



ТЕОРИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ КАК УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ПОСТРОЕНИЯ ДИАГРАММЫ ВОРОНОГО И ЕЕ ОБОБЩЕНИЙ. II. АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ДИАГРАММ ВОРОНОГО НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ¹

Аннотация. Представлен алгоритм решения непрерывной линейной задачи оптимального разбиения множества из E_n на его непересекающиеся подмножества при ограничениях с определением координат центров подмножеств. Описана работа данного алгоритма и его частных случаев для построения классической диаграммы Вороного и ее различных модификаций как для фиксированного набора точек-генераторов, так и с определением их оптимального расположения в заданном множестве.

Ключевые слова: диаграмма Вороного, непрерывные задачи оптимального разбиения множеств из E_n , r -алгоритм Шора.

ВВЕДЕНИЕ

Определение диаграммы Вороного конечного числа точек дано в работе [1], в которой приведены математические описания и практические приложения различных обобщений данной диаграммы — аддитивно взвешенных, мультипликативно взвешенных, диаграммы Пауэра, диаграмм с ограничениями на мощности точек-генераторов, а также введено понятие диаграммы Вороного конечного числа точек-генераторов, оптимально размещенных в заданном ограниченном множестве. Там же описан единый подход к построению диаграммы Вороного и различных ее обобщений, основанный на формулировании непрерывных задач оптимального разбиения множеств из n -мерного евклидова пространства на подмножества с критерием качества, обеспечивающим соответствующий вид диаграммы Вороного, и на применении разработанного в [2, 3] математического и алгоритмического аппаратов решения таких задач. Показано, что исходные задачи оптимального разбиения множеств, которые математически сформулированы как бесконечномерные задачи оптимизации, сводятся к вспомогательным конечномерным негладким задачам максимизации либо негладким задачам максимина.

В настоящей статье описан алгоритм решения непрерывной линейной задачи оптимального разбиения множества Ω из E_n на его непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ при ограничениях в форме равенств и неравенств с определением координат центров τ_1, \dots, τ_N соответствующих подмножеств, основанный на [1]. Рассмотрим работу предложенного алгоритма и его частных случаев для построения классической диаграммы Вороного и ее различных обобщений как для фиксированного набора точек-генераторов, так и с отысканием их оптимального расположения в заданном множестве.

¹Начало см. в № 3, 2015.

**АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ
МНОЖЕСТВ n -МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА E_n НА ПОДМНОЖЕСТВА**

Напомним математическую формулировку непрерывной линейной задачи оптимального разбиения множества (ОРМ) n -мерного евклидова пространства E_n на подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ с ограничениями в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров τ_1, \dots, τ_N этих подмножеств.

Пусть Ω — ограниченное, измеримое по Лебегу множество в n -мерном евклидовом пространстве E_n , Σ_{Ω}^N — класс всех возможных разбиений множества Ω на непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$:

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N \right\}.$$

Задача А. Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}),$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N, \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

при условиях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p, \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, i = p+1, \dots, N,$$

где

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx,$$

$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; $c(x, \tau_i)$ — функции ограниченные, определенные на $\Omega \times \Omega$, измеримые по аргументу x при любом фиксированном $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ из Ω для всех $i = 1, \dots, N$; координаты $\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}$ центра $\tau_i, i = 1, \dots, N$, заранее неизвестны; $\rho(x)$ — ограниченная, измеримая, неотрицательная на Ω функция; $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ — заданные неотрицательные числа, причем

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, 0 \leq b_i \leq S, i = 1, \dots, N.$$

В соответствии с теоремой 2 из [1] оптимальное решение задачи А в терминах характеристических функций подмножеств, составляющих разбиение множества Ω , имеет следующий вид для $i = 1, \dots, N$ и почти всех $x \in \Omega$:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_{*i}) + a_i + \psi_i^* \leq c(x, \tau_{*j}) + a_j + \psi_j^*, \\ & i \neq j, \text{ п.в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, N, \text{ тогда } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

в качестве $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ выбирается оптимальное решение задачи

$$G(\psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi) =$$

$$= \min_{\tau \in \Omega^N} \left\{ \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \right\} \rightarrow \max \quad (1)$$

при условиях

$$\psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N, \quad (2)$$

где

$$G_1(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i. \quad (3)$$

Для решения полученной конечномерной задачи оптимизации (1), (2) с недифференцируемой функцией (3) применим алгоритм псевдоградиентов с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов, близкий к r -алгоритму Шора [4–7].

Алгоритм решения задачи А. Приведем алгоритм решения задачи А, основанный на теореме 2 из [1]. Для этого от задачи условной оптимизации функции $G(\psi)$ перейдем к задаче безусловной максимизации по ψ с помощью введения в целевую функцию негладкой штрафной функции множества $\{\psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N\}$. Найти

$$\max_{\psi \in E_N} \min_{\tau \in \Omega^N} P(\tau, \psi),$$

$$P(\tau, \psi) = G_1(\tau, \psi) - S \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i),$$

где S — достаточно большое положительное число (значительно большее максимального из множителей Лагранжа $\psi_i \geq 0, i = p+1, \dots, N$).

