УДК 517.9

Э.Р. СМОЛЬЯКОВ

ИНДИВИДУАЛЬНО-ПАРЕТОВСКИЕ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ С ПОБОЧНЫМИ ИНТЕРЕСАМИ УЧАСТНИКОВ[1]

Аннотация. Предложены понятия слабой равновесности, полезные при поиске решений конфликтных задач с побочными интересами участников, комбинирующие понятия конфликтной устойчивости и понятия индивидуально-паретовских множеств, а также изложена методология поиска решений подобных задач.

Ключевые слова: теория игр и конфликтов, игровые равновесия, дифференциальные игры.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена дальнейшей разработке основ общей теории игр [1–6], в частности, основ ее нового направления [7] — конфликтным задачам с побочными интересами участников или играм с частично пересекающимися игровыми множествами. В работах [1–6, 8–12] показано, что теорию для подобных задач удается строить, дополняя теорию конфликтных равновесий, предназначенную для задач на едином для всех участников игровом множестве, новыми понятиями конфликтного равновесия и оптимальности, а также специфическими понятиями сильных угроз [7, 13]. Потребность в последних возникает в связи с особой спецификой задач с побочными интересами участников, в которых возможна пустота наислабейшего A-равновесия [8–12], всегда существующего и являющегося гарантией решения традиционных задач на едином для всех участников игровом множестве.

Заметим, что теория [8–12] позволила не только решить большую часть проблем классической теории игр [1–6] (существование, единственность и устойчивость решения в любых бескоалиционных, коалиционных, кооперативных, статических и динамических играх, рассмотренных на едином для всех участников игровом множестве), но и при незначительном своем усложнении найти решение по существу совершенно не изученных задач с частично пересекающимися игровыми множествами участников.

Поскольку все используемые в классической теории игр [1–6] понятия игровых равновесий имеются лишь в весьма ограниченных классах задач, в классической теории формально приходилось искать условия (теоремы) их существования, которые, однако, с точки зрения их использования на практике по существу всегда оказывались бесполезными.

В теории [8–12] строятся иерархически связанные последовательности из постепенно усиливающихся равновесий, среди которых есть наиболее слабое (A-равновесие), существующее в любых задачах, вследствие чего гарантируется их решение и отпадает необходимость в определении условий существования более сильных понятий равновесия, поскольку обычно какое-либо из них по умолчанию наисильнейшее (в крайнем случае таковыми становятся всегда существующие A-равновесия). И именно для того чтобы среди наисильнейших выделить единственное наиболее сильное раковесие, необходим поиск новых понятий равновесия (без учета условий их существования).

[1]Работа поддержана Программой фундаментальных исследований ОНИТ РАН и РФФИ, проект № 12-01-00961-а.

Таким образом, эта теория построена только из определений, для которых не требуется наличия каких-либо теорем, а любое существенное расширение подобной теории возможно только за счет введения дополнительных определений (последние не должны содержать в своей формулировке искусственно навязываемых участникам норм поведения), необходимых только вследствие того, что наисильнейшее равновесие не всегда единственное. Причем каждое новое определение равновесия позволяет минимизировать возможность возникновения подобной неединственности. Действительно, невозможно избавиться от неединственности, являющейся следствием какой-либо явной или скрытой формы симметрии в игре.

В данной работе предложены новые понятия равновесия для игр с побочными интересами участников, дополняющие уже известные понятия равновесий [1–14], причем полезные для поиска единственного решения не только в игровых задачах с побочными интересами участников.

В приведенном далее примере модельной дифференциальной игры описаны возможности и эффективность использования предлагаемых понятий равновесия в более сложных, чем в традиционнно изучавшихся и решавшихся дифференциальных играх [15–19]. При этом рассмотренная методика позволяет находить решения (равновесия) гораздо проще и эффективнее, чем в [15–19], за счет того, что поиск решения любой дифференциальной игры можно свести к несоизмеримо более простой проблеме поиска решения всего одной или небольшого числа статических игр с платежными функционалами в виде гамильтонианов. Если все гамильтонианы исходной дифференциальной игры со многими участниками имеют неизменный функциональный вид на всем интервале движения, то решение исходной игры определяется на основе решения всего одной статической игры. А если в некоторый промежуток времени один из гамильтонианов видоизменяется, то с этого и до следующего момента изменения вида какого-либо гамильтониана решается вторая статическая «локальная» игровая задача, и т.д. В результате найденное управление вдоль всей траектории (состоящее из последовательно состыкованных управлений на каждом участке) определяет стратегии поведения участников в исходной дифференциальной игре. Придется решать, сколько окажется подобных участков и локальных статических игр. Этот подход по сравнению с традиционными [15–19] неоценимо упрощает поиск решения любой дифференциальной игры. Подобная методика решения сложных нелинейных дифференциальных игр описана в [20] на примере решения дифференциальной игры, моделирующей экономические отношения между странами.

НОВЫЕ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ С ПОБОЧНЫМИ ИНТЕРЕСАМИ УЧАСТНИКОВ

Предлагаемые новые B^{Pa}-, B^{Pb}-, а акже другие подобные им равновесия и их усиления рассмотрим только для конфликтных задач с двумя участниками, причем вначале в статической, а затем в динамической постановке.

Допущение 1. Пусть Q_i, $i=1,2,$ — метрические пространства и $Q=Q_1\times Q_2$; G_i, $i=1,2,$ — компактные множества в пространстве Q, причем $G=G_1\cap G_2\neq\varnothing$, а $G'=G_1\cup G_2$; и пусть на множестве G_i определена непрерывная функция (функционал) $J_i(q)$, $i=1,2,$ где q_1,q_2 — стратегии участников.

