

О РЕШЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ С РАЗМЕЩЕНИЕМ ЦЕНТРОВ ПОДМНОЖЕСТВ

Аннотация. Представлена математическая модель динамической задачи оптимального разбиения множества из пространства R^n с размещением центров подмножеств при наличии совместных ограничений на разбиение и фазовую переменную. Описан метод решения этой задачи, синтезирующий основные положения теории непрерывных задач разбиения и теории оптимального управления динамическими системами. Приведен численный алгоритм решения задачи и анализ результатов вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: непрерывная задача оптимального разбиения множеств, управляемая система, функционал Лагранжа, методы недифференцируемой оптимизации.

ВВЕДЕНИЕ

Под динамическими задачами оптимального разбиения множеств (ОРМ) понимают непрерывные задачи ОРМ, в которых хотя бы одна из входных характеристик зависит от времени, а математическая модель содержит дифференциальное уравнение, описывающее динамику этой характеристики. Общая постановка динамических задач ОРМ n -мерного пространства приведена в [1]. Класс таких задач достаточно широк. В нем, в свою очередь, можно выделить динамические задачи ОРМ:

- однопродуктовые и многопродуктовые (по количеству продуктов разбиения);
- линейные и нелинейные (по способу задания функционалов, входящих в критерий разбиения и ограничения);
- детерминированные и стохастические (по характеру параметров, входящих в математическую модель задачи);
- со статическим разбиением или разбиением, в котором границы между подмножествами могут быть подвижными (по характеру разбиения);
- без ограничений, а также с интегральными или поточечными ограничениями на фазовые переменные (по наличию фазовых ограничений);
- с сосредоточенными или распределенными параметрами (по характеру дифференциальных связей).

Частные случаи динамических задач ОРМ, свойства, методы и алгоритмы их решения рассмотрены в [2–4].

Как правило, в задачах ОРМ с подмножествами $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, составляющими разбиение множества Ω , связаны параметры $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ — так называемые «центры» этих подмножеств. Если эти параметры заранее известны, то такие задачи относятся к задачам оптимального разбиения с фиксированными центрами подмножеств. Если необходимо определить указанные параметры и разбиения, соответствующие задачи подразделяют на динамические задачи ОРМ с размещением центров подмножеств или задачи ОРМ с управляемыми центрами в зависимости от того, являются ли координаты центров статическими или могут изменяться со временем под воздействием некоторых управляющих параметров.

В данной работе представлена динамическая задача оптимального разбиения множества $\Omega \subseteq R^n$, которая является обобщением модели, рассмотренной в [2]. В этой задаче требуется не только найти разбиение множества Ω на N подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ (среди которых могут быть и пустые), но и разместить центры τ_1, \dots, τ_N этих подмножеств. Кроме того, будем считать, что на состояние управляемой системы влияют некоторые внешние факторы, которые можно описать известной функцией $f(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть Ω — ограниченное, измеримое по Лебегу множество из пространства R^n , $P_N(\Omega)$ — класс всех возможных разбиений множества Ω на N подмножеств:

$$P_N(\Omega) = \left\{ \bar{\omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N} \right\},$$

где $\text{mes}(\cdot)$ — мера Лебега.

Введем в рассмотрение функционал

$$J(\gamma) = \beta_0 \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i, t) + a_i) \rho(x, t) dx dt + \beta_1 \int_0^T \int_{\Omega} u^2(x, t) dx dt, \quad (1)$$

где $\gamma = (\bar{\omega}, \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot))$, $\bar{\omega} \in P_N(\Omega)$, $\tau \in \Omega^N$, $u(\cdot, \cdot) \in L_2(\Omega \times [0, T])$, $\rho(\cdot, \cdot)$ — определенная на $\Omega \times [0, T]$ функция, непрерывно дифференцируемая по переменной $t \in (0, T)$ при каждом фиксированном $x \in \Omega$; $T > 0$, $\beta_0, \beta_1 \geq 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$ — заданные параметры; $c(x, \tau_i, t) \equiv c(x, \tau_i)q(t)$, $q(t) \in L_2([0, T])$, $c(x, \tau_i)$ — соответственно действительные, ограниченные, определенные на $\Omega \times \Omega$ функции, измеримые по x при произвольном фиксированном векторе $\tau_i \in \Omega, i = \overline{1, N}$, параметров; $a_i, i = \overline{1, N}$, — заданные неотрицательные величины; функция $\rho(x, t)$ для каждого $x \in \Omega$ является решением задачи Коши

$$\dot{\rho}(x, t) = u(x, t) + f(x, t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) \quad (3)$$

и удовлетворяет условиям

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) dx \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

Функции $f(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ и $\rho_0(x)$ в задаче (2), (3) считаются известными.

Под динамической задачей ОРМ $\Omega \subseteq R^n$ на подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ с размещением центров этих подмножеств будем понимать следующую задачу.

Задача 1. Необходимо найти разбиение $\bar{\omega}^* = (\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) \in P_N(\Omega)$, набор точек $\tau^* = (\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_N^*) \in \Omega^N$, управление $u^*(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ и соответствующую фазовую траекторию $\rho^*(x, t)$ (удовлетворяющую задаче (2)–(4)), при которых функционал (1) достигал бы минимального значения.

Оптимальным решением задачи 1 будем называть допустимую четверку $\gamma^* = (\bar{\omega}^*, \tau^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$, которая доставляет минимальное значение функционалу J .

