УДК 330.115

А.А. ГАЙВОРОНСКИЙ, Ю.М. ЕРМОЛЬЕВ, П.С. КНОПОВ, В.И. НОРКИН

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КАТАСТРОФИЧЕСКИХ И ТЕРРОРИСТИЧЕСКИХ РИСКОВ[1]

Аннотация. Показана возможность применения математического аппарата теории управляемых марковских полей для моделирования катастрофических рисков, вызванных природными явлениями или террористическими угрозами. Приведены примеры постановок задач долгосрочного инвестирования в безопасность. Дан обзор методов решения возникающих задач стохастического оптимального управления. Показана возможность сведения этих задач к конечномерным задачам стохастического программирования и решения их методом стохастических квазиградиентов.

Ключевые слова: катастрофический риск, террористическая угроза, управляемое марковское поле, случайное поле с локальным взаимодействием, гиббсовское поле, стохастическое программирование, метод стохастических квази-градиентов.

ВВЕДЕНИЕ

Последние декады прошедшего столетия и начало нынешнего были отмечены возрастающими, часто невосполнимыми материальными потерями от землетрясений, ураганов, засух, наводнений, эпидемий, выбросов радиоактивных и химических загрязнителей, терроризма, локальных войн, техногенных и финансовых катастроф. Во многом это связано с игнорированием или недооценкой рисков. Стремление к экономической эффективности работы систем без учета факторов риска во многих случаях усугубляет последствия катастроф. Существенно нелинейный характер возникновения редких катастрофических событий часто игнорируется при анализе многокомпонентных и распределенных систем, когда дополнительные затраты на повышение живучести компонентов кажутся неоправданными в силу незначительной вероятности отказов отдельных элементов. Интегрированные подходы к управлению катастрофическими рисками требуют нелинейных моделей, в частности существенного пересмотра моделей экономического роста, основанных на линейной теории ожидаемой полезности. Важная особенность катастрофических рисков связана с возможностью банкротства финансовых и страховых компаний, инвесторов, заемщиков и несостоятельностью правительств абсорбировать катастрофические потери на национальном уровне. Например, традиционное страхование [1, 2] оперирует независимыми, относительно небольшими рисками, например автомобильными авариями, для которых решения по премиям, оценки функций распределения требований и вероятности разорения могут быть вычислены на основе исторических данных. Закон больших чисел и центральная предельная теорема оправдывают простую стратегию выбора портфеля страховых договоров — чем больше рисков, тем лучше. Катастрофические риски требуют новых подходов к формированию портфеля страховой компании. Катастрофы порождают сильнокоррелированные потери в пространстве и времени, зависящие от концентрации людей, капитала и характера страховых договоров. Закон больших чисел уже неприменим к таким рискам, и традиционная стратегия формирования портфеля (чем больше рисков — тем лучше) может только увеличить вероятность разорения. Задача выбора страхового портфеля в этом случае трансформируется в сложную задачу отбора рисков. Одним из наиболее перспективных подходов к оцениванию зависимых катастрофических рисков является моделирование катастроф [3–5], которое позволяет исследо-

[1]Работа поддержана грантом Норвежского центра по международному сотрудничеству в области образования (Norwegian Centre for International Cooperation in Education (SIU)), Норвежско-Украинский проект CPEALA-2012/10052.

вать возможные сценарии катастроф, генерировать случайные реализации страховых требований и анализировать влияние различных факторов на стабильность и живучесть страховых компаний.

Отметим, что всеобъемлющее внедрение мер безопасности, направленных на снижение риска и последствий террористических атак, может потребовать весьма значительных затрат, которые лягут серьезным бременем на экономику страны. Такие меры могут включать, например, усиление визового, таможенного и финансового контроля, внедрение дополнительных мер безопасности в аэропортах, на транспорте, ключевых объектах инфраструктуры, в общественных местах, дополнительных мер обеспечения кибербезопасности, развертывания сил и средств для ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций и т.д.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КАТАСТРОФ

С формальной точки зрения удобной математической моделью для описания катастроф является модель марковского случайного процесса или марковского случайного поля, заданного на графе (V, E) с множеством вершин $V = 1, 2, \dots K$ и множеством дуг $E = \{(i, j)\}$. Если понятие марковского случайного процесса с дискретным или непрерывным временем широко известно специалистам, использующим вероятностные методы для моделирования и решения различных прикладных задач, то марковские случайные поля, заданные на графах, еще не нашли столь широкого применения. Поэтому, на наш взгляд, имеет смысл пояснение обоснованности использования марковских случайных полей при решении широкого спектра прикладных проблем, например при решении задач оценки катастрофических рисков. При этом множество вершин графа может характеризовать основные источники катастрофических потерь: экономико-географические районы, сейсмические разрезы, бассейны рек, такие важные объекты, как плотины, мосты, газопроводы, дома или населенные пункты. Если определить для каждой вершины k ее окрестность $N(k) = \{j: (k, j) \in E\}$, то очевидно, что разрушения в вершине k будут генерировать разрушения в окрестности $N(k)$. Если ввести понятие марковости таким образом, чтобы распределение потерь в точке k было зависимо лишь от потерь в окрестности $\hat{N}(k) = k \cup N(k)$, то подобная модель при весьма общих условиях описывается гиббсовким случайным полем и поставленная задача моделирования и оценки риска сводятся к известным методам моделирования и оптимизации гиббсовских случайных полей. Как для моделей, описанных марковскими случайными процессами, так и для моделей, описанных марковскими случайными полями, возникает необходимость нахождения оптимальных решений, при этом широко используются современные методы стохастической оптимизации [6–8], управляемых случайных процессов [9–16] и управляемых случайных полей. Отметим, что в то время как теория стохастической оптимизации и теория управляемых случайных процессов достаточно полно представлены в многочисленной литературе научного и учебного характера, ситуация с освещением теории управляемых случайных полей совсем иная. Число публикаций в этой области пока сравнительно невелико. Ряд результатов, касающихся общей теории управляемых случайных полей и, в частности, марковских случайных полей [17–21], получен в работах [22–25]. В них рассмотрены задачи оптимального управления такими полями, доказано существование оптимальных марковских стационарных стратегий для функций риска достаточно общего вида. Очевидно, что эти исследования могут иметь непосредственное применение к описанным выше задачам оценки риска для достаточно общих моделей финансовой и страховой математики.