Кроме того, i-й участник имеет возможность выбирать свою стратегию q_i из проекции $\mathrm{Pr}_{Q_i}G'$ множества G' на пространство Q_i или из сечения $G'(q_k)$ ($k\neq i$, $i=1,2$) и стремится обеспечить максимум своей платежной функции (функционала) $J_i(q)$, определенной лишь на его индивидуальном игровом множестве $G_i\subseteq Q$, имеющем непустое пересечение G с аналогичным индивидуальным игровым множеством G_k другого игрока, максимизирующего на своем множестве свою платежную функция J_k. По существу это означает, что интересы игроков явно конкурируют только на множестве G, а на множествах $G' \setminus G_i$ и $G' \setminus G_k$ игроки получают свои побочные доходы, не связанные с бизнесом на множестве G. Может показаться, что можно ограничиться рассмотрением игры только на общем для участников игровом множестве G. Однако, как показано далее в примерах, побочные интересы участников могут существенно влиять на их личные доходы и совместный бизнес на множестве G.

Рассмотрим следующие пять понятий равновесия из [7], без которых невозможно понимание основанных на них новых понятий равновесия.

Исходным понятием для построения любых систем конфликтных равновесий в задачах, в которых i-й игрок находит максимум своей платежной функции J_i на своем индивидуальном игровом множестве $G_i \subseteq Q$, имеющем непустое пересечение G с аналогичным индивидуальным игровым множеством G_k другого игрока, максимизирующего на своем множестве свою платежную функция J_k, является следующее обобщение понятия A-равновесия.

Определение 1. Точку (ситуацию) $q^* \in G_i$ назовем A_i-экстремальной для i-го участника, если при заданной стратегии q_k^* k-го участника для i-го игрока допустима только одна стратегия $q_i^* = G_i(q_k^*)$ или если любой стратегии $q_i \in G_i(q_k^*) \setminus q_i^*$ i-го участника можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\hat{q}_k = \hat{q}_k < q_i > \in G_i(q_i)$ k-го участника так, чтобы имели место следующие отношения:

$$J_i(q_i, \hat{q}_k) \le J_i(q^*) \tag{1}$$

(что можно трактовать как случай использования в исходной задаче совершенно естественных слабых угроз, назовем его вспомогательной задачей первого типа);

$$J_i(q_i, \hat{q}_\mathrm{k}) \le J_i(q^*),\ \hat{q}_\mathrm{k} \in G'(q_i) \tag{2}$$

(этот случай назовем задачей второго типа, которая отличается от задачи первого типа тем, что в ней, помимо угроз $\hat{q}_k$, используемых в (1), допускаются еще и (сильные) угрозы на множестве $G'(q_i) \setminus G_i(q_i)$, на котором угрожающий k-й игрок получает доход, а i-й игрок ничего не получает);

$$J_i(q_i, \hat{q}_\mathrm{k}) \le J_i(q^*),\quad \hat{q}_\mathrm{k} \in G(q_i) \tag{3}$$

(этот случай, когда любой стратегии $q_i \in G(q_k^*) \setminus q_i^*$ i-го участника можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\hat{q}_k$ другого участника, назовем задачей третьего типа, характеризующейся тем, что вспомогательная игра рассматривается только на пересечении G множеств G_i и G_2).

Ситуацию q^* назовем ситуацией A-равновесия в задачах первого, второго или третьего типов, если условия соответственно (1), (2) или (3) удовлетворяются в точке $q^* \in G$ для $i = 1, 2$, т.е. если $q^* \in A_1 \cap A_2 = A$.

Замечание 1. Из определения 1 следует, что в задачах первого и третьего типов угрозы естественные (слабые), а в задаче второго типа — сильные, т.е. в игровых задачах на частично пересекающихся игровых множествах угрожающий k-й игрок имеет возможность реализовать свои угрозы не только в сечениях $G_i(q_i)$ игрового множества G_i i-го участника, но и в более широких сечениях

$G'(q_i) \supseteq G_i(q_i)$, в которых он получает доход, а наказуемый i-й участник ничего не получает.

Поскольку в задачах с частично пересекающимися интересами участников множество A может оказаться пустым, возникает необходимость в поиске некоторых еще более слабых равновесий, которые будут непустыми и в какой-то мере заменят A-равновесие. В связи с этим введем определения 2–5 понятий оптимальности (равновесия), ослабляющие требования (1), (2).

Определение 2. Ситуацию $q^b \in G_i$ назовем P_i^b-экстремальной, если ее не может улучшить i-й участник или если при любой его попытке $q_i \in G_i(q_k^b) \setminus q_i^b$ увеличить свой выигрыш по сравнению с выигрышем в ситуации q^b за счет перехода из нее в более выгодную ситуацию q_i окажется, что ситуация q^b является «индивидуально паретовской» [8, с. 145], т.е. точкой Парето (на множестве $J_1(G_1) \times J_2(G_2)$) по отношению хотя бы к одной из точек сечения $G'(q_i)$. Ситуацию q^b назовем P^b-оптимальной (или P^b-равновесием), если она P_i^b-экстремальна для $i=1,2$.

В задачах с частично пересекающимися интересами участников в случае, когда множество A пустое, его функции может выполнять множество P^b или его усиления, описанные далее в определениях 3–5.

Следующее определение является некоторым усилением предыдущего, отличаясь от последнего тем, что в нем оптимальность по Парето имеет место не по отношению к какой-либо точке сечения $G'(q_i)$, а к точке сечения $G_i(q_i) \subseteq G'(q_i)$.

Определение 3. Ситуацию $q^a \in G_i$ назовем P_i^a-экстремальной, если ее не может улучшить i-й участник или если при любой его попытке $q_i \in G_i(q_k^a) \setminus q_i^a$ увеличить свой выигрыш по сравнению с выигрышем в ситуации q^a за счет перехода из нее в более выгодную ситуацию q_i окажется, что ситуация q^a является точкой Парето по отношению хотя бы к одной из точек сечения $G_i(q_i)$. Ситуацию q^a назовем P^a-оптимальной (или P^a-равновесием), если она P_i^a-экстремальна для $i=1,2$.