В терминах характеристических функций подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, составляющих допустимое разбиение множества, задача 1 формулируется так: необходимо найти вектор-функцию $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)) \in \Lambda$, набор $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$, управляющую функцию $u(\cdot, \cdot) \in L_2(\Omega \times [0, T])$ и соответствующую фазовую переменную $\rho(\cdot, \cdot)$ так, чтобы функционал

$$I(\lambda(\cdot), \tau, \rho(\cdot, \cdot), u(\cdot, \cdot)) = \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \{ \beta_0 [c(x, \tau_i, t) + a_i] \rho(x, t) + \beta_1 u^2(x, t) \} \lambda_i(x) dx dt \quad (5)$$

достигал минимального значения при условиях

$$\dot{\rho}(x, t) = u(x, t) + f(x, t) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in [0, T], \quad (6)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (7)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = 1 \dots N, \quad (8)$$

где

$$\Lambda = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1, N}, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ почти всюду для } x \in \Omega \right\}.$$

ОПИСАНИЕ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

В соответствии с теорией непрерывных задач ОРМ погружаем множество Λ в симплекс Λ_1 :

$$\Lambda_1 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) \in [0, 1], \quad i = \overline{1, N}, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ почти всюду для } x \in \Omega \right\}$$

и от задачи минимизации функционала (5) при условиях (6)–(8) переходим к задаче бесконечномерного программирования

$$I(\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in V_1} \quad (9)$$

при условиях (8), где

$$V_1 = \{(\lambda(x), \tau, u(x, t), \rho(x, t)) : \lambda(x) \in \Lambda_1, \tau \in \Omega^N, u(x, t) \in L_2(\Omega \times [0, T]), \\ \dot{\rho}(x, t) = u(x, t) + f(x, t) \quad \forall t \in [0, T], \rho(x, 0) = \rho_0(x) \quad \forall x \in \Omega\}.$$

Для задачи (9), (8) введем в рассмотрение функционал Лагранжа

$$h((\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)), \xi) = I(\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) + \sum_{i=1}^N \xi_i \left(\int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) \lambda_i(x) dx dt - b_i \right),$$

определенный на $V_1 \times \Gamma$, $\Gamma = \{\xi \in R^N : \xi_i \geq 0, i = \overline{1, N}\}$.

Определение [5]. Пару $((\lambda^*(\cdot), \tau, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)), \xi^*)$ будем называть седловой точкой функционала Лагранжа $h((\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)), \xi)$ на множестве $V_1 \times \Gamma$, если для всех $(\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in V_1, \xi \in \Gamma$ выполняются соотношения

$$h((\lambda^*(\cdot), \tau^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)), \xi) \leq h((\lambda^*(\cdot), \tau^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)), \xi^*) \leq \\ \leq h((\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)), \xi^*).$$

Задача, двойственная к задаче (9), (8), записывается в виде

$$\chi(\xi) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in V_1} h((\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)), \xi) \rightarrow \max_{\xi \in \Gamma} \quad (10)$$

В случае существования седловой точки функционала Лагранжа (в смысле введенного определения) задачи (8), (9) и (10) связаны соотношением двойственности $I_* = \chi^*$, причем верхняя грань целевой функции в двойственной задаче (10) достигается. Решение пары указанных двойственных задач эквивалентно нахождению седловой точки функционала Лагранжа $h((\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)), \xi)$ на множестве $V_1 \times \Gamma$.

Пусть $\xi \in \Gamma$ — произвольный, но фиксированный вектор. Рассмотрим задачу

$$h((\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)), \xi) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), \tau, u(\cdot, \cdot), \rho(\cdot, \cdot)) \in V_1} \quad (11)$$

Пусть в задаче (11) $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$ — произвольный, но фиксированный вектор. Обозначим V_1^τ сечение множества V_1 при заданном векторе $\tau \in \Omega^N$.

Нетрудно показать, что при произвольных, но фиксированных значениях $\xi \in \Gamma$ и $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$ допустимый процесс $(\lambda^*(\cdot), u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)) \in V_1^\tau$ будет доставлять минимальное значение функционалу задачи (11) тогда и только

тогда, когда почти всюду для $x \in \Omega$ будет выполняться равенство

$$\int_0^T \left(\sum_{i=1}^N [(\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i) \rho^*(x, t) \lambda_i^*(x)] + \beta_1 (u^*(x, t))^2 \right) dt =$$

$$= \min_{\substack{\lambda(x) \in \Lambda_2 \\ u(x, \cdot) \in L_2([0, T])}} \int_0^T \left(\sum_{i=1}^N [(\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i) \rho(x, t) \lambda_i(x)] + \beta_1 u^2(x, t) \right) dt,$$

где $\Lambda_2 = \left\{ \lambda \in R^N : \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\}$, функция $\rho(x, t)$ — решение задачи Коши (2), (3), соответствующее функции управления $u(x, \cdot)$.

Введем обозначение для функционала Лагранжа, соответствующего фиксированным значениям $\xi \in \Gamma$ и $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$:

$$P_{\xi, \tau}(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) =$$

$$= \int_0^T \left(\sum_{i=1}^N [(\beta_0(c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i) \rho(x, t) \lambda_i(x)] + \beta_1 u^2(x, t) \right) dt.$$

Для каждой точки $x \in \Omega$ оптимальное решение задачи

$$P_{\xi, \tau}(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \rightarrow \min_{(\lambda(x), u(x, \cdot), \rho(x, \cdot)) \in V_1^{tx}}, \quad (12)$$

где V_1^{tx} — сечение множества V_1^τ при фиксированной точке $x \in \Omega$, записывается в виде

$$u^*(x, t; \tau, \xi) = \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_i) \lambda_i(x) d\sigma; \quad (13)$$

$$\rho^*(x, t; \tau, \xi) = \rho_0(x) + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \int_0^\theta \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_i) \lambda_i(x) d\sigma d\theta + \int_0^t f(x, \theta) d\theta, \quad (14)$$

$$\lambda_i^*(x; \tau, \xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_i(x; \tau_i, \xi_i) = \min_{k=1, N} B_k(x; \tau_k, \xi_k), \\ 0 & \text{в остальных случаях, } i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (15)$$

$$B_j(x; \tau_j, \xi_j) = \int_0^T Q_j(x, t; \tau_j, \xi_j) \left(\rho_0(x) + \int_0^t f(x, \theta) d\theta \right) dt -$$

$$- \frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \int_0^t \int_0^\zeta Q_j(x, t; \tau_j, \xi_j) Q_j(x, \theta; \tau_j, \xi_j) d\theta d\zeta dt + \frac{1}{4\beta_1} \int_0^T \left\{ \int_t^T Q_j(x, \theta; \tau_j, \xi_j) d\theta \right\}^2 dt,$$

$$Q_j(x, t; \tau_j, \xi_j) = \beta_0(c(x, \tau_j, t) + a_j) + \xi_j, \quad j = \overline{1, N}.$$