Возвратимся к общей проблеме оценки катастрофических рисков для систем, описываемых марковскими случайными процессами или полями. Здесь не будем отдельно описывать системы, моделируемые случайными процессами или полями, рассмотрим лишь системы, описываемые случайными полями, при этом заметим, что модель марковского случайного процесса является частным случаем этой модели, когда множество вершин соответствующего графа состоит из одной точки.

Предположим, что возможные состояния x_i^t и потери z_i^t системы в вершине i в момент времени t определяются случайным процессом (например, природной катастрофой) ξ^t с возможными состояниями $y \in Y$. Обозначим $H^i(x_i^t, z_i^t \mid x_{\hat{N}(i)}^{t-1}, z_{\hat{N}(i)}^{t-1}, y; u_{\hat{N}(i)}^{t-1})$ условные распределения пары (x_i^t, z_i^t) в момент времени t при условии, что в предыдущий момент времени состояния и потери в окрестности $\hat{N}(i)$ были $(x_{\hat{N}(i)}^{t-1}, z_{\hat{N}(i)}^{t-1})$, процесс ξ^{t-1} был в состоянии y, а также приняты решения (управления) $u_{\hat{N}(i)}^t$. Такое распределение определяет динамику изменений в системе согласно следующему соотношению:

$$p(t, x_i^t, z_i^t) = \sum_{y \in Y} H^i(x_i^t, z_i^t \mid x_{\hat{N}(i)}^{t-1}, z_{\hat{N}(i)}^{t-1}, y; u_{\hat{N}(i)}^{t-1}) P(\xi^{t-1} = y), \tag{1}$$

где $p(t, x_i^t, z_i^t)$ — распределение пар (x_i^t, z_i^t) в момент времени t для вершины i.

Для того чтобы окончательно определить динамику изменения состояний системы, которая характеризуется соотношением (1), необходимо зафиксировать начальное распределение состояний $p(0, x_i, z_i)$ для всех $i = 1, \ldots, K$.

Уравнение (1) вместе с данными для начального момента времени позволяют рассчитать $p(t, x, z)$ для любого $t \geq 0$. Действительно, учитывая сложность предложенной системы, практически невозможно получить аналитический вид формулы для расчета $p(t, x, z)$ как функции от (x, z) (и управлений $u = (u_{\hat{N}(i)}^0, \ldots, u_{\hat{N}(i)}^{t-1})$). Существование ее аналитического вида обеспечило бы достаточно простой инструментарий для анализа таких моделей. Очевидно, что для решения конкретных задач оценки катастрофических рисков необходимо конкретизировать процесс ξ^{t-1}, функции перехода $H^i(\cdot)$ и описать множества возможных состояний x_i^t потерь z_i^t и управлений u_i^t для вершин $i \in V$ в момент времени t.

В то время как модели управляемых марковских процессов хорошо известны и широко применяются, модели и результаты по управляемым марковским случайным полям не только малочисленны и малоизвестны, но и содержат много открытых вопросов, особенно относительно практического применения. В настоящей статье авторы, опираясь на результаты собственных исследований, попытались обобщить опыт применения современного аппарата управляемых марковских полей к актуальным задачам моделирования и управления распределенными катастрофическими рисками и угрозами.

МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ДОЛГОСРОЧНЫМИ ИНВЕСТИЦИЯМИ В БЕЗОПАСНОСТЬ

Рассмотрим примеры моделей оптимального управления долгосрочными инвестициями в безопасность, описываемых случайными процессами или полями.

1. Точечная модель. Рассмотрим модели экономического роста с дискретным временем и долгосрочными инвестициями в меры безопасности. Предположим, что экономика растет экспоненциально быстро, но со случайной скоростью. Иногда происходят (случайные) катастрофы, которые уменьшают доходы и/или темпы роста экономики [26, 27]. Инвестиции в меры защиты (безопасности) могут снизить интенсивность/вероятность спонтанных катастрофических событий (например, террористические атаки) и смягчить их последствия, но при этом выводят ресурсы из экономики и, следовательно, могут замедлить экономический рост. Рассмотрим простейшую мультипликативную модель экономического роста, в которой темпы роста зависят от случайных катастрофических событий:

$$x_{t+1} = (x_t - u_t)(1 + r_t)(1 - \xi_t(x_t, u_t)), \ x_0 = x, \ t = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

где x_t — уровень валового продукта экономики; r_t — случайный темп роста экономики, распределенный как некоторая случайная величина r; u_t — инвестиции в безопасность; $\xi_t(x_t, u_t)$ — случайный коэффициент ущерба от катастрофических событий или террористических атак в период времени t,

$$\xi^t(x, u) = \begin{cases} 0 & \text{с вероятностью } 1 - p(x, u), \\ \xi_t & \text{с вероятностью } p(x, u), \end{cases}$$

$\{\xi_t \ge 0\}$ — (независимые) коэффициенты ущерба, распределенные как некоторая случайная величина $\xi \ge 0$; $p(x, u)$ — вероятность катастрофического события или атаки в единицу времени при уровне экономического развития x и инвестициях в безопасность u.

Пусть $u = (u_0, u_1, \ldots)$ — стратегия управления и $\tau = \sup\{t : \min_{0 \le k < t} x_k \ge x_{\min}\}$ — момент неприемлемого падения уровня экономики (ниже уровня $(1-\alpha)x_0 \ge 0$). Обозначим $F(x, u) = \mathbf{E}\sum_{k=0}^{\tau} \gamma^k f(x_k)$, где $f(\cdot)$ — некоторая функция полезности. Например, если $f(x_k) = 1$ при $x_k \ge x_{\min}$, а $f(x_k) = 0$ в противном случае, то $F(x, u)$ выражает среднее дисконтированное время жизни экономической системы до момента экономического краха. Обозначим $\mathbf{U}$ множество таких стратегий управления $u = (u_0, u_1, \ldots)$, что $u_k \in [0, x_{\min}]$. Задача стохастического оптимального управления долгосрочными инвестициями в безопасность состоит в максимизации критерия $F(x, u)$:

$$\left[F(x, u) = \mathbf{E}\sum_{k=0}^{\tau} \gamma^k f(x_k) \right] \to \sup_{u \in \mathbf{U}}. \tag{3}$$

Обозначим $V(x) = \sup_{u \in \mathbf{U}} F(x, u)$, $x \ge x_{\min}$. Доопределим $V(x) = 0$ для $x < x_{\min}$. Уравнение оптимальности Беллмана для задачи (2), (3), имеет вид

$$V(x) = \sup_{u \in [0, x_{\min}]} \left[\begin{aligned} & f(x) + \gamma(1 - p(x, u))\, \mathbf{E}_r V((x-u)(1+r)) + \\ & \qquad + \gamma p(x, u)\, \mathbf{E}_{r\xi} V((x-u)(1+r)(1-\xi)) \end{aligned} \right], \tag{4}$$

