УДК 681.322.012

Л.Д. ЕЛФИМОВА

БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ БАЗОВОЙ ОПЕРАЦИИ КЛЕТОЧНЫХ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Аннотация. Рассмотрены быстрые алгоритмы для клеточной операции $D = C + \sum_{l=1}^{\xi} A_l B_l$, построенные на основе гибридных алгоритмов умножения матриц порядка $n = 3\mu$ $(\mu > 1)$, $n = 6\mu$ $(\mu > 0)$ и отличающиеся от известных алгоритмов наименьшей операционной сложностью. Даны оценки мультипликативной, аддитивной и общей сложностей представленных алгоритмов.

Ключевые слова: линейная алгебра, клеточные методы, базовая операция, быстрые алгоритмы умножения матриц.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время для численных методов линейной алгебры (ЛА) разработаны их клеточные аналоги, свойства которых обеспечивают возможность быстрого решения задач больших размеров на различных параллельных вычислительных системах и создания на их основе эффективного машинно-независимого программного обеспечения [1, 2]. Указанные клеточные аналоги требуют для своей реализации выполнения базовой операции вида

$$D = C + AB \tag{1}$$

и / или

$$D = C + \sum_{l=1}^{\xi} A_l B_l \tag{2}$$

(где A, B, C, D — квадратные матрицы размера клетки r; ξ — переменный индекс суммирования) и нестандартных операций, которые составляют достаточно малый процент общего числа операций алгоритма и могут быть произвольными алгоритмами ЛА.

Для быстрого вычисления клеточных операций (1) и (2), составляющих большой процент общего числа арифметических операций алгоритма, используются быстрые алгоритмы умножения $(n \times n)$-матриц, а именно широко применяемые на практике рекурсивные алгоритмы Штрассена [3], Винограда–Штрассена [4], Лейдермана [5] и регулярный алгоритм Винограда [6]. Кроме того, в работах [7–9] представлено семейство новых быстрых алгоритмов умножения матриц порядка $n = 2\mu$ $(\mu > 1)$ [7, 8], $n = 3\mu$ $(\mu > 1)$ [9], $n = 4\mu$ $(\mu > 0)$ [7, 8], $n = 6\mu$ $(\mu > 0)$ [9], при построении которых использовались алгоритмы умножения (2×2)-матриц Штрассена [3] и Винограда–Штрассена [4], (3×3)-матриц Лейдермана [5] и для скалярного произведения Винограда [6].

Данные гибридные алгоритмы, полученные новым способом построения быстрых алгоритмов, сочетая в себе достоинства перечисленных известных алгоритмов, обладают рядом отличительных особенностей. Во-первых, они характеризуются наименьшей по сравнению с известными алгоритмами операционной сложностью, обусловленной впервые достигнутой в них одновременной минимизацией мультипликативной и аддитивной сложностей. Во-вторых, гибридные алгоритмы умножения матриц порядка $n = 2\mu (\mu > 1)$ и $n = 3\mu (\mu > 1)$ впервые стали основой для построения быстрых клеточных методов умножения матриц, которые совместно с рекурсивными методами Штрассена и Лейдермана привели к разработке семейства клеточных методов умножения матриц [10–13], позволяющих варьировать размер клетки и получать клеточные аналоги известных алгоритмов умножения матриц с минимизированными мультипликативной, аддитивной и общей сложностями. В-третьих, регулярная структура информационных зависимостей всех быстрых гибридных алгоритмов дает возможность ускорить вычисление базовой операции (2) за счет минимизации ее операционной сложности. Так, в работе [8] описаны быстрые алгоритмы для указанной операции, построенные на основе гибридных алгоритмов умножения матриц четного порядка $n=2\mu\,(\mu>1)$ и $n=4\mu\,(\mu>0)$.

Цель настоящей статьи — оптимизация вычислительной сложности алгоритмов вычисления клеточной операции (2). В данной работе рассматриваются наиболее быстрые алгоритмы для данной операции, которые построены на основе гибридных алгоритмов умножения матриц не только четного, но и нечетного порядка $n=3\mu\,(\mu>1)$, $n=6\mu\,(\mu>0)$ и отличаются от известных алгоритмов вычисления данной операции наименьшей операционной сложностью. Даны оценки вычислительной сложности предложенных алгоритмов.

БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ КЛЕТОЧНОЙ ОПЕРАЦИИ $D=C+\sum_{l=1}^{\xi} A_l B_l$, ПОСТРОЕННЫЙ НА ОСНОВЕ ГИБРИДНОГО АЛГОРИТМА УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ ПОРЯДКА $n=3\mu$ $(\mu>1)$

Гибридный алгоритм умножения двух квадратных матриц $A=\{a_{ij}\}$ и $B=\{b_{ij}\}$ порядка $n=3\mu$ $(\mu>1)$ [9] имеет наименьшую по сравнению с известными алгоритмами операционную сложность, которая составляет $W^*_{\text{общ}} \approx 1,70n^3+8,3n^2$ операций умножения/сложения. При этом мультипликативная и аддитивная сложности данного алгоритма соответственно составляют $W^*_{\text{м}} \approx 0,85n^3$ операций умножения и $W^*_{\text{а}} \approx 0,85n^3+8,3n^2$ операций сложения.