Аналитические выражения (13)–(15) можно получить с помощью принципа максимума Понтрягина, который, учитывая свойства задачи (12), определяет не только необходимые, но и достаточные условия оптимальности управляемого процесса. Если ввести обозначения

$$G_j(x, t; \tau_j, \xi_j) = \int_0^t Q_j(x, \theta; \tau_j, \xi_j) d\theta, \quad f_0(x, t) = \rho_0(x) + \int_0^t f(x, \theta) d\theta,$$

то выражение для величины $B_j(x; \tau_j, \xi_j)$ преобразуется так:

$$B_j(x; \tau_j, \xi_j) = \int_0^T Q_j(x, t; \tau_j, \xi_j) f_0(x, t) dt - \frac{1}{4\beta_1} T \cdot G_j^2(x, T; \tau_j, \xi_j) +$$

$$+ \frac{1}{4\beta_1} \left(2 \int_0^T Q_j(x, t; \tau_j, \xi_j) \cdot \left(\int_0^t G_j(x, \sigma; \tau_j, \xi_j) d\sigma \right) dt + \int_0^T G_j^2(x, t; \tau_j, \xi_j) dt \right). \quad (16)$$

С учетом полученного аналитического решения задачи (11), соответствующего фиксированным векторам $\tau \in \Omega^N$ и $\xi \in \Gamma$, целевая функция двойственной задачи (10) записывается следующим образом:

$$\chi(\xi) = \min_{\tau \in \Omega^N} \int_{\Omega} \min_{j=1, N} B_j(x; \tau_j, \xi_j) dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j. \quad (17)$$

Таким образом, седловая точка $((\lambda^*(\cdot), \tau^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot)), \xi^*)$ функционала Лагранжа задачи (10) на множестве $V_1 \times \Gamma$ определяется почти всюду для $x \in \Omega$ по следующим формулам:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } B_i(x; \tau_i^*, \xi_i^*) = \min_{k=1, N} B_k(x; \tau_k^*, \xi_k^*), \\ 0 & \text{в остальных случаях, } i = 1, N, \end{cases} \quad (18)$$

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2\beta_1} \int_T^t \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i^*, \sigma) + a_i) + \xi_i^*) \lambda_i^*(x) d\sigma, \quad (19)$$

$$\rho^*(x, t) = f_0(x, t) + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \int_T^\theta \sum_{i=1}^N (\beta_0(c(x, \tau_i^*, \sigma) + a_i) + \xi_i^*) \lambda_i^*(x) d\sigma d\theta, \quad (20)$$

$$B_j(x; \tau_j^*, \xi_j^*) = \int_0^T (Q_j(x, t; \tau_j^*, \xi_j^*) f_0(x, t) dt - \frac{1}{4\beta_1} \left(T \cdot G_j^2(x, T; \tau_j^*, \xi_j^*) - 2 \int_0^T Q_j(x, t; \tau_j^*, \xi_j^*) \cdot \left(\int_0^t G_j(x, \sigma; \tau_j^*, \xi_j^*) d\sigma \right) dt - \int_0^T G_j^2(x, t; \tau_j^*, \xi_j^*) dt \right),$$

$$Q_j(x, t; \tau_j^*, \xi_j^*) = \beta_0(c(x, \tau_j^*, t) + a_j) + \xi_j^*, \quad G_j(x, t; \tau_j^*, \xi_j^*) = \int_0^t Q_j(x, \theta; \tau_j^*, \xi_j^*) d\theta,$$

а в качестве $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*; \xi_1^*, \dots, \xi_N^*$ выбирается оптимальное решение двойственной задачи (10), приведенной к виду

$$\chi(\xi) \rightarrow \max_{\xi \in \Gamma}, \quad (21)$$

где

$$\chi(\xi) = \min_{\tau \in \Omega^N} \chi_1(\tau, \xi) = \min_{\tau \in \Omega^N} \left(\int_{\Omega} \min_{j=1, N} B_j(x; \tau_j, \xi_j) dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j \right).$$

Сформулируем условия разрешимости задачи (1)–(4). Справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Если вектор правых частей неравенств (4) удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq \int_{\Omega} \left(\int_0^T f_0(x, t) dt - \frac{\beta_0 T^3}{6\beta_1} \bar{c}(x) \right) dx, \quad (22)$$

где $f_0(x, t) = \rho_0(x) + \int_0^t f(x, \theta) d\theta$, $\bar{c}(x) = \min_{i=1, N} \left(\min_{t \in [0, T]} \min_{\tau_i \in \Omega} c(x, \tau_i, t) + a_i \right) \quad \forall x \in \Omega$,

то множество допустимых решений задачи (1)–(4) не пусто.

Доказательство. Просуммируем ограничения (4):

$$\int_{\Omega} \int_0^T \rho(x, t) dx dt \leq \sum_{j=1}^N b_j \quad (23)$$

и оценим левую часть соотношения (23) с учетом выражения (20) и того, что $\xi \in \Gamma$.