Следующее определение является некоторым усилением предыдущего.

Определение 4. Ситуацию $q^a \in G_i$ назовем $\overline{P}_i^a$-экстремальной, если ее не может улучшить i-й участник или если при любой его попытке $q_i \in G_i(q_k^a) \setminus q_i^a$ увеличить свой выигрыш по сравнению с выигрышем в ситуации q^a за счет перехода из нее в более выгодную ситуацию q_i окажется, что ситуация q^a является точкой Парето по отношению ко всем точкам сечения $G_i(q_i)$. Ситуацию q^a назовем $\overline{P}_i^a$-оптимальной (или $\overline{P}_i^a$-равновесием), если она $\overline{P}_i^a$-экстремальна для $i=1,2$.

Следующее определение является усилением предыдущего.

Определение 5. Ситуацию $q^b \in G_i$ назовем $\overline{P}_i^b$-экстремальной, если ее не может улучшить i-й участник или если при любой его попытке $q_i \in G_i(q_k^b) \setminus q_i^b$ увеличить свой выигрыш по сравнению с выигрышем в ситуации q^b за счет перехода из нее в более выгодную ситуацию q_i окажется, что ситуация q^b является точкой Парето по отношению ко всем точкам сечения $G'(q_i)$. Ситуацию q^b назовем $\overline{P}_i^b$-оптимальной (или $\overline{P}_i^b$-равновесием), если она $\overline{P}_i^b$-экстремальна для $i=1,2$.

Теорема 1. Между понятиями оптимальности из определений 2–5 имеют место следующие отношения: $P^b \supseteq P^a \supseteq \overline{P}^a \supseteq \overline{P}^b$.

Доказательство этой теоремы по существу является следствием определений 2–5.

Далее предложены усиления понятий равновесия из определений 2–5.

Определение 6. Ситуацию $q^* \in P_i^b$ назовем B_i^{Pb}-экстремальной, если на множестве $J(G)$ в пространстве (J_1, J_2) она определяет точку $J(q^*)$, оптимальную по Парето на множестве точек $J(q_i^*, q_k)$, где $q_k \in P_i^b(q_i^*)$. Ситуацию q^* назовем B^{Pb}-равновесием, если $q^* \in B_1^{Pb} \cap B_2^{Pb}$, где B_i^{Pb} — множество всех B_i^{Pb}-экстремальных ситуаций.

Множество B_i^{Pb} определяется следующим образом. Для каждой фиксированной стратегии $q_i \in \mathrm{Pr}_{Q_i} P_i^b$ i-го участника (т.е. для каждой фиксированной стратегии q_i, для которой сечение $P_i^b(q_i)$ непустое) отдельно в любом сечении $P_i^b(q_i)$ ищется множество Парето. И сумма всех паретовских множеств, полученных подобным образом в каждом сечении, образует множество B_i^{Pb}.

Определение 7. Ситуацию $q^* \in P_i^a$ назовем B_i^{Pa}-экстремальной, если на множестве $J(G)$ в пространстве (J_1, J_2) она определяет точку $J(q^*)$, оптимальную по Парето на множестве точек $J(q_i^*, q_k)$, где $q_k \in P_i^a(q_i^*)$. Ситуацию q^* назовем B^{Pa}-равновесием, если $q^* \in B_1^{Pa} \cap B_2^{Pa}$, где B_i^{Pa} — множество всех B_i^{Pb}-экстремальных ситуаций.

Аналогично определяются множества $B^{\overline{P}a}$- и $B^{\overline{P}b}$-равновесий. Естественное усиление B^{Pb}-равновесия отражено в следующем определении.

Определение 8. Ситуацию $q^* \in B_i^{Pb}$ назовем $\overline{D}_i^{Pb}$-экстремальной, если на множестве B_i^{Pb} она является точкой Парето. Ситуацию q^* назовем $\overline{D}_i^{Pb}$-равновесием, если $q^* \in \overline{D}_1^{Pb} \cap \overline{D}_2^{Pb} = \overline{D}^{Pb}$, где $\overline{D}_i^{Pb}$ — множество всех $\overline{D}_i^{Pb}$-экстремальных ситуаций. (Очевидно, множество $\overline{D}_i^{Pb}$ представляет собой множество Парето на множестве B_i^{Pb}.)

Аналогично определяются множества $\overline{D}^{Pa}$-, $\overline{D}^{\overline{P}b}$- и $D^{\overline{P}a}$-равновесий.

Для решения приведенных далее примеров потребуется по крайней мере еще следующее простое определение [7–13], наиболее широким естественным обобщением которого явилось определение 6 множества B^{Pb}-равновесий.

Определение 9. Ситуацию $q^* \in A_i$ назовем B_i-экстремальной, если образующая ее стратегия другого игрока удовлетворяет условию

$$\max_{q_k \in A_i(q_i^*)} J_k(q_i^*, q_k) = J_k(q^*), \ k=1,2, \ k \neq i. \tag{4}$$

Ситуацию $q^* \in G$ назовем B-равновесием, если $q^* \in B_1 \cap B_2$, где B_i — множество всех B_i-экстремальных ситуаций.