Для ускорения вычисления операции $D=C+\sum_{l=1}^{\xi} A_l B_l$ над матрицами A, B, C, D порядка r, реализуемой с помощью указанного алгоритма, преобразуем его структуру информационных зависимостей, используя свойства коммутативности и ассоциативности операции сложения. В этом случае быстрый регулярный процесс вычисления клеточной операции (2) имеет следующий вид:

$$s^1_{ij}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}\alpha^{1(l)}_{ik}\cdot b^{(l)}_{3k-1,\,3j-1},\qquad s^5_{ij}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}\alpha^{4(l)}_{ik}\cdot \beta^{4(l)}_{kj},$$

$$s^2_{ij}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}\alpha^{2(l)}_{ik}\cdot \beta^{1(l)}_{kj},\qquad s^6_{ij}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}a^{(l)}_{3i-2,\,3k-2}\cdot b^{(l)}_{3k-2,\,3j-2},$$

$$s^3_{ij}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}a^{(l)}_{3i-1,\,3k-1}\cdot \beta^{2(l)}_{kj},\qquad s^7_{ij}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}\alpha^{5(l)}_{ik}\cdot \beta^{5(l)}_{kj},$$

$$s^4_{ij}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}\alpha^{3(l)}_{ik}\cdot \beta^{3(l)}_{kj},\qquad s^8_{ij}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}\alpha^{6(l)}_{ik}\cdot \beta^{6(l)}_{kj},$$

$$s_{ij}^{9}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}\alpha_{ik}^{7(l)}\cdot\beta_{kj}^{7(l)},\qquad s_{ij}^{17}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}\alpha_{ik}^{13(l)}\cdot\beta_{kj}^{13(l)},$$

$$s_{ij}^{10}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}\alpha_{ik}^{8(l)}\cdot b_{3k-1,\,3j}^{(l)},\qquad s_{ij}^{18}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}\alpha_{ik}^{14(l)}\cdot\beta_{kj}^{14(l)},\qquad (3)$$

$$s_{ij}^{11}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}a_{3i,\,3k-1}^{(l)}\cdot\beta_{kj}^{8(l)},\qquad s_{ij}^{19}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}a_{3i-2,\,3k-1}^{(l)}\cdot b_{3k-1,\,3j-2}^{(l)},$$

$$s_{ij}^{12}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}\alpha_{ik}^{9(l)}\cdot\beta_{kj}^{9(l)},\qquad s_{ij}^{20}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}a_{3i-1,\,3k}^{(l)}\cdot b_{3k,\,3j-1}^{(l)},$$

$$s_{ij}^{13}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}\alpha_{ik}^{10(l)}\cdot\beta_{kj}^{10(l)},\qquad s_{ij}^{21}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}a_{3i-1,\,3k-2}^{(l)}\cdot b_{3k-2,\,3j}^{(l)},$$

$$s_{ij}^{14}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}a_{3i-2,\,3k}^{(l)}\cdot b_{3k,\,3j-2}^{(l)},\qquad s_{ij}^{22}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}a_{3i,\,3k-2}^{(l)}\cdot b_{3k-2,\,3j-1}^{(l)},$$

$$s_{ij}^{15}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}\alpha_{ik}^{11(l)}\cdot\beta_{kj}^{11(l)},\qquad s_{ij}^{23}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}a_{3i,\,3k}^{(l)}\cdot b_{3k,\,3j}^{(l)},$$

$$s_{ij}^{16}=\sum_{l=1}^{\xi}\sum_{k=1}^{r/3}\alpha_{ik}^{12(l)}\cdot\beta_{kj}^{12(l)},$$

где $i, j, k=1,2,\ldots,r/3$; $l=1,2,\ldots,\xi$, ξ — переменный индекс суммирования.