Опустив в (20) метку * и подставив это выражение в (18), имеем

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x, t) dx dt = \\
 & = \int_0^T \int_{\Omega} \left(f_0(x, t) + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^t \int_{\theta}^{\theta} \sum_{i=1}^N (\beta_0 (c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_i) \lambda_i(x) d\sigma d\theta \right) dx dt = \\
 & = \int_0^T \int_{\Omega} f_0(x, t) dt - \frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\int_0^t \int_{\theta}^{\theta} \sum_{i=1}^N (\beta_0 (c(x, \tau_i, \sigma) + a_i) + \xi_i) \lambda_i(x) d\sigma d\theta \right) dx dt \leq \\
 & \leq \int_0^T \int_{\Omega} f_0(x, t) dt - \frac{1}{2\beta_1} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\int_0^t \int_{\theta}^{\theta} \sum_{i=1}^N (\beta_0 (c(x, \tau_i, \sigma) + a_i)) \lambda_i(x) d\sigma d\theta \right) dx dt \leq \\
 & \leq \int_0^T \int_{\Omega} f_0(x, t) dt - \frac{\beta_0}{2\beta_1} \int_{\Omega} \left(\int_0^T \int_{\theta}^{\theta} \sum_{i=1}^N \left(\min_{v \in [0, T]} c(x, \tau_i, v) + a_i \right) \lambda_i(x) d\sigma d\theta dt \right) dx = \\
 & = \int_0^T \int_{\Omega} f_0(x, t) dt - \frac{\beta_0}{2\beta_1} \frac{T^3}{3} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left(\min_{v \in [0, T]} \min_{\tau_i \in \Omega} c(x, \tau_i, v) + a_i \right) \lambda_i(x) dx \leq \\
 & \leq \int_0^T \int_{\Omega} f_0(x, t) dt - \frac{\beta_0}{2\beta_1} \frac{T^3}{3} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \bar{c}(x) \lambda_i(x) dx = \int_{\Omega} \left(\int_0^T f_0(x, t) dt - \frac{\beta_0 T^3}{6\beta_1} \bar{c}(x) \right) dx.
 \end{aligned}$$

Замечание 1. Если в задаче (1)–(4) функции $c_i(x, \tau_i, t)$, $i = \overline{1, N}$, неотрицательны почти всюду для $x \in \Omega$ и $t \in [0, T]$, оценку (22) можно огрубить до следующей:

$$\sum_{i=1}^N b_i \geq \int_{\Omega} \left(\int_0^t f_0(x, t) dt - \frac{\beta_0 T^3}{6\beta_1} \cdot \min_{i=\overline{1, N}} a_i \right) dx.$$

Теорема. Пусть в задаче (1)–(4) множество Ω выпуклое, замкнутое, ограниченное, функции $c_i(x, \tau_i, t)$, $i = \overline{1, N}$, непрерывны по переменным τ_i на множестве Ω почти всюду для $x \in \Omega$ и $t \in [0, T]$. Кроме того, пусть выполняются условия утверждения. Тогда задача (1)–(4) разрешима.

Доказательство. Необходимость выполнения условия утверждения очевидна, так как в противном случае класс допустимых разбиений для задачи (1)–(4) может быть пустым, вследствие чего динамическая задача ОРМ станет неразрешимой.

Ранее установлено, что задача (1)–(4) эквивалентна задаче (10), а решение последней при условии выполнения утверждения определяется формулами (18)–(20). Поэтому вопрос о существовании решения динамической задачи ОРМ с размещением центров подмножеств (1)–(4) сводится к исследованию разрешимости задачи (10), приведенной к виду (21). Покажем, что при выполнении условий теоремы эта задача имеет решение.

При условии непрерывности функций $c_i(x, \tau_i, t)$ по переменным τ_i непрерывными на Ω^N по параметрам τ_i , $i = \overline{1, N}$, также будут функции $u(x, t; \tau)$ и $\rho(x, t; \tau)$, определяемые по формулам (13) и (14) соответственно, для всех $x \in \Omega$ и $t \in [0, T]$. Вместе с этими функциями непрерывными на Ω по параметрам τ_i оказываются и функции $Q_i(x, t; \tau_i, \xi_i)$, $G_i(x, t; \tau_i, \xi_i)$, $B_i(x, \tau_i, \xi_i)$, $i = \overline{1, N}$.

Действительно, из того, что для произвольной последовательности $\{\tau^{(k)}\} = \{\tau_1^k, \dots, \tau_N^k\}$, сходящейся к произвольной, но фиксированной точке $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$, справедливо соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c(x, \tau_i^{(k)}, t) = c(x, \tau_i, t), \quad x \in \Omega \text{ и } t \in [0, T],$$

следует, что при каждом фиксированном векторе $\xi \in \Gamma$, а также $x \in \Omega$ и $t \in [0, T]$ справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} Q_i(x, t; \tau_i^{(k)}, \xi_i) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\beta_0 (c(x, \tau_i^{(k)}, t) + a_i) + \xi_i) = \\ &= \left(\beta_0 \left(\lim_{k \rightarrow \infty} c(x, \tau_i^{(k)}, t) + a_i \right) + \xi_i \right) = \beta_0 (c(x, \tau_i, t) + a_i) + \xi_i = Q_i(x, t; \tau_i, \xi_i); \\ \lim_{k \rightarrow \infty} G_j(x, t; \tau_j^{(k)}, \xi_j) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t Q_j(x, \theta; \tau_j^{(k)}, \xi_j) d\theta = \int_0^t \lim_{k \rightarrow \infty} Q_j(x, \theta; \tau_j^{(k)}, \xi_j) d\theta = \\ &= \int_0^t Q_j(x, \theta; \tau_j, \xi_j) d\theta = G_j(x, \tau_j, \xi_j); \\ &\quad \lim_{k \rightarrow \infty} B_j(x; \tau_j^{(k)}, \xi_j) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_0^T (Q_j(x, t; \tau_j^{(k)}, \xi_j) f_0(x, t) dt - \frac{1}{4\beta_1} T \cdot G_j^2(x, T; \tau_j^{(k)}, \xi_j) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\beta_1} \left(2 \int_0^T Q_j(x, t; \tau_j^{(k)}, \xi_j) \cdot \left(\int_0^t G_j(x, \sigma; \tau_j^{(k)}, \xi_j) d\sigma \right) dt + \int_0^T G_j^2(x, t; \tau_j^{(k)}, \xi_j) dt \right) \right] = \\ &= B_j(x; \tau_j, \xi_j). \end{aligned}$$