Определим i -ю, $i = 1, \dots, N$, компоненту $2N$ -мерного вектора обобщенного псевдоградиента

$$g_P(\tau, \psi) = (g_P^\tau(\tau, \psi), -g_P^\psi(\tau, \psi)) =$$

$$= (g_P^{\tau_1}(\tau, \psi), \dots, g_P^{\tau_N}(\tau, \psi), -g_P^{\psi_1}(\tau, \psi), \dots, -g_P^{\psi_N}(\tau, \psi))$$

функции (1) в точке $(\tau, \psi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \psi_1, \dots, \psi_N)$ следующим образом:

$$g_P^{\psi_i}(\tau, \psi) = \begin{cases} \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i, & i = 1, \dots, p, \\ \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i + S \max(0, \text{sign}(-\psi_i)), & i = p+1, \dots, N, \end{cases} \quad (4)$$

$$g_P^{\tau_i}(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) g_c^{\tau_i}(\tau, x) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5)$$

где $g_P^{\tau_i}(\tau, x)$ — i -я компонента N -мерного вектора обобщенного градиента $g_c^{\tau}(\tau, x)$ функции $c(x, \tau_i)$ в точке $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$ при фиксированном x , имеющая вид

$$g_c^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x, \tau) \\ \dots \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau) \end{pmatrix}.$$

В формулах (4), (5) $\lambda_i(x), i = 1, \dots, N$, определяется следующим образом:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i \leq c(x, \tau_j) + a_j + \psi_j, \\ & i \neq j, \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (6)$$

Опишем алгоритм решения задачи А, составной частью которого является модификация r -алгоритма Шора [4], так называемый $r(\alpha)$ -алгоритм с постоянным коэффициентом растяжения пространства α и адаптивным способом регуляции шагового множителя [6, 7].

Шаг 0. Область Ω заключаем в прямоугольный параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем $\rho(x) = 0$ при $x \in \Pi \setminus \Omega$. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой, задаем начальное приближение $(\tau, \psi) = (\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ и параметры $\alpha, q_1, q_2, n_h, \varepsilon$ модификации $r(\alpha)$ -алгоритма.

Шаг 1. Вычисляем значения $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формуле (6) при $\tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}$, а также значения функции $G_1(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ и вектора $g_P(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ в узлах сетки по формулам (3)–(5) при $\tau = \tau^{(0)}, \psi = \psi^{(0)}, \lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$.

Выбираем начальный пробный шаг $h_0 > 0$, полагаем $B_0^\tau = I_{nN}$, $B_0^\psi = I_N$ — квадратные матрицы размера $nN \times nN$, $N \times N$ соответственно и находим

$$\tau^{(1)} = P_{\Pi}(\tau^{(0)} - h_0 g_P^\tau(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})), \quad \psi^{(1)} = \psi^{(0)} - h_0 g_P^\psi(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}).$$

Шаг 2. Пусть в результате вычислений после $k, k = 1, 2, \dots$, шагов алгоритма получены величины $\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$ в узлах сетки и матрицы B_k^τ, B_k^ψ .

Опишем $(k+1)$ -й шаг, состоящий из следующих этапов.

1. Вычисляем значения $\lambda^{(k)}(x)$ в узлах сетки по формуле (6) при $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}$.

2. Вычисляем значения $g_P(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})$ в узлах сетки по формулам (4), (5) при $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}, \lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$.

3. Проводим очередную итерацию $r(\alpha)$ -алгоритма обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства, близкого к r -алгоритму Шора [4], вычислительная формула которого имеет вид

$$\begin{aligned} \tau^{(k+1)} &= P_{\Pi} \left(\tau^{(k)} - h_k B_{k+1} \frac{B_{k+1}^\tau g_P^\tau(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{\|B_{k+1}^\tau g_P^\tau(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})\|} \right), \\ \psi^{(k+1)} &= \psi^{(k)} - h_k B_{k+1} \frac{B_{k+1}^\psi g_P^\psi(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{\|B_{k+1}^\psi g_P^\psi(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})\|}. \end{aligned}$$

Здесь $B_{k+1}^\tau, B_{k+1}^\psi$ — операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство с коэффициентом растяжения α , которые пересчитываются следующим образом:

$$B_{k+1}^w = B_k^w \left(I + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \theta_k^w (\theta_k^w)^\top \right),$$

где w — переменная τ или ψ , I — единичная матрица соответствующего размера, θ_k^w — нормированный вектор разности двух последовательных псевдоградиентов в преобразованном пространстве, т.е.