где $\mathbf{E}_r$, $\mathbf{E}_{r\xi}$ — математические ожидания по r и (r, ξ) соответственно. Если функция $p(x, u)$ непрерывна, а $f(x)$ полунепрерывна сверху и $f(x) \le C < +\infty$, то уравнение (4) может быть исследовано стандартными методами теории динамического программирования [9–15]. В частности, уравнение (4) при $r \le R$ (R — константа) может быть численно решено методом последовательных приближений:

$$V_{k+1}(x) = \sup_{u \in [0, x_{\min}]} \left[\begin{aligned} & f(x) + \gamma(1 - p(x, u))\, \mathbf{E}_r V_k((x-u)(1+r)) + \\ & \qquad + \gamma p(x, u)\, \mathbf{E}_{r\xi} V_k((x-u)(1+r)(1-\xi)) \end{aligned} \right],$$

$$V_0(x) = f(x), \ k = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

Приближенно оптимальное управление $u_k^*(x)$ (в чистых стратегиях) может быть найдено, как решение задачи максимизации в правой части (5).

Дальнейшее развитие изложенного подход к оптимальному управлению инвестициями в безопасность состоит в использовании вместо (2) более детальных динамических моделей экономического роста, например шоковых моделей из [26, 27], где показано, что такие модели могут быть исследованы методами страховой математики. Одним из способов купирования рисков является страхование. Например, инвестирование средств u в пропорциональный договор страхования меняет коэффициент ущерба ξ в модели (2)–(5) на $\alpha(u)\xi$, где множитель $\alpha(u) \in [0, 1)$ зависит от величины инвестированных средств. Более детально этот вопрос обсуждается в [5].

Другой тип целевой функции задается выражением

$$F(x, u) = \lim_{N \to \infty} \inf \mathbf{E} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} f(x_k) \to \max_{u \in U}. \tag{6}$$

При $f(x) \le C < +\infty$ критерий (6) характеризует среднюю полезность в единицу времени при бесконечном функционировании системы.

Следует заметить, что критерий (6) более сложен для исследования. Это связано с тем, что он по своей структуре не обладает свойством аддитивности и для него нельзя выписать уравнение Беллмана. Но в действительности оба эти критерия при определенных условиях взаимосвязаны, а уравнение оптимальности можно выписать для некоторой модификации исходной задачи. Этот метод был использован Р. Ховардом [10], который предложил изящный алгоритм для нахождения оптимальных решений.

2. Обобщение на пространственную модель. Предположим теперь, что экономическая система имеет пространственную структуру (с уровнями богатства $\{x_i, i \in V\}$), т.е. представима в виде графа $G = (V, E)$ с множеством вершин V и связей E. Обозначим $N(i)$ вершины j, соединенные с i: $\hat{N}(i) = N(i) \cup i$. В случайные моменты времени (например, согласно пуассоновскому потоку интенсивности λ_i или биноминальному потоку в дискретном времени с вероятностями p_i) в каждой вершине $i \in V$ может произойти катастрофическое событие или террористическая атака (независимо от событий в других вершинах), которые характеризуются случайной величиной ξ_i. Предположим, что некоторые ресурсы u_{ij} вычитаются из x_i и затем инвестируются в меры безопасности в вершину $j \in N(i)$. Полные инвестиции в меры безопасности в вершине j составляют $u_j = \sum_{i \in \hat{N}(j)} u_{ij}$. Инвестиции в меры безопасности уменьшают интенсивность атак, которая теперь зависит от инвестиций, т.е. $\lambda_i = \lambda_i(x_i, u_i)$ (аналогично для дискретного времени $p_i = p_i(x_i, u_i)$). Кроме того, инвестиции в меры защиты в узле i могут уменьшать ущербы с коэффициентом пропорциональности

$$\xi_i(x_i, u_i) = \begin{cases} 0 \quad \text{с вероятностью } 1 - p(x_i, u_i), \\ \zeta_i(x_i, u_i) \ \text{с вероятностью } p(x_i, u_i). \end{cases}$$

Предположим, что темпы экономического развития ρ_i^t в узле i зависят от собственных индикаторов роста $(1 + r_i)$ и ущерба $(1 - \xi_i)$ и факторов роста/ущерба в соседних узлах, т.е. $\rho_i^t = \rho_i^t\left(r_{\hat{N}(i)}^t, \xi_{\hat{N}(i)}^t\right)$. Действительно, темпы роста экономики небольших стран существенно зависят от темпов роста ведущих экономик или мировой экономики в целом. Такую зависимость можно количественно отследить эконометрическими методами. Например, ρ_i^t может определяться средним индикатором в соседних узлах: $\rho_i^t = \sum_{j \in \hat{N}(i)} w_j (1 + r_j^t)(1 - \xi_j^t)$, $w_j \ge 0$, $\sum_{j \in \hat{N}(i)} w_j = 1$, минимальным индикатором: $\rho_i^t = \min\limits_{j \in \hat{N}(i)} (1 + r_j^t)(1 - \xi_j^t)$ или максимальным индикатором: $\rho_i^t = \max\limits_{j \in \hat{N}(i)} (1 + r_j^t)(1 - \xi_j^t)$ роста в соседних узлах.

Соответствующая динамическая модель экономики в дискретном времени имеет вид

$$x_i^{t+1} = (x_i^t - u_i^t)\rho_i^t(r_{\hat{N}(i)}^t, \xi_{\hat{N}(i)}^t), \ x_i^0 = x_i, \ t = 0, \dots, T-1,$$

где $r_{\hat{N}(i)}^t = (r_j^t, j \in \hat{N}(i))$ — совокупность случайных индикаторов роста в узлах $\hat{N}(i)$; $\xi_{\hat{N}(i)}^t$ — совокупность показателей ущерба в узлах $\hat{N}(i)$ в период времени t от атаки на узел i или на соседние узлы $j \in N(i)$; $u_i^t = \sum_{j \in \hat{N}(i)} u_{ji}^t$ — инвестиции в безопасность в узле i из самого узла i и из соседних узлов $j \in N(i)$. Зависимость благосостояния данного узла i сети от соседей может побудить узел i делать инвестиции $u_{ij} > 0$ в соседние узлы $j \in N(i)$.

