УДК 519.24

Д.В. КОРОЛЮК

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ В СБАЛАНСИРОВАННОЙ МАРКОВСКОЙ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

Аннотация. Для марковских статистических экспериментов в сбалансированной случайной среде, которые задаются решениями разностных стохастических уравнений, получена аппроксимация в схеме серий диффузионным процессом типа Орнштейна–Уленбека. Параметры сдвига и диффузии определяются усреднением по стационарному распределению вложенной цепи Маркова с учетом условия сбалансированности.

Ключевые слова: статистические эксперименты, разностные стохастические уравнения, марковская случайная среда, направляющие параметры функции регрессии приращений, коэффициент диффузии стохастической компоненты, диффузионный процесс типа Орнштейна–Уленбека.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Марковские статистические эксперименты с дискретно-непрерывным временем $t=[k\varepsilon^2]$, $k \ge 0$ [1], задаются решениями разностных стохастических уравнений с двумя компонентами: предсказуемой и стохастической (мартингал-разности). Направляющие параметры функции регрессии приращений, как и коэффициент диффузии стохастической компоненты, зависят от состояний вложенной цепи Маркова в однородном (во времени) равномерно эргодическом марковском процессе, описывающем состояния случайной среды. Сбалансированность марковской случайной среды означает нулевое среднее направляющей функции регрессии приращений по эргодическому распределению марковского процесса, описывающего состояния случайной среды.

В данной статье марковские статистические эксперименты с дискретно-непрерывным временем задаются решениями разностных стохастических уравнений с параметрами сдвига и диффузии, которые зависят от состояний сбалансированной марковской случайной среды, обеспечивающей нулевое среднее направляющей функции регрессии приращений по эргодическому распределению вложенной цепи Маркова.

Марковская случайная среда рассматривается в двух вариантах.

Дискретная марковская случайная среда задается цепью Маркова x_k, $k \ge 0$, в стандартном фазовом пространстве состояний $(E, \mathcal{E})$ с переходными вероятностями

$$P(x,B)=\mathcal{P}\{x_{k+1}\in \mathcal{B} | x_k = x\}, \ x\in E, \ \mathcal{B}\in\mathcal{E}. \tag{1}$$

Непрерывная марковская случайная среда задается марковским процессом $x(t)$, $t\ge 0$, в стандартном фазовом пространстве состояний $(E,\mathcal{E})$ с переходными вероятностями вложенной цепи Маркова $x_k = x(\tau_k)$, $k \ge 0$, и распределениями времени пребывания в состояниях θ_{k+1}, $k \ge 0$:

$$\mathcal{P}\{\theta_{k+1}\ge t | x_k = x\} = \exp[-q(x)t], \ t\ge 0.$$

Таким образом, моменты восстановления имеют вид

$$\tau_{k+1}=\tau_k+\theta_{k+1}, \ k\ge 0.$$

ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Рассматривается параметр направляющего воздействия $V(x)$, $x\in E$, который может принимать как положительные, так и отрицательные значения при условии сбалансированности случайной среды:

$$\int_E \rho(dx)V(x)=0.$$

В сбалансированной случайной среде стационарно-усредненный параметр направляющего воздействия является нулевым. В связи с этим изменяется нормировка параметра направляющего воздействия в асимптотическом анализе решений разностного стохастического уравнения для марковских статистических экспериментов.

Основное предположение А в дискретной марковской случайной среде. Марковские статистические эксперименты в сбалансированной марковской случайной среде с дискретно-непрерывным временем $t = k\varepsilon^2$, $k \geq 0$, задаются решением разностного стохастического уравнения

$$\Delta\zeta^{\varepsilon}(t+\varepsilon^2) = \varepsilon[V(x_k)\zeta^{\varepsilon}(t) + \sigma(x_k)\Delta\mu^{\varepsilon}(t+\varepsilon^2)], \; k \geq 0, \tag{2}$$