Для целевой функции задачи (21) при произвольном, фиксированном векторе $\xi \in \Gamma$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_1(\tau^{(k)}, \xi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \min_{j=1, N} B_j(x; \tau_j^{(k)}, \xi_j) dx - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j \right) = \\ &= - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \min_{j=1, N} B_j(x; \tau_j^{(k)}, \xi_j) dx = \\ &= - \sum_{j=1}^N \xi_j b_j + \int_{\Omega} \min_{j=1, N} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} B_j(x; \tau_j^{(k)}, \xi_j) \right) dx = \chi_1(\tau, \xi), \end{aligned}$$

что означает непрерывность функции $\chi_1(\tau, \xi)$ по переменным $\tau_i, i = \overline{1, N}$, на множестве Ω^N .

В соответствии с теоремой Вейерштрасса непрерывная по переменной τ функция $\chi_1(\tau, \xi)$ на выпуклом ограниченном множестве Ω^N достигает своего минимального значения для произвольного фиксированного вектора $\xi \in \Gamma$. Таким образом, внутренняя задача (21) минимизации функции $\chi_1(\tau, \xi)$ по переменной τ разрешима. Существование вектора $\xi \in \Gamma$, доставляющего максимум функции $\chi(\xi)$, следует из теоремы двойственности.

Таким образом, показано, что при выполнении условий теоремы задача (21) разрешима, вследствие чего динамическая задача ОРМ (1)–(4) также имеет решение.

Теорема доказана.

Для решения задачи максимизации негладкой вогнутой на множестве Γ функции (17) можно применить какой-либо известный метод, например, метод типа субградиентного, эллипсоидов [6–8] и др.

Далее приведен численный алгоритм решения задачи (21), основанный на методе обобщенного градиентного подъема с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов — r -алгоритм Шора. При этом от задачи (21) совершается переход к задаче безусловной максимизации с помощью

введения в целевую функцию негладкой штрафной функции множества Γ

$$\bar{\chi}(\tau, \xi) = \chi_1(\tau, \xi) - S \sum_{i=1}^N \max(0, (-\xi_i)) \rightarrow \max_{\xi \in E^N} \min_{\tau \in \Omega^N}, \quad (24)$$

где S — достаточно большое положительное число (значительно большее максимального множителя Лагранжа). Возможность перехода от задачи (21) к задаче (24) описана в [5].

Алгоритм решения задачи 2. Не теряя общности, будем считать, что множество Ω является параллелепипедом Π , стороны которого параллельны осям декартовой прямоугольной системы координат.

Шаг 1. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение $(\psi, \tau) = (\psi^{(0)}, \tau^{(0)})$. Пусть $\hat{\Pi}$ — множество узлов пространственной сетки.

Шаг 2. Покрываем отрезок $[0, T]$ сеткой с шагом h_t , обозначим $\hat{T} = \{t : t = lh_t, l = \overline{1, n_T}\}$ множество узлов сетки по временной переменной.

Шаг 3. Решаем задачу (21):

3.1. Для каждого узла $x \in \hat{\Pi}$ вычисляем значения характеристических функций подмножеств $\lambda_i^{(0)}(x), i = \overline{1, N}$, по формулам (15), (16) при значениях $\xi_i = \xi_i^{(0)}, \tau_i = \tau_i^{(0)}, i = \overline{1, N}$. Вычисляем управляющую функцию $u^{(0)}(x, t)$ и фазовую траекторию $\rho^{(0)}(x, t)$ в каждой точке $t \in \hat{T}$ по формулам (13) и (14) соответственно при $\lambda = \lambda^{(0)}(\cdot), \psi = \psi^{(0)}, \tau = \tau^{(0)}$.

3.2. Вычисляем компоненты $(g_{\bar{\chi}}^{\tau_1}, \dots, g_{\bar{\chi}}^{\tau_N}; g_{\bar{\chi}}^{\xi_1}, \dots, g_{\bar{\chi}}^{\xi_N})$ обобщенного градиента функции $\bar{\chi}(\tau, \xi)$ в точке $(\tau, \xi) = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)}; \xi_1^{(0)}, \dots, \xi_N^{(0)})$ при $\lambda(\cdot) = \lambda^{(0)}(\cdot), \xi_i = \xi_i^{(0)}, \tau_i = \tau_i^{(0)}, i = \overline{1, N}; u^{(0)}(\cdot, \cdot), \rho^{(0)}(\cdot, \cdot)$.

3.3. Выбираем начальный шаг $h_0 > 0$ r -алгоритма и находим

$$\xi_i^{(1)} = \xi_i^{(0)} + h_0 g_{\bar{\chi}}^{\xi_i}(\xi^{(0)});$$

$$\tau_i^{(1)} = \text{Pr}_{\Omega}[\tau_i^{(0)} - \beta_0 g_{\bar{\chi}}^{\tau_i}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})], \quad i = \overline{1, N},$$

где Pr_{Ω} — оператор проектирования на множество Ω .

Переход к шагу 2 r -алгоритма.

Пусть в результате вычислений после $k, k = 1, 2, \dots$, шагов алгоритма получены определенные значения $\tau^{(k)}, \xi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(\cdot), u^{(k-1)}(\cdot, \cdot), \rho^{(k-1)}(\cdot, \cdot)$.