Целевой функционал для оптимизации расходов на безопасность может иметь вид

$$\vec{F}(x, u) = \mathbf{E}\sum_{k=0}^{T} \gamma^{k} \sum_{i\in V} \vec{f}_i (x_i^t) \to \max_{u\in U} \qquad (7)$$

или

$$\vec{F}(x, u) = \lim_{T\to\infty} \inf \mathbf{E}\, \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^{T} \sum_{i\in V} \vec{f}_i (x_i^t) \to \max_{u\in U}, \qquad (8)$$

где $\vec{f}_i(\cdot)$ — векторная функция полезности капитала в узле i; $\gamma \in (0,1]$ — дисконтирующий множитель; $\mathbf{E}$ — математическое ожидание, $x = \{x_i, i \in V\}$, $u = \{u_{ij}, i \in V, j \in V\}$, $U = \{u_{ij} \geq 0 : \sum_{j\in \hat{N}(i)} u_{ij} \leq x_i, i \in V, j \in V\}$. Задачи (7), (8) являются многокритериальными, причем компоненты векторной функции полезности $\vec{f}_i(\cdot)$ могут отражать различные аспекты полезности и риска в узле *i*. Проблема состоит в построении парето-оптимальных множеств для таких задач. Это можно сделать, решая, например, семейство однокритериальных задач оптимального управления с линейно-агрегированным критерием.

Таким образом, проблема оптимального инвестирования в безопасность сведена к решению некоторой задачи оптимального управления случайным полем, заданным на конечном графе. При этом возникают вопросы, связанные с нахождением условий существования оптимальных решений в том или ином классе управлений, определением самих оптимальных управлений в явном виде или разработкой численных алгоритмов для их нахождения. Как и для точечной модели, для скалярных сверток первого критерия (7) можно выписать уравнение оптимальности и решать его методом последовательных приближений. Для сверток второго критерия (8), как и для точечных моделей, уравнение Беллмана выписать невозможно. Кроме того, возникает проблема нахождения условий, когда в том или ином классе управлений существует оптимальное решение. Особо интересны условия, когда оптимальное управление стационарно и зависит только от конечного числа параметров. Альтернативная возможность состоит в аппроксимации оптимального управления отрезком ряда разложения по некоторому базису с переменными (искомыми) коэффициентами. Подставляя найденную параметрическую форму управления в целевые функции (3), (6)–(8), сводим задачи (3), (7) к задачам конечномерного нелинейного стохастического программирования, а (6), (8) — к предельным экстремальным стохастическим задачам, для которых имеются эффективные методы квазиградиентного типа [6, 7].

ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Выше были изложены примеры и эвристические рассуждения относительно возможности использования марковских случайных процессов и полей для моделирования риска возникновения катастрофических ситуаций в различных сферах деятельности. Остановимся более подробно на изложении математического аппарата, который может быть использован для решения указанных выше проблем. Здесь не будем приводить факты, касающиеся теории управляемых случайных процессов. Как было отмечено, они достаточно полно изложены в работах [9–16]. Заметим, что случайные управляемые процессы с дискретным временем могут рассматриваться как частный случай управляемых случайных полей с дискретным временем и заданных на вырожденном графе, т.е имеющим лишь одну вершину. Заметим также, что понятие случайного поля подразумевает значительно более широкий класс случайных объектов, чем случайные поля на графах. Случайным полем называют также случайные функции с многомерным аргументом, причем он может быть как дискретным, так и непрерывным. Такие случайные поля в данной статье не рассматриваем; отметим только, что теория случайных полей как случайных функций с многомерным аргументом достаточно интенсивно развивается, хотя и в этом случае теория управляемых случайных полей развита в недостаточной мере. Перейдем к изложению результатов.

Для систем с локально взаимодействующими координатами структура взаимодействия определяется графом $G=(V,B)$ с множеством вершин V и множеством ребер B. Обозначим $\{k, j\}$ ребро графа, которое соединяет вершины k и j. Окрестность вершины k — это множество вершин $N(k)=\{j:\{k, j\}\in B\}$. Полная окрестность вершины k — это $\widetilde{N}(k)=N(k)\cup\{k\}$, т.е. окрестность вершины k и сама вершина k. Для произвольного подмножества вершин $K\subset V$ определим его окрестность $N(K)=\bigcup_{k\in K} N(k)$ и полную окрестность $\widetilde{N}(K)=N(K)\cup K$. Пусть для каждой вершины $i\in V$ имеем $(X_i, \mathbf{X}_i)$ — некоторое компактное метрическое пространство с борелевской σ-алгеброй $\mathbf{X}_i$. Множество X_i (соответственно $(X_i, \mathbf{X}_i)$) называется локальным пространством в вершине i. Далее поставим в соответствие $X:=\underset{i\in V}{\times} X_i$ минимальную σ-алгебру-произведение $\mathbf{X}=\sigma\left\{\underset{i\in V}{\times}\mathbf{X}_i\right\}$, сгенерированную $\underset{i\in V}{\times}\mathbf{X}_i$. Множество X (соответственно $(X, \mathbf{X})$) назовем глобальным пространством состояний системы. Для произвольного подмножества вершин $K\subseteq V$ обозначим маргинальный вектор x_K состояния x: $x_K=(x_k, k\in K)\in X_K=\underset{i\in K}{\times} X_i$.

Определим для $K\subset V$ σ-поле $\mathbf{X}_K=\sigma\left\{\underset{i\in K}{\times}\mathbf{X}_i\right\}=\underset{i\in K}{\otimes}\mathbf{X}_i$, сгенерированное $\underset{i\in K}{\times}\mathbf{X}_i$; таким образом, $X_V=X$.

Далее везде рассматриваем фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \Im, P)$, на котором определены все случайные величины. Введем некоторые определения и понятия, используемые в дальнейшем [17–19, 24].

Определение 1 (случайное поле). Случайная величина ξ: $(\Omega, \Im, P)\to$ $\to(X, \mathbf{X})=\left(\underset{i\in V}{\times} X_i, \underset{i\in K}{\otimes}\mathbf{X}_i\right)$ называется случайным полем над $\Gamma=(V,B)$ (или просто случайным полем над V). Маргинальные случайные величины со значениями в пространстве X_K обозначим ξ_K (ξ_k для $K=\{k\}$).

Определение 2. Случайное поле ξ над (V,B) является марковским, если для произвольного $k\in V$ имеет место

$$P(\xi_k\in C_k|\xi_{V-\{k\}}=x_{V-\{k\}})=P(\xi_k\in C_k|\xi_{N(k)}=x_{N(k)})\quad\forall x\in X,\ C_k\in\mathbf{X}_k,$$

где $P(\xi_k\in C_k|\xi_{N(k)}=x_{N(k)})$ (соответственно $P(\xi_k\in C_k|\xi_{V-\{k\}}=x_{V-\{k\}})$) — условная вероятность на $(X_k, \mathbf{X}_k)$ при условии $\xi_{N(k)}=x_{N(k)}$ (соответственно $\xi_{V-\{k\}}=x_{V-\{k\}}$).