при дополнительных условиях:

$$E[\Delta\mu^{\varepsilon}(t)] = 0, \; E[[\Delta\mu^{\varepsilon}(t+\varepsilon^2)]^2 | \zeta^{\varepsilon}(t)] = 1, \; t \geq 0. \tag{3}$$

Параметры направляющего воздействия $V(x)$ и вариации $\sigma(x)$, $x \in E$, являются ограниченными числовыми функциями состояний $x \in E$ цепи Маркова x_k, $k \geq 0$, определяющей марковскую случайную среду. Здесь по определению

$$\Delta\zeta^{\varepsilon}(t+\varepsilon^2) := \zeta^{\varepsilon}(t+\varepsilon^2) - \zeta^{\varepsilon}(t), \; t \geq 0.$$

Основное предположение В в непрерывной марковской случайной среде. Определим расширение марковского статистического эксперимента в непрерывной марковской случайной среде как ступенчатый процесс:

$$\zeta^{\varepsilon}(t) = \zeta^{\varepsilon}(\tau_k), \; \tau_k = k\varepsilon^2 \leq t \leq \tau_{k+1} = (k+1)\varepsilon^2, \; k \geq 0.$$

Марковские статистические эксперименты в непрерывной марковской случайной среде задаются решениями разностных стохастических уравнений

$$\Delta\zeta^{\varepsilon}(t+\varepsilon^2) = \varepsilon[V(x_k)\zeta^{\varepsilon}(\tau_k) + \sigma(x_k)\Delta\mu^{\varepsilon}(\tau_{k+1})], \; k \geq 0, \tag{4}$$

при дополнительных условиях:

$$E[\Delta\mu^{\varepsilon}(\tau_{k+1}) | \zeta^{\varepsilon}(\tau_k)] = 0, \; E[[\Delta\mu^{\varepsilon}(\tau_{k+1})]^2 | \zeta^{\varepsilon}(\tau_k)] = 1, \; k \geq 0. \tag{5}$$

ДИФФУЗИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Марковские статистические эксперименты, определяемые решениями разностных стохастических уравнений (2), (3), а также (4), (5), при дополнительных условиях допускают аппроксимацию в схеме серий с параметром серии $\varepsilon \to 0$, нормальным процессом типа Орнштейна–Уленбека с непрерывным временем. При этом существенно изменяется алгоритм вычисления параметра направляющего воздействия и дисперсии стохастической компоненты предельного процесса.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия.

У0: условие баланса

$$\int_E \rho(dx)V(x) = 0. \tag{6}$$

У1А: цепь Маркова x_k, $k \geq 0$, с переходными вероятностями является равномерно эргодической со стационарным распределением $\rho(B)$, $B \in \mathcal{E}$:

$$\rho(B) = \int_E \rho(dx)P(x,B), \; \rho(E) = 1. \tag{7}$$

У1В: цепь Маркова $x(t)$, $t \geq 0$, с переходными вероятностями является равномерно эргодической со стационарным распределением $\pi(B)$, $B \in \mathcal{E}$:

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), \; q = \int_E \pi(dx)q(x).$$

У2: мартингал-разности $\Delta\mu^{\varepsilon}(t)$, $t \ge 0$, удовлетворяют условию

$$E[\Delta\mu^{\varepsilon}(t)]^3 < C < +\infty \quad \forall t \in [0, T].$$

У3: имеет место сходимость начальных условий

$$\zeta^{\varepsilon}(0) \xrightarrow{P} \zeta(0), \ \varepsilon \to 0, \ E|\zeta(0)| \le C < +\infty.$$

Тогда имеет место сходимость конечномерных распределений марковских статистических экспериментов

$$\zeta^{\varepsilon}(t) \xrightarrow{D} \zeta(t), \ \varepsilon \to 0, \ t \in [0, T]. \tag{8}$$

