число дополнительных булевых переменных равно числу возможных значений вектора случайных параметров исходной задачи. Аналогичное преобразование возможно и для двухэтапных задач с вероятностным ограничением на целевую функцию второго этапа. Полученные смешанные задачи предполагается решать стандартными программными средствами дискретной оптимизации. Результаты проиллюстрированы численным примером небольшой размерности. Таким образом, обоснован практический метод решения реальных задач квантильного двухэтапного стохастического программирования. Дальнейшие исследования будут направлены на разработку специальных методов дискретной оптимизации, учитывающих структуру возникающих частично целочисленных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dantzig G.B., Thapa M.N. Linear programming 2: Theory and extensions. — New York: Springer, 2003. — **2**. — 448 p.
2. Ermoliev Y., Wets R. (Eds) Numerical techniques for stochastic optimization. — Berlin: Springer, 1988. — 571 p.
3. Birge J., Luveaux F. Introduction to stochastic programming. — New York: Springer, 1997. — 421 p.
4. Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczynski A. Lectures on stochastic programming: Modeling and theory. — Philadelphia: SIAM, 2009. — 442 p.

5. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976. — 240 с.
6. Юдин Д. Б. Задачи и методы стохастического программирования. — М.: Сов. радио, 1979. — 392 с.
7. Малышев В. В., Кибзун А. И. Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. — М.: Машиностроение, 1987. — 304 с.
8. Kibzun A. I., Kan Y. S. Stochastic programming problems with probability and quantile functions. — Chichester; New York; Brisbane et etc.: John Wiley & Sons, 1996. — 301 p.
9. Кибзун А. И., Кан Ю. С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. — М.: Физматлит, 2009. — 372 с.
10. Кибзун А. И., Наумов А. В. Гарантирующий алгоритм решения задачи квантильной оптимизации // Космич. исслед. — 1995. — **33**, № 2. — С. 160–165.
11. Larsen N., Mausser H., Uryasev S. Algorithms for optimization of value-at-risk // Financial Engineering, e-Commerce and Supply Chain / P. Pardalos and V.K. Tsitsiringos (Eds). — Dordreht: Kluwer Acad. Publ., 2002. — P. 129–157.
12. Wozabal D., Hochreiter R., Pflug G. Ch. A D.C. formulation of value-at-risk constrained optimization // Optimization. — 2010. — **59**, N 3. — P. 377–400.
13. Norkin V. On mixed integer reformulations of monotonic probabilistic programming problems with discrete distributions — (Preprint, 2010). — http://www.optimization-online.org.
14. Иванов С. В., Наумов А. В. Алгоритм оптимизации квантильного критерия для полиэдральной функции потерь и дискретного распределения случайных параметров // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 1. — С. 95–108.
15. Кибзун А. И., Наумов А. В., Норкин В. И. О сведении задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением к задаче смешанного целочисленного программирования // Там же. — 2013. — № 6. — С. 66–86.
16. Кибзун А. И., Наумов А. В., Норкин В. И. Сведение задач двухэтапной вероятностной оптимизации с дискретным распределением случайных данных к задачам частично целочисленного программирования // Стохастическое программирование и его приложения / Ред. П.С. Кнопов, В.И. Зоркальцев. — Иркутск: Ин-т систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, 2012. — С. 76–103.
17. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю. Дискретное программирование. — М.: Наука, 1969. — 368 с.
18. Sen S. Relaxation for probabilistically constrained programs with discrete random variables // Oper. Res. Letters. — 1992. — **11**. — P. 81–86.
19. Ruszczynski A. Probabilistic programming with discrete distributions and precedence constrained knapsack polyhedra // Math. Program. — 2002. — **93**. — P. 195–215.
20. Benati S., Rizzi R. A mixed integer linear programming formulation of the optimal mean/Value-at-Risk portfolio problem // Eur. J. Oper. Res. — 2007. — **176**. — P. 423–434.
21. Luedtke J., Ahmed S., Nemhauser G. An integer programming approach for linear programs with probabilistic constraints // Math. Program. — 2010. — **122**, N 2. — P. 247–272.
22. Норкин В. И., Бойко С. В. Оптимизация финансового портфеля на основе принципа безопасности // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 2. — С. 29–41.
23. Богданов А. Б., Наумов А. В. Исследование двухэтапной целочисленной задачи квантильной оптимизации // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2003. — № 5. — С. 62–69.
24. Богданов А. Б., Наумов А. В. Решение двухэтапной задачи логистики в квантильной постановке // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 12. — С. 36–42.
25. Наумов А. В. Двухэтапная задача квантильной оптимизации инвестиционного проекта // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 2. — С. 40–47.
26. Наумов А. В., Бобылев И. М. О двухэтапной задаче стохастического линейного программирования с квантильным критерием и дискретным распределением случайных параметров // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 2. — С. 61–72.
27. IBM ILOG CPLEX V12.1. User's Manual for CPLEX. — Intern. Business Machines Corporation, 2009. — 952 p.
28. Райк Э. Качественные исследования в задачах стохастического нелинейного программирования // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. — 1971. — **20**, № 1. — С. 8–14.
29. Prekopa A. Stochastic programming. — Dordreht: Kluwer Acad. Publ., 1995. — 600 p.
30. Райк Э. О функции квантиля в стохастическом нелинейном программировании // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. — 1971. — **20**, № 2. — С. 229–231.
31. Райк Э. О задачах стохастического программирования с решающими функциями // Там же. — 1972. — **21**. — С. 258–263.
32. Обен Ж-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988. — 510 с.
33. Kataoka S. A stochastic programming model // Econometrica. — 1963. — **31**. — P. 181–196.
34. Михалевич В. С., Гупал А. М., Норкин В. И. Методы невыпуклой оптимизации. — М.: Наука, 1987. — 280 с.
35. Pagnoncelli B. K., Ahmed S., Shapiro A. Sample average approximation method for chance constrained programming: Theory and applications // J. Optim. Theory Appl. — 2009. — **142**. — P. 399–416.

Поступила 02.04.2013