Во многих задачах, связанных с биологическими, экономическими и инженерными реализациями, случайные поля описывают мгновенное состояние системы для некоторого фиксированного времени. Эволюция такой системы во времени описывается стохастическим процессом ξ с одномерным временем. В этом случае записываем $\xi=\xi^t$, чтобы отметить зависимость от времени.

Пусть t принимает дискретные значения: $t=0,1,\ldots$ Для величины ξ_k^t индекс k обозначает вершину; таким образом, ξ_k^t обозначает случайное значение для времени t в вершине k некоторого векторнозначного процесса $\xi=\{\xi^t: t=0,1,\ldots\}$ с пространством состояний $(X, \mathbf{X})$. В этом разделе рассматриваются только марковские процессы с дискретным временем.

Определение 3 (локальные переходные вероятности). Пусть $\xi=\{\xi^t$, $t=0,1,\ldots\}$, $\xi^t:(\Omega, \Im, P)\to(X, \mathbf{X})$ — марковский процесс с дискретным временем и пространством состояний $(X, \mathbf{X})$. Переходные вероятности ξ называются локальными, если

$$P\{\xi_k^{t+1} \in C_k \mid \xi^t = x^t, \ldots, \xi^0 = x^0\} = P\{\xi_k^{t+1} \in C_k \mid \xi^t_{\widetilde{N}(k)} = x^t_{\widetilde{N}(k)}\} \tag{9}$$

для $k \in V$, $x^0, \ldots, x^{t+1} \in X$, $C_k \in X_k$ справедливо $P^{(\xi^t, \ldots, \xi^0)}$-почти наверное, т.е. переходная вероятность в вершине k зависит только от состояния процесса в ее полной окрестности в предыдущий момент времени. Марковский случайный процесс $\xi = \{\xi^t, t = 0, 1, \ldots\}$ с локальными переходными вероятностями, удовлетворяющими условию (9), будем также называть марковским случайным полем.

В определении 3 понятие марковости предполагает, что поведение случайного поля на некотором подграфе K графа G при фиксированном значении поля в окрестности вершин $N(k) = \{j: \{k, j\} \in B\}$ не зависит от поведения поля вне подграфа K. В определении 3 понятие марковости связано с тем, что один из аргументов поля интерпретируется как время, а остальные аргумены являются вершинами графа. Это поле действительно можно рассматривать как обычный марковский процесс, состояние которого в каждый момент времени является случайным полем. Однако такая интерпретация не всегда адекватна реальным явлениям. Более плодотворным является понятие марковского поля как марковского процесса с локальным взаимодействием в смысле определения 3. Типичная ситуация для таких процессов следующая: система состоит из конечного или бесконечного числа частиц, развитие которых в случае отсутствия взаимодействия описывается независимыми цепями Маркова. На эволюцию этой системы налагается некоторая связь. Поэтому эволюция каждой частицы не будет марковской, хотя эволюция всей системы имеет свойство марковости, но это достаточно сложный марковский процесс. В [18, 19] показано, что понятие марковости в смысле определений 2 и 3 тесно между собой связаны и определение марковости в смысле (9) так называемым симметричным удвоением, описанным в [19], можно свести к определению марковости в смысле определения 2.

Определение 4 (локальные и синхронные переходные вероятности). Рассмотрим марковские случайные поля, у которых переходные вероятности ξ являются синхронными, т.е. обладают следующим свойствами:

$$P\{\xi_K^{t+1} \in C_K \mid \xi^t = x^t\} = \prod_{k \in K} P\{\xi_k^{t+1} \in C_k \mid \xi^t = x^t\} \;\; P^{\xi^t}\text{-почти наверное} \tag{10}$$

$\forall K \subset V$, $x^t \in X$, $C_K = \underset{k \in K}{\times} C_k \in \mathbf{X}_K$. Если переходные вероятности случайного процесса ξ удовлетворяют условиям (9) и (10), то он называется марковским процессом с локально взаимодействующими и синхронными компонентами.

Локальные стратегии. Изложим некоторые понятия, приведенные в [24], относительно множеств состояний и управлений.

1. Пусть в моменты перехода $t = 0, 1, \ldots$ множества допустимых решений зависят от локальной истории только в соответствии с определением 3 и решения α_i^t в вершине i принимаются в соответствии с вероятностью π_i^t, основываясь только на локальной истории $h_i^t = \left(x^0_{\widetilde{N}(i)}, a_i^0, \ldots, x^{t-1}_{\widetilde{N}(i)}, a_i^{t-1}, x^t_{\widetilde{N}(i)} \right)$ состояний окрестности $\widetilde{N}(i)$ вершины i и на предыдущих решениях в вершине i. Если $\pi_i^t(A_i^t(h_i^t) \mid h_i^t) = 1$, то стратегия π_i^t называется локально допустимой и последовательность вероятностей перехода (решений) $\pi_i = \{\pi_i^t, t \in N\}$ называется допустимой локальной стратегией для вершины i.

Будем называть $\pi = (\pi_i, i \in V)$ допустимой локальной стратегией для модели принятия решения.

2. Допустимая локальная стратегия $\pi = (\pi_i, i \in V)$ называется допустимой локальной марковской стратегией, если

$$\pi_i^t\left(\cdot \mid x^0_{\widetilde{N}(i)}, a_i^0, \ldots, x^{t-1}_{\widetilde{N}(i)}, a_i^{t-1}, x^t_{\widetilde{N}(i)} \right) = \pi_i^t\left(\cdot \mid x^t_{\widetilde{N}(i)} \right), \; i \in V.$$

Отметим, что пока оперируем с марковскими стратегиями, мы можем допускать, что $A_i^t(h_i^t)$ зависит от h_i^t только через компоненту $x^t_{\widetilde{N}(i)}$; эта ограниченная зависимость выражается формулой $A_i^t(h_i^t) = A_i^t(x^t_{\widetilde{N}(i)})$.

3. Допустимая локальная марковская стратегия $\pi = (\pi_i, i \in V)$ называется допустимой локальной стационарной (марковской) стратегией, если $\pi_i^{t'}(\cdot \mid x_{\widetilde{N}(i)}) = \pi_i^{t''}(\cdot \mid x_{\widetilde{N}(i)})$, $i \in V$, для любых t', t'' и всех x.