В условиях предположения **A** в дискретной марковской случайной среде предельный процесс $\zeta(t)$, $t \ge 0$, задается генератором

$$\mathbb{L}_d^0 \varphi(s) = \widehat{V_0}\, s\varphi'(s) + \frac{1}{2}\widehat{\sigma_0^2}\, \varphi''(s). \tag{9}$$

Параметры направляющего воздействия $\widehat{V_0}$ и дисперсии $\widehat{\sigma_0^2}$ вычисляются по формулам усреднения

$$\widehat{V_0} = \widehat{V_0^2} - \widehat{V^2}, \ \widehat{\sigma_0^2} = \widehat{\sigma^2} + (2\widehat{V_0^2} - \widehat{V^2})s^2, \tag{10}$$

где

$$\begin{gathered} \widehat{V_0^2} := \int_E \rho(dx) V(x) \mathbb{R}_0 V(x), \ \widehat{V^2} := \int_E \rho(dx) V^2(x), \\ \widehat{\sigma^2} := \int_E \rho(dx) \sigma^2(x). \end{gathered} \tag{11}$$

Потенциальный оператор $\mathbb{R}_0$ является приводимо-обратимым к генератору цепи Маркова $\mathbb{Q}_d := \mathbb{P} - \mathbb{I}$ [4, Chap. 3, Sec. 1]:

$$\mathbb{Q}_d \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}_0 \mathbb{Q}_d = \Pi - \mathbb{I}. \tag{12}$$

Проектор Π на подпространство нулей оператора $\mathbb{Q}_d$ определяется равенством

$$\Pi\varphi(x) = \int_E \rho(dx)\varphi(x).$$

В условиях предположения **B** в непрерывной марковской случайной среде предельный процесс $\zeta(t)$, $t \ge 0$, задается генератором

$$\mathbb{L}_c^0 \varphi(s) = q\mathbb{L}_d^0 \varphi(s).$$

Замечание. Предельный процесс $\zeta(t)$, $t \ge 0$, с генератором, определяемым соотношениями (9)–(11), является нормальным диффузионным процессом типа Орнштейна–Уленбека, который задается стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\zeta(t) = -\widehat{V_0}\, \zeta(t)dt + \widehat{\sigma_0}\, dW(t), \ t \ge 0. \tag{13}$$

Здесь $W(t)$, $t \ge 0$, — стандартный процесс броуновского движения с параметрами

$$E[W(t)] = 0, \ E[[W(t)]^2] = t.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Основная идея доказательства предельной теоремы 1 для марковских процессов заключается в применении предельных теорем для случайных процессов, в частности для случайных эволюций, основанных на сходимости генераторов, порождающих соответствующие марковские процессы [2–5]. Сходимость конечномерных распределений (7) обеспечивает сходимость порождающих операторов (генераторов) на достаточно широком классе числовых тест-функций.

В дальнейшем применяется класс $C_b^3(R)$ числовых функций $\varphi(s)$, финитных (отличных от 0 на конечных интервалах) и трижды непрерывно дифференцированных с ограниченными производными. Кроме того, при использовании тест-функций $\varphi(s,x)$, $x \in \mathcal{E}$, зависящих от дополнительного аргумента x, условие $\varphi(s,\cdot\,) \in C_b^3(R)$ означает существование функции $\varphi(s) \in C_b^3(R)$, аппроксимирующей функцию $\varphi(s,x)$: $|\varphi(s,x)| \le \varphi(s)$.

Наличие марковской случайной среды требует использования решений проблемы сингулярного возмущения для приводимо-обратимого оператора, определяющего равномерно эргодическую цепь Маркова (или марковский процесс) [3, Chap. 5, Sec. 2]. Прежде всего используется характеризация расширенного марковского процесса с дополнительной компонентой, задающей марковскую случайную среду.