3.4. Вычисляем $(k+1)$ -й шаг:

а) для каждого узла $x \in \hat{\Pi}$ вычисляем значения характеристических функций $\lambda^{(k)}(x)$ по формулам (15), (16) при $\tau = \tau^{(k)}; \xi = \xi^{(k)}$; значения управляющей функции $u^{(k)}(x, t)$ и фазовой траектории $\rho^{(k)}(x, t)$ в точках $t \in \hat{T}$ по формулам (13) и (14) соответственно при $\tau = \tau^{(k)}; \xi = \xi^{(k)}; \lambda = \lambda^{(k)}(\cdot)$;

б) вычисляем приближенно компоненты вектора обобщенного градиента $(g_{\bar{\chi}}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}), g_{\bar{\chi}}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}))$ при $\lambda(\cdot) = \lambda^{(k)}(\cdot), u^{(k)}(\cdot, \cdot), \rho^{(k)}(\cdot, \cdot)$;

в) осуществляем $(k+1)$ -й шаг r -алгоритма для решения задачи (21), краткая схема которого записывается следующим образом:

$$\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\xi} \tilde{g}_{\bar{\chi}}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}),$$

$$\tau^{(k+1)} = \text{Pr}_{\Omega^N}[\tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^{\tau} \tilde{g}_{\bar{\chi}}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)})],$$

где $B_{k+1}^{\xi}, B_{k+1}^{\tau}$ — операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство E^N , пересчет которых проводится по формулам

$$B_0^{\xi} = I_N, B_0^{\tau} = I_N \quad (I_N \text{ — единичная матрица}),$$

$$B_{k+1}^{\xi} = B_k^{\xi} R_{\alpha} \left(\frac{r_k}{\|r_k\|} \right), \quad r_k = g_{\bar{\chi}}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) - g_{\bar{\chi}}^{\xi}(\tau^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}),$$

$$B_{k+1}^{\tau} = B_k^{\tau} R_{\alpha} \left(\frac{\bar{r}_k}{\|\bar{r}_k\|} \right), \quad \bar{r}_k = g_{\bar{\chi}}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) - g_{\bar{\chi}}^{\tau}(\tau^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}),$$

$R_{\alpha}(\xi)$ — оператор растяжения пространства в направлении ξ с коэффициентом растяжения α , матричная форма которого имеет вид

$$R_{\alpha}(\xi) = I_N + (\alpha - 1)\xi\xi^T, \quad \tilde{g}_{\bar{\chi}}^{\xi} = (B_{k+1}^{\xi})^T g_{\bar{\chi}}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}),$$

$$\tilde{g}_{\bar{\chi}}^{\tau} = (B_{k+1}^{\tau})^T g_{\bar{\chi}}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}),$$

h_k — шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия оптимума функции по рассматриваемому направлению;

г) если условие

$$\|(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) - (\tau^{(k+1)}, \xi^{(k+1)})\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (25)$$

не выполняется, то переходим к $(k+2)$ -му шагу r -алгоритма, иначе к шагу 4.

Шаг 4. Полагаем $\psi^* = \psi^{(l)}, \tau^* = \tau^{(l)}, \lambda^*(x) = \lambda^{(l)}(x), u^*(x, t) = u^{(l)}(x, t), \rho^*(x, t) = \rho^{(l)}(x, t), x \in \hat{\Pi}, t \in \hat{T}$, где l — номер итерации, на которой вектор $(\tau^{(k)}, \xi^{(k)})$ удовлетворяет условию (25) окончания итерационного процесса. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала $I_1(\lambda^*(\cdot), \tau^*, u^*(\cdot, \cdot), \rho^*(\cdot, \cdot))$ и для контроля правильности результата значение функции (21) при следующих параметрах: $\xi = \xi^*, u = u^*(\cdot, \cdot), \rho = \rho^*(\cdot, \cdot), \lambda(\cdot) = \lambda^*(\cdot), \tau = \tau^*$.

Алгоритм описан.

Замечание 2. Приведенный алгоритм легко адаптировать для решения динамических задач оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств, в которых отсутствуют ограничения типа (4). При этом функция (17) не содержит слагаемых с двойственными переменными и, следовательно, отпадает необходимость в максимизации указанной функции по переменным $\xi_i, i = 1, N$, осуществляется лишь ее минимизация по координатам центров подмножеств $\tau_i, i = 1, N$.

Замечание 3. Для решения задачи минимизации функции (21) по переменной $\tau \in \Omega^N$ не обязательно применение метода проекции градиента. К тому же в случае, когда множество Ω имеет сложную форму или не является выпуклым, проекцию точки на множество Ω найти сложно или вовсе невозможно. Тогда целесообразно ввести штрафную функцию множества Ω :

$$P(\tau) = \begin{cases} 0 & \forall \tau \in \Omega^N, \\ \infty & \forall \tau \in \tau \in R^{nN} \setminus \Omega^N, \end{cases}$$

расширить ею целевую функцию (21) и решать задачу безусловной оптимизации

$$\bar{\chi}(\tau, \xi) = \chi_1(\tau, \xi) - S \sum_{i=1}^N \max(0, (-\xi_i)) + P(\tau) \rightarrow \max_{\xi \in R^N} \min_{\tau \in R^{nN}}.$$

РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Общими для тестов 1–5 (табл. 1) являются следующие параметры задачи (1)–(4): $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$; $\beta_0 = 1, \beta_1 = 1$; $T = 2.5$; $c_i(\tau_i, x, t) = \|x - \tau_i\|^2 \forall x \in \Omega$, где $\|\cdot\|$ — евклидова метрика; $\tau_i \in \Omega, i = 1, N$, — заранее неизвестны; $f(x, t) \equiv 0$. Для численного решения задач множество Ω покрывалось сеткой

с шагом $h_x = h_y = 0.02$, шаг по временной переменной $h_t = 0.1$. Другие параметры задачи для соответствующих тестов, а также полученные оптимальные решения представлены в табл. 1. Отметим, что вычисление координат центров подмножеств и значений двойственных переменных осуществлялось с точностью $\varepsilon = 0.0001$.