4. Допустимая локальная стационарная стратегия $\pi = (\pi_i, i \in V)$ называется допустимой локальной стационарной детерминированной (нерандомизированной) стратегией, если $\pi_i(\cdot | x_{\widetilde{N}(i)})$, $i \in V$, является одноточечной мерой на $A_i^t(x_{\widetilde{N}(i)})$, $i \in V$, для любых x.

Класс всех допустимых локальных стратегий обозначим LS; подкласс допустимых локальных марковских стратегий — LS_M.

Класс допустимых локальных стационарных стратегий $\pi^t = \pi^{t'}$ для любых t, $t' \in N$ обозначим LS_S.

Класс допустимых локальных детерминированных («чистых») стратегий будем обозначать LS_P, класс допустимых локальных стационарных детерминированных стратегий — LS_D.

Замечание 1. Имеют место соотношения $LS_D \subseteq LS_S \subseteq LS_M \subseteq LS$ и $LS_D \subseteq LS_P \subseteq LS$.

В данном случае логично считать, что контроль над зависимым от времени случайным полем ξ влияет на эволюцию системы, которая управляется переходными вероятностями $P\{\xi^{t+1} \in C^{t+1} | \xi^t = y, (\alpha_i^t : i \in V) = a\} = Q(C^{t+1} | y, a)$, где $Q(\cdot|\cdot,\cdot)$ — ядро перехода от $X \times A$ до X.

Определение 5. Пара (ξ, π) называется управляемым процессом с локально взаимодействующими синхронными компонентами по отношению к конечному графу взаимодействия $G = (V, B)$, если $\xi = (\xi^t, t \in N)$ — стохастический процесс с пространством состояний $X = \underset{i \in V}{\times} X_i$, $\pi = (\pi_i : i \in V)$ — допустимая локальная стратегия, а переходы ξ определяются следующим образом: для любого t $P^{(\xi^0, \alpha^0, \ldots, \xi^{t-1}, \alpha^{t-1}, \xi^t, \alpha^t)}$-почти наверное для любых $K \subseteq V$, $C_j \in \mathbf{X}_j$, $j \in K$, $y \in X$, $a_j \in A_j(y_{\widetilde{N}(j)})$ выполнено условие

$$P\{\xi_K^{t+1} \in C_K | \xi^0 = x^0, \alpha^0 = a^0, \ldots, \xi^{t-1} = x^{t-1}, \alpha^{t-1} = a^{t-1}, \xi^t = y, \alpha^t = a\} =$$

$$= \prod_{j \in K} P\left\{\xi_j^{t+1} \in C_j | \xi^t_{\widetilde{N}(j)} = y_{\widetilde{N}(j)}, \alpha_j^t = a_j\right\} =$$

$$= \prod_{j \in K} Q_j\{C_j | y_{\widetilde{N}(j)}, a_j\} = Q_K\{C_K | y, a\}.$$

Если $K = V$, то $Q_V(C_V | y, a) = Q(C | y, a)$.

Марковское ядро $Q = \prod_{j \in V} Q_j$ называется локальным и синхронным.

Рассмотрим предположения о структуре управления [24].

1. Множества допустимых управлений являются независимыми от времени, т.е. множество A^t не зависит от t и имеем $A^t(x) = A(x) \subseteq \mathbf{A}$ для произвольных $t \in N$.

2. Допустимым множеством управлений для вершин $i \in V$ и конфигурации (состояния) системы $x \in X$ являются множества $A_i(x)$ и $A(x) = \prod_{i \in V} A_i(x)$.

Введем функцию затрат. Если во время $t \in N$ система находится в состоянии $\xi^t = x^t$ и принято решение об управлении $\alpha^t = a^t$, то система имеет потери $r(x^t, a^t) \ge 0$.

Тогда средние ожидаемые расходы за время T при начальном значении $\xi^0 = x^0$ и стратегии π равны определяется как

$$Q_T^\pi(x^0) := \mathrm{E}_{x^0}^\pi \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^{T} r(\xi^t, \alpha^t),$$

где $\mathrm{E}_{x^0}^\pi$ — математическое ожидание, которое соответствует управляемому процессу (ξ, π) при $\xi^0 = x^0$.

Проблема заключается в нахождении стратегии Δ, которая минимизирует средние ожидаемые расходы при $\mathrm{T} \to \infty$,

$$\rho(x^0) = \inf_{\pi \in LS_P} \left[R_{x^0}^\pi = \limsup_{T\to\infty} Q_T^\pi(x^0) \right]. \tag{11}$$

Определение 6. Стратегия $\Delta \in LS_P$ (класса допустимых локальных детерминированных («чистых») стратегий) называется оптимальной, если $\rho(x^0) = R_{x^0}^\Delta$ для любого $x^0 \in X$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1 [24, теорема 3.39]. Рассмотрим управляемый процесс (ξ, α) с локально взаимодействующими синхронными компонентами относительно графа взаимодействия $G = (V, B)$ с конечным пространством состояний X для ξ и конечным пространством управлений $\mathbf{A}$. Пусть множества допустимых управлений $A^t(\cdot)$ не зависят от t. Тогда в классе LS_P допустимых детерминированных локальных стратегий существует единственная оптимальная стратегия.

Теорема 2 [24, теорема 3.60]. Пусть $\mathbf{A}$ — компактное метрическое пространство, многозначное отображение A: $X \to 2^A$ непрерывно и существует неотрицательная мера μ на $(X, \mathbf{X})$ при $\mu(X) > 0$ такая, что

$$\mu(C) \le Q(C | x, a), \quad C \in \mathbf{X}, \quad a \in A(x), \quad x \in X.$$

Далее предположим, что:

1) функция $r(x, a)$ является непрерывной по $(x, a \in A(x))$;

2) вероятность перехода $Q(C | x, a)$, $(x, a) \in \kappa$, является непрерывной по a для любых $x \in X$ и $C \in \mathbf{X}$.

Тогда в LS_D существует оптимальная стратегия π. Функцию $\pi: X \to A$ можно выбрать из первого класса Бэра, т.е. можно представить в виде поточечного предела непрерывных функций.

МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ

Рассмотрим методы нахождения оптимальных управлений. Как отмечалось выше, для критерия с дисконтированием в случае нахождения оптимального решения при некоторых условиях справедливо уравнение Беллмана и известны методы его решения. Как было отмечено, для критерия (6) в силу его неаддитивности уравнение Беллмана не имеет места, но при этом существуют методы для нахождения оптимальных стратегий. Об одном из этих методов — методе Ховарда [11] выше уже упоминалось.