Лемма 1. В условиях предположения **A** в дискретной марковской случайной среде двухкомпонентная цепь Маркова

$$\zeta^{\varepsilon}(t),\ x^{\varepsilon}(t) := x_{t/\varepsilon^2},\ \ t = k\varepsilon^2,\ \ \varepsilon > 0, \tag{14}$$

задается генератором

$$\mathbb{L}_d^{\varepsilon}\varphi(s,x) = \varepsilon^{-2}[\mathbb{C}^{\varepsilon}(x)\mathbb{P} - \mathbb{I}]\varphi(s,x), \tag{15}$$

где операторы $\mathbb{P}$ и $\mathbb{C}^{\varepsilon}$ определяются соотношениями

$$\mathbb{P}\varphi(x) := \int_E P(x,dy)\varphi(y),$$

$$\mathbb{C}^{\varepsilon}(x)\varphi(x) := E[\varphi(s + \Delta\zeta^{\varepsilon}(t+\varepsilon^2)) \,|\, \zeta^{\varepsilon}(t) = s, x^{\varepsilon}(t) = x],\ \ t \ge 0.$$

В условиях предположения **B** в непрерывной марковской случайной среде двухкомпонентный марковский процесс

$$\zeta^{\varepsilon}(t), x^{\varepsilon}(t) := x(t/\varepsilon^2),\ \ t = k\varepsilon^2,\ \ k \ge 0,$$

задается генератором

$$\mathbb{L}_c^{\varepsilon}\varphi(s,x) = q(x)\mathbb{L}_d^{\varepsilon}\varphi(s,x).$$

Доказательство. В условиях предположения **A** лемма 1 следует из определения генератора цепи Маркова в дискретно-непрерывном времени с интервалом ε^2 [6, Chap. 2, Sec. 1].

В условиях предположения **B** лемма 1 следует из известного определения генератора марковского процесса с непрерывным временем с учетом переходных вероятностей вложенной цепи Маркова.

Существенный шаг доказательства теоремы 1 реализуется в следующей лемме.

Лемма 2. Генератор (15) двухкомпонентной цепи Маркова (14) допускает асимптотическое разложение на числовых тест-функциях $\varphi(s,\cdot\,) \in C_b^3(R)$:

$$\mathbb{L}_d^{\varepsilon}\varphi(s,x) = [\varepsilon^{-2}\mathbb{Q}_d + \varepsilon^{-1}\mathbb{C}_1(x)\mathbb{P} + \mathbb{C}_2(x)\mathbb{P}]\varphi(s,x) + \varepsilon\mathbb{R}^{\varepsilon}(x)\mathbb{P}\varphi(s,x).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_d\varphi(x) &= [\mathbb{P} - \mathbb{I}]\varphi(x), \\ \mathbb{C}_1(x)\varphi(x) &= V(x)s\varphi'(s), \\ \mathbb{C}_2(x)\varphi(x) &= \frac{1}{2}[V^2(x)s^2 + \sigma^2(x)]\varphi''(s) \end{aligned} \tag{16}$$

и остаточный член

$$\varepsilon\mathbb{R}^{\varepsilon}\varphi(s) \to 0,\ \ \varepsilon \to 0,\ \ \varphi(s) \in C_b^3(R). \tag{17}$$

Доказательство. Рассмотрим следующее преобразование генератора (15):

$$\mathbb{L}_d^{\varepsilon}\varphi(s,x) = \varepsilon^{-2}[\mathbb{Q}_d + \mathbb{C}_0^{\varepsilon}(x)\mathbb{P}]\varphi(s,x).$$

Здесь по определению

$$\mathbb{C}_0^\varepsilon(x) := \mathbb{C}^\varepsilon(x) - \mathbb{I}.$$

Далее, с учетом основного предположения (2) используется разложение Тейлора функций $\mathbb{C}_0^\varepsilon(x)\varphi(s)$ по степеням $\Delta\zeta_x^\varepsilon(t)$ в окрестности точки $\zeta_x^\varepsilon(t) = s$ до третьего порядка включительно:

$$\mathbb{C}_0(x)\varphi(x) = E\varphi(s + \Delta\zeta_x^\varepsilon(t+\varepsilon^2)) - \varphi(s) =$$

$$= E\varphi(s + \varepsilon[V(x)\cdot s + \sigma(x)\Delta\mu^\varepsilon(t+\varepsilon^2)]) - \varphi(s) =$$

$$= \varepsilon V(x) s\varphi'(s) + \frac{1}{2}\varepsilon^2[V^2(x)s^2 + \sigma^2(x)]\varphi''(x) + \varepsilon^3\mathbb{R}^\varepsilon(x)\varphi(s),$$