Замечание 2. Определения 2–8 и им подобные (несмотря на весьма строгие иерархические взаимозависимости) в совокупности все-таки вводят в теорию конфликтных равновесий весьма ослабленные понятия конфликтной устойчивости, поскольку в них любой попытке участника (или участников) улучшить свое состояние ставится в соответствие не какая-либо угроза, а всего лишь требование, чтобы исходное состояние оставалось паретовским по отношению к тем или иным противопоставляемым ему состояниям. В связи с этим заданные определениями 2–8 понятия равновесий являются всего лишь средой, в которую можно считать погруженными все действительно конфликтные равновесия [1–14]. Но в случае отсутствия тех равновесий, которые должны иметь место в теории конфликтных равновесий, эти ослабленные равновесия позволяют заполнить недостающие участки между уже известными конфликтными равновесиями, например, предоставляя возможность выбрать ситуацию, более предпочтительную для участников (по крайней мере с точки зрения паретовских качеств), из двух или нескольких ситуаций, не различимых с позиций уже известных понятий конфликтных равновесий. С точки зрения описанных ранее трех типов вспомогательных игровых задач (1), (2) и (3), существенных при анализе любых конфликтных задач с побочными интересами, естественно считать, что из определений 2–8 следует еще и четвертый тип вспомогательной задачи, дополнение которой сформулированного далее предложения в ряде случаев может быть полезным в конкретных приложениях.

Предложение 1. В общем случае в игровой задаче с несовпадающими и пересекающимися игровыми множествами G_i отметим следующее.

1. Если сильные угрозы (2) недопустимы (по соглашению между всеми участниками) и множество A пустое в естественном классе слабых угроз (1) (т.е. в задаче первого типа), то наисильнейшие равновесия (и решение задачи в том или ином смысле) всегда можно найти по крайней мере для задачи третьего типа (т.е. на пересечении G игровых множеств в естественном классе слабых угроз (1)) с учетом результатов задачи четвертого типа, определенной в замечании 2.

2. Если сильные угрозы (2) недопустимы и множество A в задаче первого типа непустое, то следует в качестве основного использовать решение задачи первого типа (со всеми возможными его итерациями [7–10]), а для оценки влияния побочных интересов на решение исходной игры использовать решение задачи третьего типа; причем в случае несовпадения решений задач первого и третьего типов за основу принять решение задачи первого типа, а решения задач третьего и четвертого типов рассматривать лишь как возможную коррекцию этого решения; совпадение решений первого и третьего типов означает, что не существует какого-либо заметного влияния побочных доходов на решение игры.

3. Если сильные угрозы (2) допустимы и при этом множество A в задаче (1) пустое, то в качестве основного решения исходной задачи следует рассматривать решение задачи второго типа (2), а решение задачи третьего типа (3), если оно не совпадает с решением задачи (2), рассматривать (с учетом также и задачи четвертого типа) лишь с точки зрения возможности корректировки с его помощью решения задачи второго типа; причем если в задачах второго и третьего типов сильнейшие равновесия одинаковы, то это означает, что побочные доходы участников явно не влияют на решение игры.

4. Если сильные угрозы (2) допустимы и множество A в задаче первого типа непустое, то следует найти решения задач первого, второго и третьего типов, и если окажется, что в них наисильнейшие равновесия одинаковые, то это означает, что на решение исходной задачи по существу не влияют ни типы угроз, ни побочные интересы участников, что наиболее благоприятно для последних;

в случае различных равновесий в задачах первого, второго и третьего типов участникам следует рассматривать в качестве основного решение задачи второго типа, а решения задач первого, третьего и четвертого типов использовать лишь в качестве корректировочных.

Действительно, в реальных условиях нужно иметь в виду, что конкуренты в конфликтной задаче наверняка никогда не остановятся перед использованием сильных угроз независимо от предварительной договоренности о них.

Пример 1. Пусть в игре с двумя участниками каждый максимизирует свою (матричную) платежную функцию, определенную на игровом множестве, которое имеет лишь частичное пересечение с игровым множеством другого участника:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & \cdot & 6 \\ \cdot & 8 & \cdot \\ 9 & \cdot & 5 \end{pmatrix}, \; J_2 = \begin{pmatrix} 5 & \cdot & 4 \\ 6 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 7 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Каждый игрок имеет три стратегии: первый игрок выбирает строки, а второй — столбцы; $G_1 = (a_{11}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{33})$, $G_2 = (a_{11}, a_{13}, a_{21}, a_{32}, a_{33})$, $G = (a_{11}, a_{13}, a_{33})$.

Найдем вначале равновесия в классе слабых угроз (1)

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & + \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot \end{pmatrix}, \; A = \varnothing.$$

Поскольку множество A пустое, находим предварительно предлагаемые новые индивидуально-паретовские равновесия с помощью рис. 1, задающего отображение множества G' на пространство (J_1, J_2):

$$\overline{P}_1^{\,b} = \begin{pmatrix} + & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \; \overline{P}_2^{\,b} = \begin{pmatrix} + & \cdot & + \\ + & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & + \end{pmatrix}, \; \overline{P}^{\,b} = \begin{pmatrix} + & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix};$$

$$B_1^{\overline{P}b} = (a_{11}, a_{13}, a_{22}, a_{31}), \; B_2^{\overline{P}b} = (a_{11}, a_{13}, a_{21}, a_{32}), \; B^{\overline{P}b} = (a_{11}, a_{13});$$

$$\overline{D}_1^{\overline{P}b} = (a_{11}, a_{13}, a_{31}), \; \overline{D}_2^{\overline{P}b} = (a_{11}, a_{13}, a_{32}), \; \overline{D}^{\overline{P}b} = (a_{11}, a_{13}).$$

Покажем, как найти эти равновесия. Ситуация a_{31} принадлежит множеству $\overline{P}_1^{\,b}$, поскольку ее не может улучшить первый игрок. Ситуация $a_{11} \in \overline{P}_1^{\,b}$, так как попытка первого игрока улучшить свой выигрыш за счет перехода из данной ситуации в единственно доступную ему ситуацию a_{31} в матрице J_1 приводит к тому, что ситуация a_{11} становится Парето-оптимальной по отношению ко всем элементам третьей строки матрицы, т.е. точка a_{11} (обозначающая фактически точку $J(a_{11})$) является точкой Парето по отношению к точкам a_{31}, a_{32}, a_{33} (см. рис. 1). Ситуация a_{22} принадлежит множеству $\overline{P}_1^{\,b}$, так как она наилучшая для первого грока во втором столбце и у него нет ни возможности, ни необходимости ее улучшать.