Метод сведения к задаче линейного программирования. Остановимся на методе, предложенном в [28, 29], для случая конечного фазового пространства состояний и конечного множества решений. Как и ранее, будем предполагать, что

$$P\{\xi_K^{t+1}=x_K\,|\,\xi^0=x^0,\ldots,\alpha^0(\xi^0)=a^0,\ldots,\xi^t=y,\alpha^t(\xi^0,\ldots,\xi^t)=a\}=$$

$$=\prod_{j\in K}P\{\xi_j^{t+1}=x_j\,|\,\xi_{\hat N(j)}^t=y_{\hat N(j)},\alpha_j^t(\xi_{\hat N(j)}^0,\ldots,\xi_{\hat N(j)}^t)=a_j\}=$$

$$=\prod_{j\in K}Q_j\{x_j\,|\,y_{\hat N(j)},a_j\}=Q_K(x_K\,|\,y,a),$$

где $K\subset V$, $y\in X$, $a\in A(y)$. Если $K=V$, то $Q(x\,|\,y,a)=P\{\xi^{t+1}=x\,|\,\xi^t=y$, $\alpha^t=a\}$. Очевидно, что

$$\sum_{x\in X}Q(x|\,y,a)=1 \text{ для } y\in X.$$

Сведем задачу нахождения оптимального управления к решению некоторой задачи линейного програмирования. Пусть

$$P\{\alpha^t=a|\,\xi^t=y\}=\pi(y,a) \quad \text{и} \quad \sum_{a\in A}\pi(y,a)=1.$$

Отсюда следует, что ξ для некоторой фиксированной стратегии π является однородной по времени марковской цепью с переходной вероятностью

$$p^\pi(y,x)=P\{\xi^{t+1}=x,\xi^t=y\}=\sum_{a\in A}\pi(y,a)Q(y,a), \quad x,y\in X.$$

Предположим также, что для любой стратегии π переходная вероятность $p^\pi(y,x)$ марковской цепи ξ является эргодической с некоторым единственным положительным рекуррентным множеством X. Тогда для стратегии π существует единственное предельное стационарное распределение $p^\pi=(p^\pi(x);x\in X)$ для ξ, которое может зависеть от π.

Функция стоимости предполагается сепарабельной исходя из определения 3.44 из [24] относительно описанной выше системы окрестностей. Математическое ожидание средних затрат за время T при стратегии π с начальным состоянием $y\in X$ имеет вид

$$E_y^\pi\frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^T r(\xi^t,\alpha^t)=\sum_{x\in X}\sum_{a\in A}r(x,a)\frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^T P_y^\pi(\xi^t=x,\ \alpha^t=a).$$

Из эргодичности ξ для фиксированной стратегии π следует, что соотношение

$$\frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^T P_y^\pi(\xi^t=x,\alpha^t=a)\xrightarrow{T\to\infty}p^\pi(x)\pi(x,a)$$

имеет место независимо от начального состояния $y\in X$. Следовательно, для предела математического ожидания средних затрат при стратегии π и начального состояния $y\in X$ имеем

$$\rho(y,\pi)=\limsup_{T\to\infty}E_y^\pi\frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^T r(\xi^t,\alpha^t)=\sum_{x\in X}\sum_{a\in A}r(x,a)p^\pi(x)\pi(x,a).$$

При $z^\pi(x,a)=p^\pi(x)\pi(x,a)$ данная проблема, независимо от начального состояния $y\in X$, сводится к решению задачи

$$\min_{\pi\in\Pi_S}\sum_{\pi\in x\in X}\sum_{a\in A}r(x,a)z^\pi(x,a).$$

Исходя из этого рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\text{найти} \min_{z(x,a):\, x\in X,\, a\in A} \sum_{x\in X} \sum_{a\in A} r(x,a) z(x,a)$$

при ограничениях

$$z(x,a) \geq 0,\; x \in X,\, a \in A\,,$$

$$\sum_{a\in A} z(x,a) = \sum_{y\in X} \sum_{a\in A} z(y,a) Q(x|\, y,a),\;\; x \in X,$$

$$\sum_{y\in X} \sum_{a\in A} z(y,a) = 1.$$

Любое решение этой задачи удовлетворяет условию

$$\sum_{a\in A} z(y,a) > 0 \;\text{ для всех }\; y \in X.$$

Обозначив

$$\pi^*(x,a) = \frac{z(x,a)}{\sum_{a\in A} z(x,a)} \;\text{ для всех }\; y \in X,\; a \in A,$$

получим оптимальное решение π^* в классе марковских стационарных стратегий. При этом существует решение, которое является вершиной выпуклого многогранника допустимых решений и представляет детерминированную стратегию. Дальнейшее обсуждение применения методов линейного программирования для поиска оптимальных управлений, в том числе для неэргодического случая, можно найти в работе [16].

Стохастические квазиградиентные методы. Во многих случаях (см., например, теорему 2) оптимальное управление существует в виде детерминированной стационарной стратегии, зависящей только от состояния узла и состояния окрестности. Поэтому можно рассматривать только вырожденные детерминированные управления (постоянные функции), которые являются векторными переменными, привязанными к каждому узлу. В этом случае задачи оптимального управления (3), (6)–(8), (11) преобразуются в задачи стохастического программирования, т.е. задачи оптимизации математического ожидания по некоторой детерминированной векторной переменной. К таким же задачам приходим, если известна (или выбрана, например, в виде отрезка разложения управления в ряд по некоторому базису) параметрическая формула оптимальных управлений, которая затем подставляется в указанные задачи (3), (6)–(8), (11). Несмотря на значительные упрощения, полученные задачи стохастического программирования все еще остаются достаточно сложными, поскольку требуют минимизации многомерных интегралов по параметрам и, кроме того, эти задачи являются невыпуклыми и негладкими. Однако для решения задач стохастического программирования такого типа существует ряд методов, в частности стохастические квазиградиентные методы [6, 7, 30]. Для их применения нужны оценки значений и стохастических градиентов целевых функций задачи, а именно получить реализации значений и градиентов функций, стоящих под знаком математического ожидания в (3), (6)–(8), (11). Иными словами, необходимо симулировать случайные реализации некоторых скалярных и векторных марковских полей. Поскольку марковские поля — это, по существу, гиббсовские поля, то для симуляции значений случайных функций используют гиббсовские случайные генераторы [31]. Получение реализаций градиентов этих случайных функций является еще более сложной задачей. Для байесовских сетей на ориентированных графах, которые являются частным случаем марковского поля, данная задача решена в работах [32, 33], где получены выражения для стохастических градиентов как реализаций некоторого векторного марковского поля.