где

$$\mathbb{R}^\varepsilon(x)\varphi(s) = \frac{1}{6}E[(\Delta\zeta_x^\varepsilon)^3\varphi'''(s)] =$$
$$= \frac{1}{6}(V^3(x)s^3 + 3V(x)s\sigma^2(x) + \sigma^3(x)E[\Delta\mu^\varepsilon(x)]^3)E\varphi'''(s + \theta\Delta\zeta_x^\varepsilon(t)). \qquad (18)$$

Остаточный член (18) с учетом основного предположения **А** и условия У2 теоремы 1 ограничен на классе функций $C_b^3(R)$. Итак, выполняется условие (17).

Следующий этап обоснования теоремы 1 осуществляется с использованием решения проблемы сингулярного возмущения для срезанного оператора [3, Chap. 5]

$$\overline{\mathbb{L}_d^\varepsilon}\varphi(s,x) = [\varepsilon^{-2}\mathbb{Q}_d + \varepsilon^{-1}\mathbb{C}_1(x)\mathbb{P} + \mathbb{C}_2(x)\mathbb{P}]\,\varphi(s,x). \qquad (19)$$

Лемма 3. Решение проблемы сингулярного возмущения для срезанного оператора (19) на возмущенных тест-функциях

$$\varphi^\varepsilon(s,x) = \varphi(s) + \varepsilon\varphi_1(s,x) + \varepsilon^2\varphi_2(s,x)$$

задается соотношением

$$\overline{\mathbb{L}_d^\varepsilon}\varphi(s,x) = \mathbb{L}_d^0\varphi(s) + \mathbb{E}_2^\varepsilon(x)\varphi(s).$$

Здесь предельный оператор $\mathbb{L}^0$ определяется соотношениями (9)–(11), а остаточный член $\mathbb{R}_2^\varepsilon(x)$ пренебрежимый:

$$\mathbb{R}_2^\varepsilon(x)\varphi(s) \to 0,\ \ \varepsilon \to 0,\ \ \varphi(s) \in C_b^3(R).$$

Доказательство. Рассмотрим соотношение

$$\mathbb{L}_d^\varepsilon\varphi(s,x) = [\varepsilon^{-2}\mathbb{Q}_d + \varepsilon^{-1}\mathbb{C}_1(x)\mathbb{P} + \mathbb{C}_2(x)\mathbb{P}][\varphi(s) + \varepsilon\varphi_1(s,x) + \varepsilon^2\varphi_2(s,x)] =$$
$$= \varepsilon^{-2}\mathbb{Q}_d\varphi(s) + \varepsilon^{-1}[\mathbb{Q}_d\varphi_1(s,x) + \mathbb{C}_1(x)\varphi(s)] + \qquad (20)$$
$$+ [\mathbb{Q}_d\varphi_2(s,x) + \mathbb{C}_1(x)\mathbb{P}\varphi_1(s,x) + \mathbb{C}_2(x)\varphi(s)] + \mathbb{R}_2^\varepsilon(x)\varphi(s).$$

Первое слагаемое в правой части (20) нулевое, так как $\mathbb{Q}_d\varphi(s) \equiv 0$, второе слагаемое нулевое вследствие условия баланса (6):

$$\mathbb{Q}_d\varphi_1(s,x) + \mathbb{C}_1(x)\varphi(s) = 0. \qquad (21)$$

Решение уравнения (21) задается соотношением [3, Chap. 5, Sec. 2]

$$\varphi_1(s,x) = \mathbb{R}_0\mathbb{C}_1(x)\varphi(s). \qquad (22)$$

Далее подставляем (22) в третье слагаемое правой части (20). Тогда решение проблемы сингулярного возмущения для уравнения

$$\mathbb{Q}_d\varphi_2(s,x) + \mathbb{C}_1(x)\mathbb{P}\varphi_1(s,x) + \mathbb{C}_2(x)\varphi(s) = \mathbb{L}^0\varphi(s)$$