$$\theta_k^w = \frac{(B_{k+1}^w)^\top (g_P^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - g_P^w(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}))}{\|(B_{k+1}^w)^\top (g_P^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - g_P^w(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}))\|}$$

при условии, что $\|(B_{k+1}^w)^\top (g_P^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - g_P^w(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}))\| \geq \varepsilon_0$ и $\theta_k^w = 0$ в остальных случаях, ε_0 — точность представления машинного нуля в ЭВМ. Длина шагового множителя h_k регулируется адаптивным способом с параметрами h_0, q_1, q_2, n_h , согласно которому шаговый множитель выбирается из условия минимума разности $[G_1(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k)}) - G_1(\tau^{(k)}, \psi^{(k-1)})]$ по направлению обобщенного антипсевдоградиента $-g_P(\tau, \psi)$ в преобразованном пространстве.

4. Если условие

$$\|(\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}) - (\tau^{(k)}, \psi^{(k)})\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (7)$$

не выполняется, переходим к $(k+2)$ -му шагу алгоритма с новыми значениями величин $\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}, \lambda^{(k)}(x)$ в узлах сетки и матриц $B_{k+1}^\tau, B_{k+1}^\psi$, иначе переходим к п. 5.

5. Полагаем $\tau_* = \tau^{(l)}, \psi_* = \psi^{(l)}, \lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, где l — номер итерации, на которой выполнилось условие (7).

6. Вычисляем оптимальное значение двойственного функционала по формуле (3) при $\tau = \tau^*$, $\psi = \psi^*$ и для контроля правильности счета по формуле

$$I(\lambda^*(\cdot), \tau^*) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_{*i}) + a_i] \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx.$$

Отметим, что вычислительная эффективность описанного алгоритма, в первую очередь, зависит от коэффициента растяжения пространства α и параметров адаптивной регулировки шага q_1, q_2, n_h из $r(\alpha)$ -алгоритма. Согласно [5] параметры необходимо выбирать таким образом, чтобы с помощью адаптивного способа регулировки шагового множителя увеличить точность поиска минимума функции по направлению обобщенного антипсевдоградиента в процессе счета и при этом не выполнять большого количества шагов. Для негладких функций этого можно добиться следующим выбором параметров: $\alpha = 2 \div 3$, $h_0 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1.1 \div 1.2$, $n_h = 2 \div 3$, где q_1 — коэффициент уменьшения шага, если условие спуска по направлению обобщенного антипсевдоградиента выполняется за один шаг, q_2 — коэффициент увеличения шага, при этом натуральное число n_h ($n_h > 1$) задает количество шагов одномерного спуска, после которых шаг будет увеличиваться в q_2 раз.

Отметим, что в [1] рассмотрены следующие частные постановки задачи **A**: **A1** — непрерывная задача оптимального разбиения множества Ω из E_n на его непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ без ограничений с заданными координатами центров τ_1, \dots, τ_N подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ соответственно; **A2** — непрерывная задача оптимального разбиения множества Ω из E_n на его непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ без ограничений с размещением центров τ_1, \dots, τ_N этих подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$; **A3** — непрерывная задача оптимального разбиения множества Ω из E_n на его непересекающиеся подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ при ограничениях в форме равенств и неравенств с заданными координатами центров τ_1, \dots, τ_N подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ соответственно.

Поскольку непрерывные задачи оптимального разбиения множеств **A1**, **A2**, **A3** являются частными случаями задачи **A**, нетрудно адаптировать алгоритм решения задачи **A** для решения задач **A1**, **A2**, **A3**, основываясь на соответствующих аналогах теоремы 1 из [1].

ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММЫ ВОРОНОГО И ЕЕ РАЗЛИЧНЫХ ОБОБЩЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Покажем, что непрерывную задачу оптимального разбиения множеств можно сформулировать с таким критерием оптимальности разбиения и дополнительными условиями, которые обеспечивали бы получение в качестве ее решения соответствующего вида диаграммы Вороного.

Опишем работу алгоритма решения непрерывной линейной задачи оптимального разбиения множеств (задачи **A**) и ее частных случаев для построения стандартной (классической) диаграммы Вороного и ее различных обобщений для множества $\Omega = \{(x^1, x^2) \in R^2: 0 \leq x^i \leq 10, i = 1, 2\}$. Отметим, что в результате такого подхода появляется возможность строить не только уже известные диаграммы Вороного, но и конструировать новые. Так, например, решением непрерывной задачи **A2** оптимального разбиения множеств Ω на его непересекающиеся подмножества с размещением центров этих подмножеств является новая диаграмма Вороного конечного числа точек-генераторов [1], оптимально размещенных в ограниченном множестве.