Множество $B_1^{\overline{P}b}$ определяется следующим образом. В каждой фиксированной строке матрицы $\overline{P}_1^{\,b}$ ищется множество Парето. Например, в первый строке этой матрицы имеется два элемента: a_{11} и a_{13}. Их отображения на плоскость

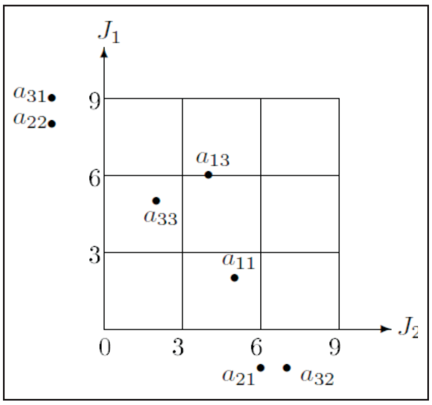

Рис. 1

(J_1, J_2), обозначенные теми же буквами, образуют множество Парето на множестве этих точек. Следовательно, они принадлежат множеству $B_1^{\overline{P}b}$. Во второй строке содержится только одна ситуация, следовательно, она также является оптимальной по Парето на множестве, состоящем только из нее самой. Аналогичное имеет место для третьей строки.

Множество $B_2^{\overline{P}b}$ определяется подобным образом, но не по строкам, а по столбцам. В первом столбце элементы a_{11} и a_{21} образуют множество Парето, во втором столбце множество состоит из одного элемента a_{32}, который поэтому автоматически является паретовским, а в третьем столбце, включающем два элемента: a_{13} и a_{33}, только элемент a_{13} на множестве этих двух элементов образует множество Парето.

Множество $\overline{D}_1^{\overline{P}b}$ определяется как множество Парето на множестве $B_1^{\overline{P}b}$, а $\overline{D}_2^{\overline{P}b}$ — множество Парето на $B_2^{\overline{P}b}$.

Найдем наисильнейшие равновесия в классе сильных угроз (2):

$$A_1^s = \begin{pmatrix} + & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & + \end{pmatrix},\ A_2^s = \begin{pmatrix} + & \cdot & + \\ + & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & + \end{pmatrix},\ A^s = \begin{pmatrix} + & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + \end{pmatrix},$$

$$B_1^s = (a_{11}, a_{33}),\ B_2^s = (a_{11}, a_{13}),\ B^s = a_{11}.$$

Таким образом, в классе сильных угроз наисильнейшим равновесием оказалась только одна ситуация a_{11}. В этой вспомогательной игре справедливый дележ кооперативного дохода [7, с. 51; 10, с. 174–175] , равного десяти и достигаемого в ситуации a_{13}, определяется только наисильнейшей равновесной ситуацией a_{11} и задается формулами

$$x_1 = \frac{2}{7}10,\ x_2 = \frac{5}{7}10. \tag{6}$$

Остается найти наисильнейшее равновесие во вспомогательной игре на пересечении G игровых множеств участников, платежные функции в которой имеют вид

$$J_1^G = \begin{pmatrix} 2 & \cdot & 6 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 5 \end{pmatrix},\ J_2^G = \begin{pmatrix} 5 & \cdot & 4 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Для этой игры находим следующие равновесия:

$$A_1^G = A_2^G = A^G = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + \end{pmatrix},$$

$$B_1^G = B_2^G = B^G = (a_{11}, a_{33}).$$

Во вспомогательной игре на множестве G имеются два равноценных наисильнейших равновесия (a_{11}, a_{33}), из которых только ситуация a_{11} является общим наисильнейшим равновесием в классе сильных угроз и в игре на множестве G.

Справедливый дележ кооперативного дохода в задаче на множестве G задается формулами из [7, с. 51; 10, с.174–175]

$$x_1 = x_2 = \frac{2+5}{2+5+2+5}10 = 5, \tag{8}$$

которые дают совершенно иной дележ по сравнению с (6).

Существенное различие в наисильнейших равновесиях в задаче с сильными угрозами и в задаче на множестве конфликтов G, а также связанное с этим отличие в дележе кооперативного дохода указывают на то, что побочные доходы в этой конфликтной задаче значительно влияют на решение игры. Очевидно, в этом случае необходимо следовать п. 3 предложения 1, где рекомендуется принять за основу решение вспомогательной игры в классе сильных угроз (2), скорректированное решениями пп. 3 и 4 из предложения 1. Суть этой коррекции в данном случае сводится к тому, что из сравнения всех найденных решений вспомогательных задач следует, что ситуация a_{11} гораздо более устойчива, чем ситуация a_{33}, которая, в свою очередь, существенно устойчивее ситуации a_{13}. Следовательно, дележ (6) можно несколько улучшить для первого игрока за счет второго игрока.

ДИНАМИЧЕСКИЕ КОНФЛИКТНЫЕ ЗАДАЧИ С ПОБОЧНЫМИ ИНТЕРЕСАМИ

Рассмотрим теперь конфликтующие динамические системы на пересекающихся игровых множествах, описанные дифференциальными уравнениями [13], в которых i-й участник ($i = 1, \ldots, N$), используя чистые $u_i(t)$ или смешанные стратегии $q_i(u_i, t)$, стремится обеспечить максимум своего функционала

$$J_i(q) = \int_T \mathrm{dt} \int_{W_i(t)_i} f_0^i(u, x, t)dq, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{9}$$

при ограничениях

$$\dot{x} = \int_{W'(t)} f(u, x, t)dq, \quad t \in T = [t_0, t_1] \subseteq E^1, \tag{10}$$

$$(u, t) \in W' \times T, \tag{11}$$

$$x_j(t_0) = x_j^0, \; j = 1, \ldots, n, \; x_k(t_1) = x_k^1, \; k \in K \subseteq 1, \ldots, n, \tag{12}$$