Коэффициенты $\alpha_{ik}^{1(l)},\ldots,\alpha_{ik}^{14(l)}$ и $\beta_{kj}^{1(l)},\ldots,\beta_{kj}^{14(l)}$ определяются по следующим формулам:

$$\alpha_{ik}^{1(l)}=a_{3i-2,\,3k-2}^{(l)}+a_{3i-2,\,3k-1}^{(l)}+a_{3i-2,\,3k}^{(l)}-a_{3i-1,\,3k-2}^{(l)}-a_{3i-1,\,3k-1}^{(l)}-a_{3i,\,3k-2}^{(l)}-a_{3i,\,3k}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{2(l)}=a_{3i-2,\,3k-2}^{(l)}-a_{3i-1,\,3k-2}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{3(l)}=-a_{3i-2,\,3k-2}^{(l)}+a_{3i-1,\,3k-2}^{(l)}+a_{3i-1,\,3k-1}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{4(l)}=a_{3i-1,\,3k-2}^{(l)}+a_{3i-1,\,3k-1}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{5(l)}=-a_{3i-2,\,3k-2}^{(l)}+a_{3i,\,3k-2}^{(l)}+a_{3i,\,3k-1}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{6(l)}=-a_{3i-2,\,3k-2}^{(l)}+a_{3i,\,3k-2}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{7(l)}=a_{3i,\,3k-2}^{(l)}+a_{3i,\,3k-1}^{(l)},\qquad (4)$$

$$\alpha_{ik}^{8(l)}=a_{3i-2,\,3k-2}^{(l)}+a_{3i-2,\,3k-1}^{(l)}+a_{3i-2,\,3k}^{(l)}-a_{3i-1,\,3k-1}^{(l)}-a_{3i-1,\,3k}^{(l)}-a_{3i,\,3k-2}^{(l)}-a_{3i,\,3k-1}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{9(l)}=-a_{3i-2,\,3k}^{(l)}+a_{3i,\,3k-1}^{(l)}+a_{3i,\,3k}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{10(l)}=a_{3i-2,\,3k}^{(l)}-a_{3i,\,3k}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{11(l)}=a_{3i,\,3k-1}^{(l)}+a_{3i,\,3k}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{12(l)}=-a_{3i-2,\,3k}^{(l)}+a_{3i-1,\,3k-1}^{(l)}+a_{3i-1,\,3k}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{13(l)}=a_{3i-2,\,3k}^{(l)}-a_{3i-1,\,3k}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{14(l)}=a_{3i-1,\,3k-1}^{(l)}+a_{3i-1,\,3k}^{(l)},$$

где $i, k=1,2,\ldots,r/3$; $l=1,2,\ldots,\xi$;

$$\beta_{kj}^{1(l)} = -b_{3k-2,\,3j-1}^{(l)} + b_{3k-1,\,3j-1}^{(l)},$$
$$\beta_{kj}^{2(l)} = -b_{3k-2,\,3j-2}^{(l)} + b_{3k-2,\,3j-1}^{(l)} + b_{3k-1,\,3j-2}^{(l)} - b_{3k-1,\,3j-1}^{(l)} - b_{3k-1,\,3j}^{(l)} - b_{3k,\,3j-2}^{(l)} + b_{3k,\,3j}^{(l)},$$
$$\beta_{kj}^{3(l)} = b_{3k-2,\,3j-2}^{(l)} - b_{3k-2,\,3j-1}^{(l)} + b_{3k-1,\,3j-1}^{(l)},$$
$$\beta_{kj}^{4(l)} = -b_{3k-2,\,3j-2}^{(l)} + b_{3k-2,\,3j-1}^{(l)},$$
$$\beta_{kj}^{5(l)} = b_{3k-2,\,3j-2}^{(l)} - b_{3k-2,\,3j}^{(l)} + b_{3k-1,\,3j}^{(l)},$$
$$\beta_{kj}^{6(l)} = b_{3k-2,\,3j}^{(l)} - b_{3k-1,\,3j}^{(l)},$$
$$\beta_{kj}^{7(l)} = -b_{3k-2,\,3j-2}^{(l)} + b_{3k-2,\,3j}^{(l)}, \qquad (5)$$
$$\beta_{kj}^{8(l)} = -b_{3k-2,\,3j-2}^{(l)} + b_{3k-2,\,3j}^{(l)} + b_{3k-1,\,3j-2}^{(l)} - b_{3k-1,\,3j-1}^{(l)} - b_{3k-1,\,3j}^{(l)} - b_{3k,\,3j-2}^{(l)} + b_{3k,\,3j-1}^{(l)},$$
$$\beta_{kj}^{9(l)} = b_{3k-1,\,3j-1}^{(l)} + b_{3k,\,3j-2}^{(l)} - b_{3k,\,3j-1}^{(l)},$$
$$\beta_{kj}^{10(l)} = b_{3k-1,\,3j-1}^{(l)} - b_{3k,\,3j-1}^{(l)},$$
$$\beta_{kj}^{11(l)} = -b_{3k,\,3j-2}^{(l)} + b_{3k,\,3j-1}^{(l)},$$
$$\beta_{kj}^{12(l)} = b_{3k-1,\,3j}^{(l)} + b_{3k,\,3j-2}^{(l)} - b_{3k,\,3j}^{(l)},$$
$$\beta_{kj}^{13(l)} = b_{3k-1,\,3j}^{(l)} - b_{3k,\,3j}^{(l)},$$
$$\beta_{kj}^{14(l)} = -b_{3k,\,3j-2}^{(l)} + b_{3k,\,3j}^{(l)},$$

где $j, k = 1, 2, \ldots, r/3;\ l = 1, 2, \ldots, \xi$.