На рис. 1 представлены полученные в результате решения задачи **A1** стандартные (классические) диаграммы Вороного множества Ω семи заданных точек-генераторов при таких исходных данных: $N = 7$, $a_1 = \dots = a_N = 0$, функция плотности $\rho(x) = 1$ при всех $x \in \Omega$, функция расстояния $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i)$ опреде-

ляется по одной из формул

$$r(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x^j - \tau_i^j)^2} \text{ — евклидова метрика,}$$

$$r(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_1 = \sum_{j=1}^n |x^j - \tau_i^j| \text{ — манхэттенская метрика,}$$

$$r(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_0 = \max_{j=1, \dots, n} \{|x^j - \tau_i^j|\} \text{ — метрика Чебышева.}$$

На рис. 2, а, б, в соответственно представлены аддитивно взвешенные диаграммы Вороного тех же семи точек-генераторов с положительными весами $w = (1; 0.3; 0.6; 0.2; 0.9; 2; 3)$, с отрицательными весами $w = (-1; -0.3; -0.6; -0.2; -0.9; -2; -3)$ и в случае, когда все веса принимают различные значения $w = (1; 0.3; 0.6; -0.2; -0.9; -1.3; 0)$. Эти диаграммы получены в результате решения задачи **A1** при выборе в качестве функции расстояния евклидовой метрики, параметров $a_i = -w_i, i = 1, 7, \rho(x) = 1$ при всех $x \in \Omega$.

При решении задачи **A1** с функцией $c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i) / w_i$, где $r(x, \tau_i)$ — евклидова метрика, $w = (1; 0.3; 0.6; 0.2; 0.9; 0.4; 0.8)$, $a_1 = \dots = a_7 = 0, \rho(x) = 1$ при всех $x \in \Omega$, а координаты точек-генераторов $\tau_i, i = 1, 7$, такие же, как и в предыдущих случаях, получена мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного, представленная на рис. 3. Нетрудно заметить, что границы между различными ячейками в аддитивно взвешенной диаграмме являются сегментами ветвей гипербол, а в мультипликативно взвешенной — сегментами окружностей.

При задании ненулевых значений параметров $a_i, i = 1, 7$, а именно $a = (-0.3; -0.7; -1; -2; -0.6; 0.9; 1)$, решение задачи **A1** приводит к аддитивно и мультипликативно взвешенной диаграмме Вороного (рис. 4) с весами $w_i = -a_i, i = \overline{1, 7}$.

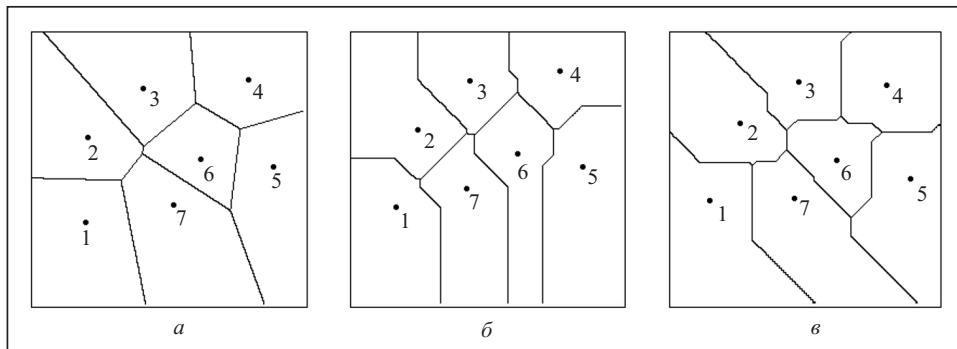


Рис. 1. Диаграмма Вороного семи точек в случае евклидовой метрики (а); манхэттенской метрики (б); метрики Чебышева (в)

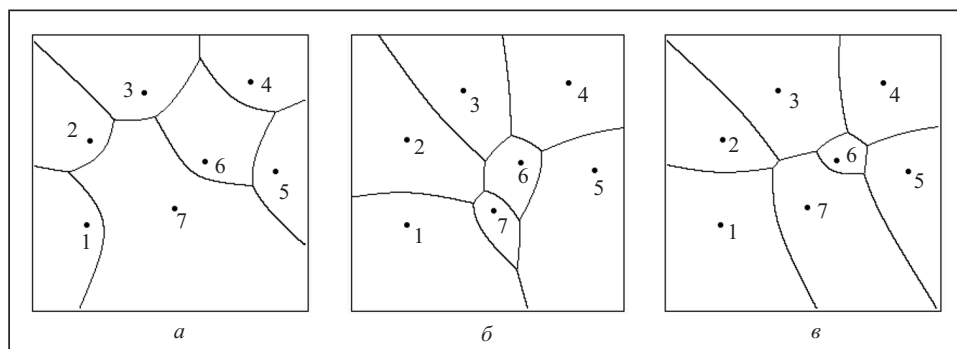


Рис. 2. Аддитивно взвешенная диаграмма Вороного семи точек-генераторов с весами: положительными (а); отрицательными (б); принимающими значения различных знаков (в)