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$; $U = \bigcup_{k=1}^N U_k$; $U_i \in E_i$, E_i — конечномерные пространства; $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_N(t))$ — вектор чистых стратегий участников; $W' = \bigcup_{k=1}^N W_k$, W_k — компактные множества в U; $W(t)$ и $W'(t)$ — сечения множеств W и W' в момент $t \in T$; $\widehat{U}_i = \mathrm{Pr}_{U_i} W'$ — проекция множества W' на U_i; $q_i(u_i, t)$ — смешанная стратегия i-го участника такая, что $q_i(\cdot, t)$ — это (при каждом $t \in T$) вероятностная мера на множестве U_i, а $q_i(u_i, \cdot)$ — измеримая по Лебегу функция на T при всех $u_i \in U_i$; $q = q_1, \ldots, q_N$; Q_i — множество всех смешанных стратегий $q_i(u_i, \cdot)$ i-го игрока в задаче (9), (10) с начальным условием $x(t_0) = x^0$ и с заменой множества W' на множество $\widehat{U} = \widehat{U}_1 \times \ldots \times \widehat{U}_N$.

Однако в задаче (9)–(12) уравнению (10) при ограничениях (11), (12) удовлетворяют не все описанные ранее возможные стратегии $q_i \in Q_i$, $i=1, \ldots, N$, а только те из них, которые обеспечивают удовлетворение ограничений (11), (12); они образуют некоторое компактное подмножество G' в пространстве $Q_1 \times \ldots \times Q_N$.

Допущение 2. Пусть множество W — компакт в $U \times T$; отображение $\hat{f} = (f_0^1, \ldots, f_0^N, f_1, \ldots, f_n) : U \times E^n \times T \to E^{n+N}$ таково, что функция $\hat{f}(u, x, \cdot)$ измерима (по Лебегу) при всех $u \in U$, $x \in E^n$, а функция $\hat{f}(\cdot, \cdot, t)$ при каждом $t \in T$ непрерывна; функция $\hat{f}$ мажорируется на T функцией $s(t)(|x|+1)$, где $s(t)$ — некоторая интегрируемая функция; $x(t)$: $T \to E^n$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (10); кроме того, функция $\hat{f}$ удовлетворяет с интегрируемой функцией $b(t)$ условию Липшица

$$|\hat{f}(u, \bar{x}, t) - \hat{f}(u, x, t)| \le b(t) |\bar{x} - x|$$

для всех $u \in U$; $x, \bar{x} \in E^n$; $t \in T$.

Отметим, что найти необходимые условия существования A-равновесий в дифференциальных играх в форме, аналогичной известной для вариационных задач, практически нереально. Если A-равновесие несколько видоизменить, назвав его видоизмененный аналог A^c-равновесием, то найти удобные для приложений необходимые условия возможно. Данное A^c-равновесие получается из (заданного определением 1) A-равновесия для игровых задач на пересекающихся множествах добавлением в конце этого определения (после перечисления требований (1)–(3)) дополнительного требования, содержащегося в следующем определении, позволяющем в большинстве случаев сводить дифференциальные игры к решению небольшого числа статических игр [7–12].

Определение 10. Ситуацию $q^* \in G$ назовем согласованной с A_i^c-экстремальной, если в формулировке определения 1 удовлетворяется дополнительное условие, что наказывающая стратегия $\hat{q}_k$ всегда реализуется в те же моменты времени (или на тех же подынтервалах), что и стратегия q игрока, уклоняющегося от рассматриваемого состояния.

Для поиска решений дифференциальных игр с побочными интересами участников можно воспользоваться некоторыми модификациями необходимых условий существования равновесий, полученных в [7, 9, 11] , в частности, приведенной далее модификацией теоремы 4.2.1 из [11], позволяющей свести решение исходной дифференциальной игры к решению некоторых вспомогательных (локальных) статических игр, в которых платежными функциями являются гамильтонианы исходной дифференциальной игры.

Теорема 2. Пусть q^* есть A^c-равновесие в задаче с N участниками. Тогда найдется N ненулевых абсолютно непрерывных вектор-функций $p^i(t) = (p_0^i, p_1^i(t), \ldots$ $\ldots, p_n^i(t))$, $p_0^i \ge 0$, $i=1, \ldots, N$, удовлетворяющих почти всюду в T уравнениям

$$p_k^i = -\int \int_{W(t)} p^i \frac{\partial f^i}{\partial x_k} dq^*, \;\; k=1, \ldots, n, \;\; i=1, \ldots, N, \tag{13}$$

где $f^i = (f_0^i, f_1, \ldots, f_n)$, и краевым условиям

$$p_k^i(t_1) = 0, \;\; k \ne K; \tag{14}$$

пусть также гамильтонианы $H^i = \int\limits_{W(t)} p^i f^i dq^*$ непрерывны в T; A^c-равновесная ситуация q^* удовлетворяет отношениям

$$H^i(\hat{q}^i, q_i) \le H^i(q^*),\ q_i \in G(q^{i*}),\ \hat{q}^i \in G(q_i),\ i = 1, \ldots, N. \tag{15}$$

В отношении всех других базовых равновесий, более сильных, чем A^c-равновесие, справедливы некоторые естественные аналоги уравнений (13)–(15) [7–12], причем все статические понятия равновесий переносятся на динамические задачи без каких-либо дополнительных осложнений.

Используя теорему 2, применим новые понятия равновесия в следующей дифференциальной игре.