определяется соотношениями [3, Chap. 2, Sec. 2, Proposition 5.2]

$$\mathbb{L}^0\varphi(s) = \Pi[\mathbb{C}_1(x)\mathbb{P}\mathbb{R}_0\mathbb{C}_1(x) + \mathbb{C}_2(x)]\varphi(s). \qquad (23)$$

Следующее преобразование оператора (23) задает вид предельного оператора в теореме 1. Учитывая определение операторов (16), вычисляем первое слагаемое в (23):

$$\Pi\mathbb{C}_1(x)\mathbb{P}\mathbb{R}_0\mathbb{C}_1(x)\varphi(s) = \Pi\mathbb{C}_1(x)\mathbb{P}\mathbb{R}_0 V(x)s\varphi'(s) = \Pi V(x)s\mathbb{P}\mathbb{R}_0 V(x)[s\varphi'(s)]' =$$
$$= \Pi V(x)\mathbb{P}\mathbb{R}_0 V(x)[s\varphi'(s) + s^2\varphi''(s)]. \tag{24}$$

Вычислим параметр, представленный композицией операторов в правой части (24):

$$\widehat{V_0} := \Pi V(x)\mathbb{P}\mathbb{R}_0 V(x) = \Pi V(x)\mathbb{Q}_d\mathbb{R}_0 V(x) + \Pi V(x)\mathbb{R}_0 V(x). \tag{25}$$

Учитывая равенство (12) и условие баланса (6), получаем соотношения (10), (11).

Итак, правая часть (25) имеет представление $\widehat{V_0} = \widehat{V_0^2} - \widehat{V^2}$, т.е. первое слагаемое (23) имеет вид

$$[\Pi\mathbb{C}_1(x)\mathbb{P}\mathbb{R}_0\mathbb{C}_1(x)]\varphi(s) = \widehat{V_0}[s\varphi'(s) + s^2\varphi''(s)].$$

Вычисление второго слагаемого в (23) дает следующее выражение:

$$\Pi\mathbb{C}_2(x)\varphi(s) = \frac{1}{2}[\widehat{V^2}\, s^2 + \widehat{\sigma^2}]\,\varphi''(s).$$

Предельный оператор (23) имеет представление (9)–(11), что завершает доказательство леммы 3.

Завершение доказательства теоремы 1 реализуется применением модельной предельной теоремы [3, Theorem 6.3], что обеспечивает сходимость конечномерных распределений (8).

Стационарность предельного процесса $\zeta(t)$, $t \ge 0$, который задается решением стохастического дифференциального уравнения (13), обеспечивает неравенство $\widehat{V_0^2} < \widehat{V^2}$ (см. (11)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Королюк Д. В. Статистичні експерименти з наполегливою лінійною регресією в марковському випадковому середовищі // Доп. НАНУ. — 2015. — № 4. — С. 12–18.
2. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1987. — 328 с.
3. Korolyuk V.S., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. — New York; London: World Scientific, 2005. — 331 p.
4. Korolyuk V.S., Korolyuk V.V. Stochastic models of systems. — Dordrecht; Boston: Kluwer, 1999. — 185 p.
5. Ethier S.N., Kurtz T.G. Markov processes: Characterization and convergence. — New York: Wiley, 1986. — 534 p.
6. Nevelson M. B., Hasminskii R.Z. Stochastic approximation and recursive estimation. — Providence (R.I.): Amer. Math. Soc. Translations of Mathematical Monographs. — 1973. — **47.** — 304 p.

Поступила 11.03.2015