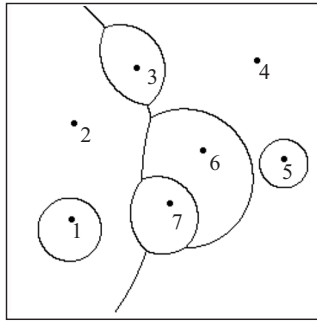


Рис. 3. Мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного

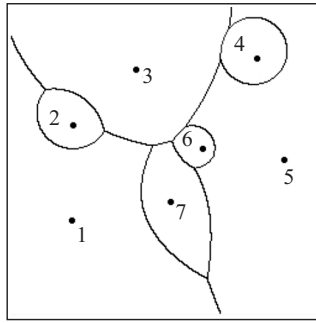


Рис. 4. Аддитивно и мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного

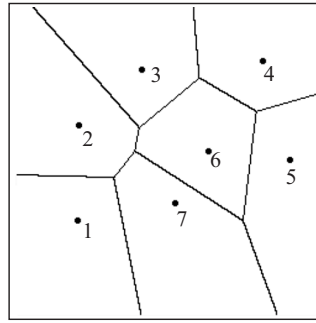


Рис. 5. Диаграмма Пауэра

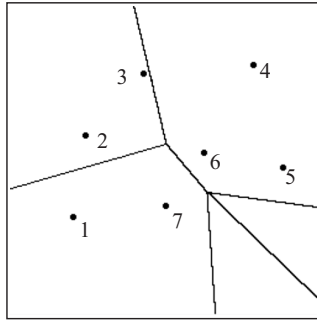


Рис. 6. Диаграмма Вороного дальней точки

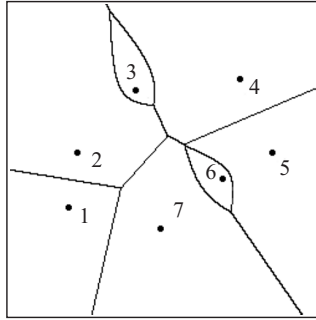


Рис. 7. Диаграмма Вороного с ограниченными мощностями третьей и шестой ячеек

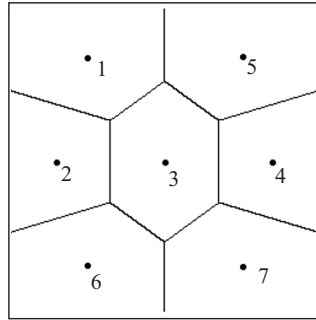


Рис. 8. Диаграмма Вороного с оптимальным размещением семи точек-генераторов

Если в качестве функции $c(x, \tau_i)$ рассматривать квадрат расстояния между двумя точками, т.е. $c(x, \tau_i) = r^2(x, \tau_i) = (x_i^{(1)} - \tau_i^{(1)})^2 + (x_i^{(2)} - \tau_i^{(2)})^2$, а значения параметров $a_i, i = \overline{1, 7}$, задать $a = (1; 0.3; 0.6; -0.2; -0.9; -1.3; 0)$, то в результате решения задачи **A1** можно получить диаграмму Пауэра (диаграмма Лагерра) (рис. 5) с весами $w_i = a_i, i = \overline{1, 7}$.

На рис. 6 представлена диаграмма Вороного дальней точки, полученная в результате решения задачи **A1** при $c(x, \tau_i) = -r(x, \tau_i)$, где $r(x, \tau_i)$ — евклидова метрика, $a_1 = \dots = a_7 = 0, \rho(x) = 1$ при всех $x \in \Omega$.

Диаграмма Вороного семи точек-генераторов с ограниченными мощностями третьей и шестой ячеек приведена на рис. 7. Она получена в результате решения задачи **A3** со следующими исходными данными: $N = 7, p = 7, c(x, \tau_i) = \sqrt{(x_i^{(1)} - \tau_i^{(1)})^2 + (x_i^{(2)} - \tau_i^{(2)})^2}, a_1 = \dots = a_7 = 0, \rho(x) = 1$ при всех $x \in \Omega, b = (200, 200, 5, 200, 200, 2, 200)$.

Решением задачи **A2** при $N = 7, c(x, \tau_i) = \sqrt{(x_i^{(1)} - \tau_i^{(1)})^2 + (x_i^{(2)} - \tau_i^{(2)})^2}, a_1 = \dots = a_7 = 0, \rho(x) = 1 \forall x \in \Omega$ является так называемая диаграмма Вороного с оптимальным размещением семи точек (рис. 8) с оптимальными координатами центров: $\tau_1 = (1.8, 2.08), \tau_2 = (2.56, 4.24), \tau_3 = (5.24, 5.92), \tau_4 = (7.24, 4.8), \tau_5 = (6.04, 1.84), \tau_6 = (1.48, 7), \tau_7 = (4.64, 8.84)$. Заметим, что такое расположение точек-генераторов получается с точностью до нумерации из любого начального приближения координат этих точек.