Следует отметить, что при решении векторных задач стохастического оптимального управления, например (7), или соответствующих векторных невыпуклых задач стохастического программирования необходимо построить всю парето-оптимальную границу. В работе [34] подобная задача векторной стохастической оптимизации финансового портфеля решается с помощью известных эволюционных алгоритмов векторной оптимизации. Этот же подход может быть применен и для решения векторной задачи (7).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье исследована возможность применения методов управляемых марковских полей для моделирования катастрофических рисков, вызванных природными явлениями или террористическими угрозами. Показана возможность сведения этих моделей к конечномерным задачам стохастического программирования и решения последних методом стохастических квазиградиентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Daykin C.D., Pentikainen T., Pesonen M. Practical risk theory for actuaries. — London; New York: Chapman and Hall, 1993. — 576 p.
2. Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. Modern actuarial risk theory. Using R. 2-nd ed. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. — 381 p.
3. Walker G. Current developments in catastrophe modelling // Finanfial Risks Management for Natural Catastrophes / Eds. N.R. Britton, J. Oliver. — Brisbane (Australia): Griffith. Univ., 1997. — P. 17–35.
4. Amendola A. et al. (eds.). Integrated catastrophe risk modeling: Supporting policy processes / Advances in Natural and Technological Hazards Research, 32. — Dordrecht: Springer, 2013. — 287 p.
5. Ермольев Ю.М., Ермольева Т.Ю., Макдональд Г., Норкин В.И. Проблемы страхования катастрофических рисков // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 2. — С. 90–110.
6. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976. — 276 с.
7. Ermoliev Yu., Wets R.J.-B. (Eds.) Numerical techniques for stochastic optimization / Springer series in computational mathematics, 10. — Berlin: Springer-Verlag, 1988. — 592 p.
8. Ruszczyński A., Shapiro A. (Eds.) Stochastic programming // Handbooks in OR & MS. — Amsterdam: Elsvier, 2003. — **10**. — 688 p.
9. Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: Иностр. лит., 1960. — 400 с.
10. Howard R.A. Dynamic programming and Markov processes. — New York; London: Technology Press and Wiley, 1960. — 136 p.
11. Derman C. Finite state Markovian decision processes. — New York; London: Akademic Press, 1970. — 159 p.
12. Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. Управляемые марковские процессы и их приложения. — М.: Наука, 1975. — 338 с.
13. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. — М.: Мир, 1977. — 176 с.
14. Гихман И.И., Скороход А.В. Управляемые случайные процессы. — Киев: Наук. думка, 1977. — 252 с.
15. Bertsekas D.P., Shreve S.E. Stochastic optimal control: The discrete-time case. — Massachusett: Athena Scientific, 2007. — 323 p.
16. Пиуновский А.Б. Управляемые случайные последовательности: методы выпуклого анализа и задачи с функциональными ограничениями // Успехи мат. наук. — 1998. — **53**, вып. 6. — С. 129–192.
17. Васильев Н.Б., Козлов О.К. Обратимые цепи Маркова с локальным взаимодействием / Многокомпонентные случайные системы. — М.: Наука, 1978. — С. 83–100.
18. Kozlov O.K., Vasilyev N.B. Reversible Markov chains with local interactions / R.L. Dobrushin and Y.G. Sinai (Eds.). Multicomponent Random Systems. Advances in probability and related topics. — New York: Mracel Dekker, 1980. — **6**. — P. 451–469.

19. Аверинцев М.Б. Описание марковских случайных полей при помощи гиббсовских условных вероятностей // Теория вероятности и ее применение. — 1972. — **17**, № 1. — P. 21–35.

20. Ligett T.M. Interacting particle systems. — Berlin: Springer, 1985. — 496 p.

21. Ligett T.M. Stochastic interacting systems: contact, voter, and exclusion processes. — Berlin: Springer, 1999. — 332 p.

22. Дадуна Г., Кнопов П.С., Чорней Р.К. Локальное управление марковскими процессами взаимодействия на графах с компактным множеством состояний // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 3. — С. 62–77.

23. Daduna H., Knopov P.S., Chornei R.K. Controlled semi-Markov fields with graph-structured compact state space // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2004. — **69**. — P. 39–53.

24. Chornei R.K., Daduna H., Knopov P.S. Control of spatially structured random processes and fields with applications. — New York: Springer, 2006. — 261 p.

25. Chornei R.K., Daduna H., Knopov P.S. Controlled Markov fields with finite space on graphs // Stochastic Models. — 2005. — **21.** — P. 847–874.

26. Ermoliev Y., Ermolieva T., Norkin V.I. Economic growth under shocks: path dependencies and stabilization / Micro-Meso-Macro: Addressing Complex Systems Couplings, H. Liljenstroem, U. Svedin (eds.). — London: World Scientific, 2005. — P. 289–302.

27. Норкин В.И. Об оценке риска катастрофического спада в стохастических моделях экономического роста / Теорія оптимальних рішень. — Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2007. — С. 41–50.

28. Manne A. Linear programming and sequential decisions // Manage. Sci. — 1960. — **6.** — P. 259–267.

29. Derman C. Markovian sequential decision processes / Stochastic Processes in Mathematical Physics and Engineering. Proceedings of symposia in applied mathematics. — Providence: AMS, 1964. — **16.** — P. 281–289.

30. Ермольев Ю.М., Норкин В.И. Методы решения невыпуклых негладких задач стохастической оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 5. — С. 89–106.

31. Brémaud P. Markov chains, Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues. — New York: Springer-Verlag, 1999. — 444 p.

32. Ermoliev Y., Gaivoronski A., Makowski M. Robust design of networks under risks / K. Marti et al. (eds.). Coping with Uncertainty. Lecture notes in economics and mathematical systems. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. — **633.** — P. 101–137.

33. Becker D.M., Gaivoronski A.A. Stochastic optimization on social networks with application to service pricing // Comput. Manag. Sci., 2013. — P. 1–32. (Published online, DOI 10.1007/s10287–013–0201–7).

34. Jevne H.K., Haddow P.C., Gaivoronski A.A. Evolving constrained mean-VaR efficient frontiers / Evolutionary Computation (CEC), WCCI 2012 IEEE World Congress on Computational Intelligence. — Australia: Brisbane, IEEE, 2012. — P. 1–8.

Поступила 30.09.2014