Как видно из результатов тестов 1 и 2, оптимальное размещение центров подмножеств зависит от начального приближения этих параметров. Но в обоих случаях получен локальный оптимум целевого функционала, что следует из результатов исследований свойств решений задач ОРМ, приведенных в [1]. Здесь, в частности, показано, что в задаче ОРМ с размещением центров подмножеств, в которой функцией $c_i(\tau_i, x)$ является евклидова метрика, а локальным оптимальным расположением двух центров подмножеств, образующих разбиение квадрата $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, — концы диаметра окружности $C = \{(x_1, x_2) : \sqrt{(x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2} = 0.25\}$. Заметим, что в модельных задачах 1 и 2 ограничения (4) пассивны, т.е. фактически решаются динамические задачи ОРМ с размещением центров без ограничений на фазовую переменную.

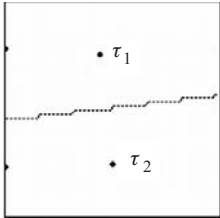
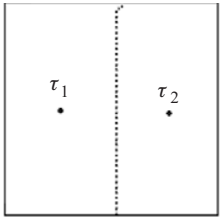
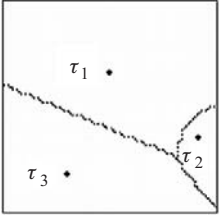
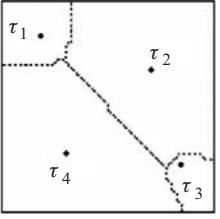
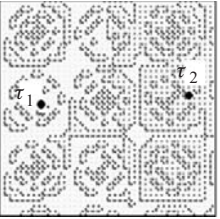
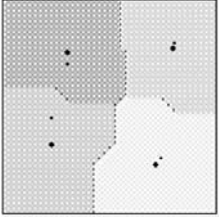
В тестах 3 и 4 можно проследить, как ограничения на мощности подмножеств (4) влияют на расположение центров подмножеств и на разбиение. Подмножества, составляющие оптимальное разбиение в динамической задаче ОРМ, могут быть несвязными, о чем свидетельствуют результаты теста 5. Здесь форму границ между подмножествами существенно определяет функция начальных условий, которая в данном примере является периодической. В модельных задачах 6 и 7 функции $c(\tau, x, t)$ задавались в виде $c(\tau, x) = |\tau_1 - x_1| + |\tau_2 - x_2|$ и $c(\tau, x) = \max(|\tau_1 - x_1|, |\tau_2 - x_2|)$ соответственно, что определенным образом сказало и на границах между подмножествами, составляющих оптимальное разбиение, и на оптимальном размещении центров подмножеств.

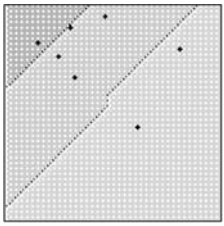
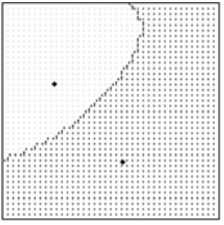
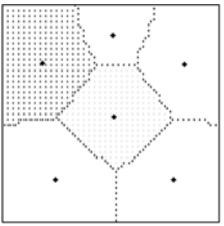
В отличие от предыдущих модельных задач в тестах 8 и 9 функция стоимости $c(\tau, x, t)$ зависит явно от временной переменной: $c(\tau, x, t) = e^{0.3t} \sqrt{(\tau_1 - x_1)^2 + (\tau_2 - x_2)^2}$ и $c(\tau, x, t) = e^{-0.3t} \sqrt{(\tau_1 - x_1)^2 + (\tau_2 - x_2)^2}$ соответственно, что существенно отразилось и на значении целевого функционала, и на форме границ между подмножествами.

Анализируя полученные результаты, можно заметить, что почти во всех задачах с точностью, не превышающей 10^{-3} , выполняется соотношение двойственности $I^* = \chi^*$. Исключение составляет лишь результат теста 8, что объясняется порядком исходных данных. Хотя и в этом случае относительная погрешность, с которой выполняется указанное равенство, составляет 2 %.

Отметим, что в процессе реализации алгоритма при вычислении компонент вектора обобщенного градиента $(g_{\tau}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}), g_{\xi}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}))$ применялись аналитические выражения этих компонент. Погрешность их вычисления состояла только из погрешности, допускаемой за счет приближенного нахождения значения определенных интегралов, входящих в указанные аналитические выражения. При реализации алгоритма компоненты вектора обобщенного градиента можно вычислять и приближенно, используя формулы численного дифференцирования. Но это может оказаться еще одним существенным фактором, влияющим на погрешность вычислений, и вызывать значительные расхождения результатов решения модельных задач, что подтверждено экспериментально. Применение формул численного дифференцирования для приближенного вычисления частных производных целевой функции (16) существенно сказывается и на продолжительности процесса решения динамической задачи оптимального разбиения. Время вычислений при этом в несколько раз превышает время, за которое находится оптимальное решение задачи в случае, когда компоненты вектора обобщенного градиента вычисляются хотя и приближенно, но на основе аналитических их выражений.