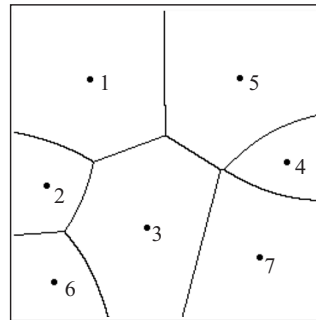


Рис. 9. Аддитивно взвешенная диаграмма Вороного с оптимальным размещением точек-генераторов

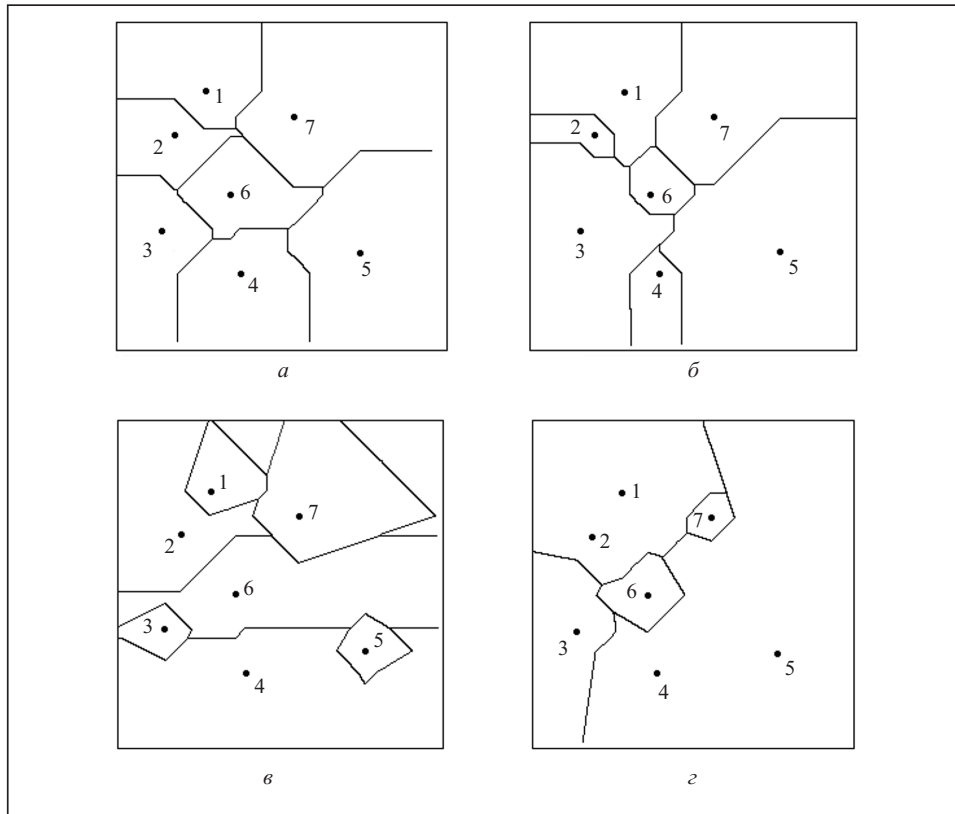


Рис. 10. Диаграммы Вороного семи точек при манхэттенской метрике: стандартная (а); аддитивно взвешенная (б); мультипликативно взвешенная (в); аддитивно и мультипликативно взвешенная (з)

На рис. 9 изображена полученная в результате решения задачи **A2** аддитивно взвешенная диаграмма Вороного с оптимальным размещением точек-генераторов в заданной области при следующих исходных данных: $w = (1; 2; 1; 2; 1; 2; 1)$, $c(x, \tau_i) = \sqrt{(x_i^{(1)} - \tau_i^{(1)})^2 + (x_i^{(2)} - \tau_i^{(2)})^2}$, $a = (-1; -2; -1; -2; -1; -2; -1)$ и оптимальных координатах центров $\tau_1 = (2.48, 1.56)$, $\tau_2 = (1.46, 4.98)$, $\tau_3 = (4.98, 4.98)$, $\tau_4 = (8.50, 4.98)$, $\tau_5 = (7.47, 1.55)$, $\tau_6 = (2.48, 8.40)$, $\tau_7 = (7.47, 8.40)$.

Варианты диаграммы Вороного, полученные при решении задачи **A1** [1] при соответствующих способах задания подынтегральной функции критерия качества разбиения, в которых расстояние между двумя точками определяется манхэттенской метрикой, представлены на рис. 10, а, б, в, з соответственно при следующих векторах весовых коэффициентов: $w = \Theta$, $a = \Theta$; $w = \Theta$, $a = (-2; -1; -3; -1; -4; -1; -2)$; $w = (2; 1; 3; 1; 4; 1; 2)$, $a = \Theta$; $w = (2; 1; 3; 1; 4; 1; 2)$, $a = (1; 3; 2; 2; 1; 1; 2)$.