Пример 2. Рассмотрим конфликтную динамическую задачу с двумя участниками из [14], где она анализировалась с точки зрения иных понятий равновесия. Решение ищется в классе чистых стратегий $u_i(t)$, $i = 1, 2$. Первый игрок выбором стратегии $u_1(t)$, а второй игрок выбором стратегии $u_2(t)$ стремятся обеспечить максимумы своих платежных функционалов

$$J_1 = \int\limits_0^1 x_1 dt,\ J_2 = \int\limits_0^1 x_2 dt$$

при ограничениях

$$\dot{x}_1 = 2u_2 - u_1 + 2,\ \dot{x}_2 = u_2 - u_1 + 5,\ x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0,$$

где $u_1(t) \in W_1$, $u_2(t) \in W_2$.

На рис. 2 показаны множества W_1 (отрезки *EK* и *KH*) и W_2 (отрезки *KE* и *EF*); множества W_i можно представить также в виде

$$W_1 = \{(u_1, u_2): u_2 = 0 \text{ при } 0 \le u_1 \le 1 \text{ и } u_1 = 1 \text{ при } 0 \le u_2 \le 1\},$$

$$W_2 = \{u_1, u_2: u_2 = 0 \text{ при } 0 \le u_1 \le 1 \text{ и } u_1 = 0 \text{ при } 0 \le u_2 \le 1\}.$$

Поскольку множества W_1 и W_2 различны и имеют непустое пересечение $W = W_1 \cap W_2$, данную игру можно интерпретировать как игру участников, имеющих общие интересы на множестве W и побочные интересы на множествах $W_1 \setminus (W_1 \cap W_2)$ и $W_2 \setminus (W_1 \cap W_2)$, по отношению к которым они, хотя и не вступают в прямую конфронтацию, но могут оказывать влияние на их оптимальное поведение, как это описано в примере 1 статической игры.

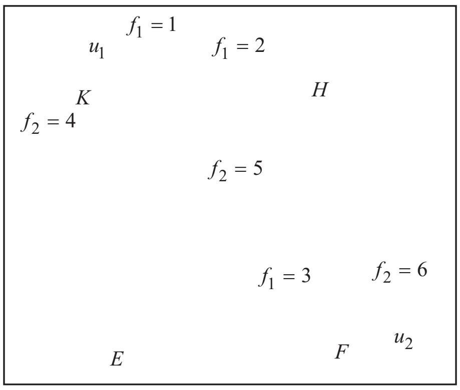

Рис. 2

Для поиска равновесий в этой задаче воспользуемся необходимыми условиями (13)–(15), в соответствии с которыми введем в рассмотрение гамильтонианы

$$H^i = p_0^i x_i + p_1^i (2u_2 - u_1 + 2) + p_2^i (u_2 - u_1 + 5),\ i = 1, 2,$$

где (p_0^1, p_1^1, p_2^1) и (p_0^2, p_1^2, p_2^2) — векторы множителей Лагранжа, причем

$p_0^i = 1$, а множители p_k^i, где $i, k = 1,2$, являются решениями уравнений

$$\dot{p}_k^i = -\frac{\partial H^i}{\partial x_k}, \; p_k^i(1) = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем $p_i^i(t) = 1 - t$, $p_k^i(t) = 0$.

Знакопостоянство (положительность) множителей $p_i^i(t)$ на интервале (0,1) позволяет (при любом $t \in [0,1]$) ограничиться изучением всего одной вспомогательной локальной конфликтной задачи, в которой в качестве платежных функций участников выбираются гамильтонианы H^i, совпадающие (как функции от переменных u_i) с точностью до положительного масштабного множителя $p_i^i(t)$ со следующими функциями, рассматриваемыми в качестве платежных функций в вспомогательной локальной конфликтной задаче

$$f_1 = 2u_2 - u_1 + 2, \; f_2 = u_2 - u_1 + 5, \tag{16}$$

где функция f_1 определена только на множестве W_1, а функция f_2 — только на множестве W_2.

Множества W_1 и W_2, а также уровни платежных функций f_1 и f_2 изображены на рис. 2. Найдем равновесия в локальной задаче (16). Прежде всего получим

$$A_1 = (KH] \cup E, \; A_2 = (EK] \cup F, \; A = A_1 \cap A_2 = \varnothing. \tag{17}$$

Поскольку множество A пустое, найдем равновесия из определений 2–8 с помощью рис. 3, где представлено (f_1, f_2) — отображение множества $W_1 \cup W_2$ на плоскость (f_1, f_2). Найдем вначале множество P^b-равновесий:

$$P_1^b = (KH] \cup E, \; P_2^b = [EF] \cup [EK], \; P^b = E. \tag{18}$$

Это множество определяется следующим образом. Множество P_1^b ищется на множестве $[KE] \cup [KH]$, оказывается, что оно совпадает с множеством $(KH] \cup E$, во-первых, потому, что любая точка отрезка $(KH]$ по определению 2 принадлежит множеству P_1^b вследствие того, что ни из одной его точки первый игрок не имеет возможности перейти (при каждой фиксированной стратегии $u_2 \in (0,1]$) в какую-либо другую точку множества W_1 с целью увеличить значение своей функции выигрыша, и, во-вторых, потому, что в точке E достигается максимум функции f_1 на отрезке $[EK]$, а из любой другой точки этого отрезка первый игрок может перейти в более выгодную для него точку этого же отрезка (в направлении возрастания функции f_1 от K к E). При этом исходная точка не является паретовской по отношению к последней (что показывает отрезок $[f(K), f(E)]$ на рис. 3), если учесть, что в любом сечении $W'(u_1)$, где $u_1 \in [0,1)$, не существует иных точек множества W', кроме точек отрезка $(KE]$.