Таблица 1. Результаты вычислительных экспериментов

Номер теста	Исходные данные	Значения функционалов χ и I_1	Оптимальные значения координат центров подмножеств	Оптимальное разбиение
1	2	3	4	5
1	$\rho_0(x, y) = 4$ $b_1 = 50$ $b_2 = 50$ $\tau_1 = (0.0, 0.25)$ $\tau_2 = (0.0, 0.79)$	$\chi^* = 2.31560$ $I_1^* = 2.3159$	$\tau_1 = (0.443, 0.251)$ $\tau_2 = (0.504, 0.75)$	
2	$\rho_0(x, y) = 1$ $b_0 = 50$ $b_1 = 50$ $\tau_1^{(0)} = (0.3, 0.3)$ $\tau_2^{(0)} = (0.8, 0.2)$	$\chi^* = 0.59771$ $I_1^* = 0.59820$	$\tau_1 = (0.265, 0.509)$ $\tau_2 = (0.767, 0.519)$	
3	$\rho_0(x, y) = 3$ $b_1 = 20$ $b_2 = 0.7$ $b_3 = 2.0$ $\tau_1^{(0)} = (0.3, 0.3)$ $\tau_2^{(0)} = (0.8, 0.2)$ $\tau_3^{(0)} = (0.0, 0.0)$	$\chi^* = 1.8772$ $I_1^* = 1.8753$	$\tau_1 = (0.497, 0.335)$ $\tau_2 = (0.911, 0.641)$ $\tau_3 = (0.299, 0.811)$	
4	$\rho_0(x, y) = 3$ $b_1 = 0.6$ $b_2 = 10$ $b_3 = 0.4$ $b_4 = 10$	$\chi^* = 0.56505$ $I_1^* = 0.56523$	$\tau_1 = (0.178, 0.169)$ $\tau_2 = (0.704, 0.324)$ $\tau_3 = (0.844, 0.772)$ $\tau_4 = (0.295, 0.724)$	
5	$\rho_0 = \sin(0.5xy) + 1$ $b_1 = 50$ $b_2 = 50$ $\tau_1^{(0)} = (0.3, 0.3)$ $\tau_2^{(0)} = (0.8, 0.2)$	$\chi^* = 0.49994$ $I_1^* = 0.50014$	$\tau_1 = (0.197, 0.523)$ $\tau_2 = (0.876, 0.432)$	
6	$\rho_0(x, y) = 10$ $b_1 = 50$ $b_2 = 50$ $b_3 = 100$ $b_4 = 20$	$\chi^* = 12.495$ $I_1^* = 12.491$	$\tau_1 = (0.296, 0.242)$ $\tau_2 = (0.709, 0.226)$ $\tau_3 = (0.225, 0.678)$ $\tau_4 = (0.710, 0.768)$	

1	2	3	4	5
7	$\rho_0(x, y) = 3$ $b_1 = 0.8$ $b_2 = 10$ $b_3 = 4$ $b_4 = 0$ $\tau_1^{(0)} = (0.3, 0.3)$ $\tau_2^{(0)} = (0.8, 0.2)$ $\tau_3^{(0)} = (0.1, 0.5)$ $\tau_4^{(0)} = (0.245, 0.235)$	$\chi^* = 2.45119$ $I_1^* = 2.44955$	$\tau_1 = (0.153, 0.174)$ $\tau_2 = (0.614, 0.565)$ $\tau_3 = (0.321, 0.330)$ $\tau_4 = (0.245, 0.235)$	
8	$\rho_0(x, y) = 500$ $b_0 = 300$ $b_1 = 400$ $\tau_1^{(0)} = (0.3, 0.3)$ $\tau_2^{(0)} = (0.8, 0.2)$	$\chi^* = 82730.1$ $I_1^* = 80584.5$	$\tau_1 = (0.238, 0.374)$ $\tau_2 = (0.550, 0.733)$	
9	$\rho_0(x, y) = 1$ $b_0 = 0.9$ $b_1 = 0.5$ $b_2 = 0.2$ $b_3 = 1$ $b_4 = 2.2$ $b_5 = 1.5$	$\chi^* = 0.04618$ $I_1^* = 0.04626$	$\tau_1 = (0.514, 0.510)$ $\tau_2 = (0.184, 0.267)$ $\tau_3 = (0.506, 0.138)$ $\tau_4 = (0.836, 0.271)$ $\tau_5 = (0.786, 0.804)$ $\tau_6 = (0.242, 0.803)$	

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе приведена математическая постановка динамической задачи ОРМ n -мерного пространства с размещением центров подмножеств, которая характеризуется наличием интегральных ограничений на фазовую траекторию. Исследованы условия существования оптимального решения указанной задачи. Приведен метод и численный алгоритм ее решения. Проанализированы результаты решения модельных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. — Киев: Наук. думка, 2005. — 564 с.
2. Киселева Е.М., Коряшкіна Л.С., Шевченко Т.А. О динамической задаче оптимального разбиения множеств с интегральными ограничениями // Проблемы управления и информатики. — 2013. — № 4. — С. 33–44.
3. Кисельова О.М., Коряшкіна Л.С., Шевченко Т.О. Напрямки розвитку динамічних задач оптимального розбиття множин // Системний аналіз та інформаційні технології: Матеріали 12-ї Міжнар. наук.-практ. конф. SAIT 2010 (Київ, 25–29 тр. 2010 р.). — К.: ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», 2010. — С. 98.
4. Коряшкіна Л.С., Шевченко Т.О. Нові підходи до розв'язання динамічної задачі оптимального розбиття множини // Питання прикладної математики і математичного моделювання: Зб. наук. праць, 2009. — С. 220–231.
5. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. — М.: Факториал Пресс, 2002. — 824 с.
6. Шор Н.З., Журбенко Н.Г., Лиховид А.П., Стецюк П.И. Развитие алгоритмов недифференцируемой оптимизации и их приложения // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 4. — С. 80–94.
7. Стецюк П.И. r -алгоритмы и эллипсоиды // Там же. — 1996. — № 1. — С. 113–134.
8. Стецюк П.И. Приближенный метод эллипсоидов // Там же. — 2003. — № 3. — С. 141–146.

Поступила 15.07.2013