Все приведенные ранее взвешенные диаграммы Вороного рассматривались для случая, когда вес имели лишь точки-генераторы. Описанный в статье подход к построению диаграммы Вороного, основанный на применении методов ОРМ, позволяет легко строить диаграмму Вороного для множества Ω , каждая точка которого имеет собственный вес. Последний в задачах ОРМ определяется функцией плотности $\rho(x)$.

Так, например, представленные на рис. 11 диаграммы Вороного тридцати точек-генераторов, оптимально размещенных во взвешенной области Ω ($a_i = 0$, $i = 1, N$), получены при решении задачи **A1**, в которой функция плотности задавалась соответственно (см. рис. 11, а, б) в виде $\rho(x) = 300 \exp(-(x^{(1)} - 3)^2 - 4(x^{(2)} - 8)^2)$ и

$$\rho(x) = \begin{cases} 10, & \text{если } 0.25(x^{(1)} - 6.7)^2 - 0.44(x^{(2)} - 8)^2 < 1, \\ 0.1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

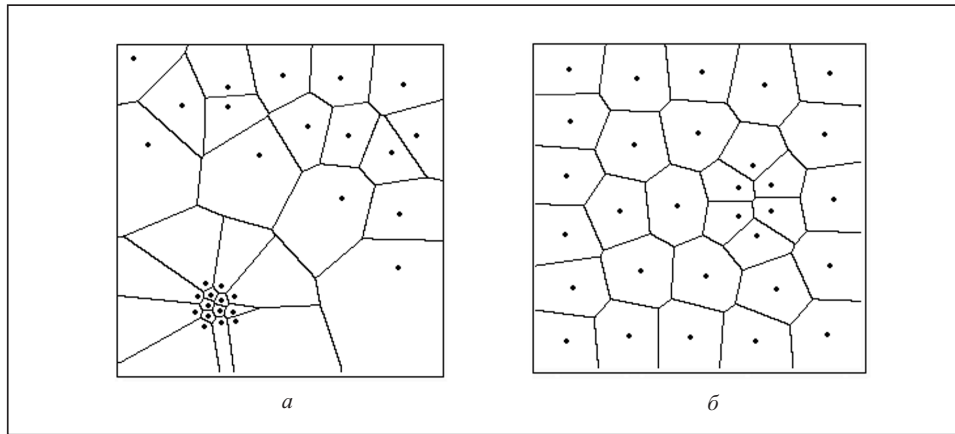


Рис. 11. Диаграммы Вороного с оптимальным размещением тридцати точек-генераторов для различных функций $\rho(x)$

На рис. 12 представлена диаграмма Вороного десяти точек с ограниченными мощностями ячеек Вороного, полученная в результате решения задачи А3 при $a_i = 0, i = 1, 10, b_i = 100, i = 1, 10, i \neq 3, 6; b_3 = 5, b_6 = 2, p = 10$.

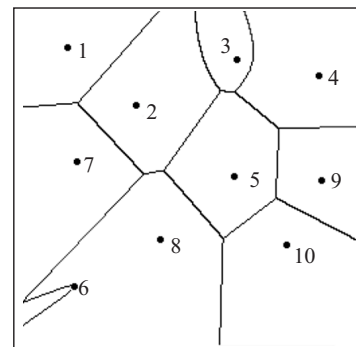


Рис. 12. Диаграмма Вороного с ограничением на мощности третьей и шестой ячеек

Исследуя диаграммы, представленные на рис. 13 и 14, можно сделать вывод о том, что сложность алгоритмов построения диаграмм Вороного на основе описанного в статье подхода существенно не меняется при увеличении количества точек-генераторов.

Таким образом, при соответствующей формулировке непрерывной линейной задачи оптимального разбиения множества ее решение приводит к определенному варианту диаграммы Вороного заданного числа точек. Заметим также, что алгоритмы решения непрерывных линейных задач ОРМ имеют ряд преимуществ: не зависят от размерности пространства E_n (вычисляются лишь многомерные интегралы) и от геометрии разбиваемых множеств, а также вследствие высокого быстродействия r -алгоритма Шора применимы для задач больших размерностей ($N = 100, 200, 300$ и т.д.).