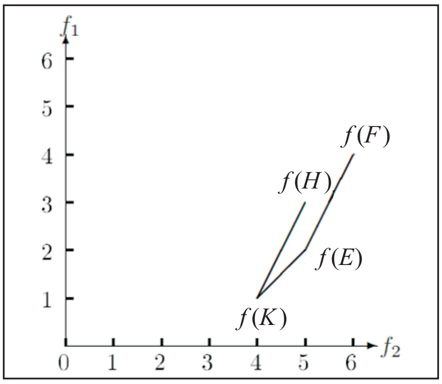

Рис. 3

Множество P_2^b определяется несколько иначе. Очевидно, отрезок $[KE)$ принадлежит множеству P_2^b, поскольку в любом сечении $W'(u_1)$, где $u_1 \in (0,1]$, не имеется других точек из множества W_2, кроме точек отрезка $[KE)$. Точка F отрезка $[EF]$ безусловно принадлежит множеству P_2^b, так как в ней функция f_2 достигает максимума на отрезке $[EF]$. Теперь найдем точки отрезка $[EF]$. При любой попытке второго игрока увеличить свой выигрыш в какой-либо точке u^* этого отрезка за счет перехода из нее в любую точку $\bar{u}_2$, расположенную правее нее (см. рис. 2), в сечении $W'(\bar{u})$ оказывается пара точек: $\bar{u}_2$ и соответствующая ей некоторая точка на отрезке $(KH]$, по отношению к которым точка u^* является паретовской. Следовательно, согласно определению 2 весь отрезок $[EF]$ принадлежит множеству P_2^b.

Аналогично определяется множество $\bar{P}^b$:

$$\bar{P}_1^b = (KH] \cup E,\ \bar{P}_2^b = [KE) \cup F,\ \bar{P}^b = \varnothing. \tag{19}$$

Найдем теперь первое усиление множеств P^b и $\bar{P}^b$:

$$B_1^{Pb} = \{E, H\},\ B_2^{Pb} = E,\ B^{Pb} = E,$$

$$B_1^{\bar{P}b} = \{E, H\},\ B_2^{\bar{P}b} = \varnothing,\ B^{\bar{P}b} = \varnothing. \tag{20}$$

Как видим, сильнейшим равновесием является ситуация $E \in B^{Pd}$. Однако в существенной для практических приложений ε-аппроксимации каждое из трех множеств: A_ε, P^b и $\bar{P}^b$, состоит из пары точек: E_ε и K_ε, т.е. из малых окрестностей точек E и K.

Рассмотрим теперь исходную игру в классе сильных угроз

$$A_1^s = (KH] \cup E,\ A_2^s = [EK] \cup [EF],\ A^s = E,\ B_1^s = \{E, H\},\ B_2^s = B^s = E.$$

Остается еще рассмотреть игру на пересечении W множеств W_1 и W_2, т.е. на множестве, заданном отрезком $[KE]$. Для этой вспомогательной игры находим следующие равновесия:

$$A_1^W = [EK],\ A_2^W = A^W = E,\ B_1^W = [EK],\ B_2^W = B^W = E.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, с использованием всех возможных подходов к поиску решения рассматриваемой дифференциальной игры с побочными интересами участников установлено, что наисильнейшим равновесием является ситуация E, которой соответствует пара чистых стратегий $(u(t), v(t)) = (0{,}0)$, определяющая решение исходной дифференциальной игры в классе чистых стратегий.

В рассмотренной задаче, несмотря на широкое множество побочных интересов участников, занимающих $2/3$ суммарного игрового поля W', влияние побочных интересов близко к нулю. Для сравнения отметим, что в примере 1 это влияние существенно и его оценка в общем случае проводится из сравнения решений вспомогательных задач с учетом предложения 1.

Описанные новые понятия равновесий для игр на пересекающихся множествах позволили, несмотря на то, что множество наислабейших равновесий A в рассмотренной дифференциальной игре пустое, найти сильнейшее равновесие E, которое подтвердилось множеством других подходов к поиску решения игры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Roos C.F. Generalized lagrange problems in the calculus of variations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1928. — **30**. — P. 360–384.
2. Nash J. Non-cooperative games // Ann. of Math. — 1951. — **54**, N 2. — P. 286–295.
3. Neumann J. Zur theorie der gesellschaftsspiele // Math. Ann. — 1928. — **100**. — P. 295–320.
4. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономические поведениме. — М.: Наука, 1970. — 708 с.
5. Воробьев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. — М.: Наука, 1984. — 495 с.
6. Вайсборд Э.М., Жуковский В.И. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. — М.: Сов. радио, 1980. — 304 с.
7. Смольяков Э.Р. Управление конфликтами с побочными интересами участников. Saarbrucken: LAP LAMBERT Acad. Publ. 2013. — 154 с.
8. Смольяков Э.Р. Теория антагонизмов и дифференциальные игры. — М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 160 с.
9. Смольяков Э.Р. Теория конфликтных равновесий. — М.: Едиториал УРСС, 2005. — 304 с.
10. Смольяков Э.Р. Методы решения конфликтных задач. — М.: МГУ, 2010. — 244 с.
11. Смольяков Э.Р. Обобщенное оптимальное управление и динамические конфликтные задачи. — М.: МГУ, 2010. — 232 с.
12. Смольяков Э.Р. Равновесные модели при несовпадающих интересах участников. — М.: Наука, 1986. — 224 с.
13. Смольяков Э.Р. Дифференциальные игры на частично пересекающихся множествах // Дифференциальные уравнения. — 2011. — **47**, № 12. — С. 1793–1802.
14. Смольяков Э.Р. Конфликтные индивидуально-паретовские равновесия // Там же. — 2010. — **46**, № 1. — С. 139–145.
15. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 480 с.
16. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 324 с.
17. Петров Н.Н. Теория игр. — Ижевск: Удмурт. ун-т, 1977. — 196 с.
18. Петросян Л.А., Кузьмина Т.И. Бескоалиционные дифференциальные игры. — Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 1989. — 148 с.
19. Чикрий А.А. Конфликтно-управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992. — 212 с.
20. Смольяков В.Э., Смольяков Э.Р. Решение дифференциальной игры, моделирующей экономические отношения между странами // Труды ИСА РАН. — 2013. — **63**, № 3. — С. 71–73.

Поступила 21.01.2014