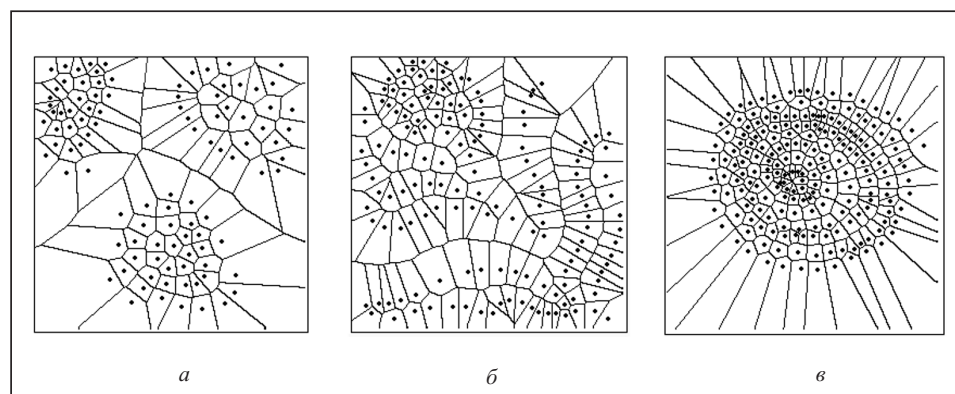


Рис. 13. Диаграммы Вороного, генерируемые N точками и полученные в результате решения непрерывной линейной задачи ОРМ без ограничений с заданным расположением центров подмножеств при $N = 100$ (а); $N = 150$ (б); $N = 200$ (в)

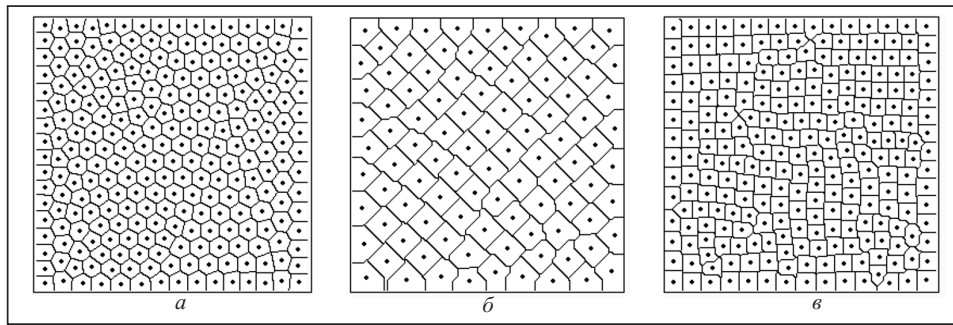


Рис. 14. Диаграммы Вороного с оптимальным размещением N точек-генераторов: евклидова метрика при $N = 250$ (а); манхэттенская метрика при $N = 100$ (б); метрика Чебышева при $N = 250$ (в)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С учетом изложенного можно утверждать, что общим подходом (способом) к построению различных вариантов диаграммы Вороного является подход, основанный на формулировании непрерывных задач оптимального разбиения множеств с критериями качества разбиения, обеспечивающими соответствующие виды диаграммы Вороного, и на применении разработанного в [2, 3] математического и алгоритмического аппаратов решения таких задач.

Универсальность данного подхода к построению диаграмм Вороного подтверждается следующими фактами:

- модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств можно обобщить на случай нечеткого задания исходных параметров задачи или требования нечеткого разбиения множества, в результате чего и результирующие диаграммы Вороного могут быть нечеткими;

- если при математическом описании практических задач оптимального разбиения множеств учитывать состояние некоторого объекта или процесса, которое изменяется со временем и/или в пространстве, то можно получить в результате решения некоторых таких задач динамические диаграммы Вороного [2];

- среди непрерывных задач оптимального разбиения множеств выделяют класс задач, в которых кроме разбиения нужно найти еще и оптимальное расположение центров подмножеств, таким образом, наряду с задачей построения диаграммы Вороного можно ставить задачу определения оптимальных (в каком-то смысле) координат точек-генераторов этой диаграммы;

- сложность алгоритмов построения диаграмм Вороного на основе описанного подхода существенно не меняется при увеличении количества точек-генераторов;

- результатом предложенного подхода является возможность строить не только уже известные диаграммы Вороного, но и конструировать новые.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киселева Е.М., Коряшкина Л.С. Теория непрерывных задач оптимального разбиения множеств как универсальный математический аппарат построения диаграммы Вороного и ее обобщений. I. Теоретические основы // Кибернетика и системный анализ. — 2015. — 51, № 3. — С. 3–15.
2. Киселева Е.М., Коряшкина Л.С. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи. — К.: Наук. думка, 2013. — 606 с.
3. Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. — К.: Наук. думка, 2005. — 564 с.
4. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложение. — К.: Наук. думка, 1979. — 200 с.
5. Использование методов негладкой оптимизации в задачах стохастического программирования / Н.З. Шор, Т.А. Бардадым, Н.Г. Журбенко, А.П. Лиховид, П.И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 5. — С. 33–47.
6. Шор Н.З., Стеценко С.И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. — К.: Наук. думка, 1989. — 209 с.
7. Шор Н.З., Стецюк П.И. Использование модификации r -алгоритма для нахождения минимума полиномиальных функций // Кибернетика и системный анализ. — 1997. — № 4. — С. 28–49.

Поступила 19.05.2014