Элементы результирующей матрицы $D = \{d_{ij}\}$ вычисляются единожды в конце процесса:

$$d_{3i-2,\,3j-2} = c_{3i-2,\,3j-2} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{19},$$
$$d_{3i-2,\,3j-1} = c_{3i-2,\,3j-1} + s_{ij}^{1} + s_{ij}^{4} + s_{ij}^{5} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{12} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{15},$$
$$d_{3i-2,\,3j} = c_{3i-2,\,3j} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{7} + s_{ij}^{9} + s_{ij}^{10} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{16} + s_{ij}^{18},$$
$$d_{3i-1,\,3j-2} = c_{3i-1,\,3j-2} + s_{ij}^{2} + s_{ij}^{3} + s_{ij}^{4} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{16} + s_{ij}^{17},$$
$$d_{3i-1,\,3j-1} = c_{3i-1,\,3j-1} + s_{ij}^{2} + s_{ij}^{4} + s_{ij}^{5} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{20}, \qquad (6)$$
$$d_{3i-1,\,3j} = c_{3i-1,\,3j} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{16} + s_{ij}^{17} + s_{ij}^{18} + s_{ij}^{21},$$
$$d_{3i,\,3j-2} = c_{3i,\,3j-2} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{7} + s_{ij}^{8} + s_{ij}^{11} + s_{ij}^{12} + s_{ij}^{13} + s_{ij}^{14},$$
$$d_{3i,\,3j-1} = c_{3i,\,3j-1} + s_{ij}^{12} + s_{ij}^{13} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{15} + s_{ij}^{22},$$
$$d_{3i,\,3j} = c_{3i,\,3j} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{7} + s_{ij}^{8} + s_{ij}^{9} + s_{ij}^{23},$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, r/3$.

Оценим вычислительную сложность рассмотренного алгоритма (3)–(6). Мультипликативная сложность данного алгоритма соответствует сложности вычислений (3) и составляет $W_{\text{м}} = W_{\text{м}}^{(3)} = \xi \cdot 23\left(\dfrac{r}{3}\right)^3 = \xi \cdot \dfrac{23}{27} r^3 \approx \xi \cdot 0,85 r^3$ операций умножения.

Аддитивная сложность алгоритма определяется следующим образом:

$$W_{\text{а}} = W_{\text{а}}^{(3)} + W_{\text{а}}^{(4)} + W_{\text{а}}^{(5)} + W_{\text{а}}^{(6)},$$

$$W_{\text{а}}^{(3)}=\xi\cdot 23\left[\left(\frac{r}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{r}{3}-1\right)\right]+(\xi-1)\cdot 23\left(\frac{r}{3}\right)^2=\xi\cdot\left[23\left(\frac{r}{3}\right)^3-23\left(\frac{r}{3}\right)^2\right]+\xi\cdot 23\left(\frac{r}{3}\right)^2-$$

$$-23\left(\frac{r}{3}\right)^2=\xi\cdot 0,85r^3-\xi\cdot 2,56r^2+\xi\cdot 2,56r^2-2,56r^2\approx\xi\cdot 0,85r^3-2,56r^2$$ операций сложения,

$$W_{\text{а}}^{(4),(5),(6)}=W_{\text{а}}^{(4)}+W_{\text{а}}^{(5)}+W_{\text{а}}^{(6)}=\xi\cdot 28\left(\frac{r}{3}\right)^2+\xi\cdot 28\left(\frac{r}{3}\right)^2+51\left(\frac{r}{3}\right)^2=\xi\cdot 56\left(\frac{r}{3}\right)^2+$$

$$+51\left(\frac{r}{3}\right)^2\approx\xi\cdot 6,22r^2+5,66r^2$$ операций сложения.

Тогда полная аддитивная сложность алгоритма (3)–(6) составляет $W_{\text{а}}=W_{\text{а}}^{(3)}+W_{\text{а}}^{(4)}+W_{\text{а}}^{(5)}+W_{\text{а}}^{(6)}\approx\xi\cdot 0,85r^3-2,56r^2+\xi\cdot 6,22r^2+5,66r^2\approx\xi\cdot 0,85r^3+$ $+\xi\cdot 6,2r^2+3{,}1r^2$ операций сложения.

Таким образом, общая вычислительная сложность алгоритма (3)–(6) составляет $W_{\text{общ}}=W_{\text{м}}+W_{\text{а}}\approx\xi\cdot 0,85r^3+\xi\cdot 0,85r^3+\xi\cdot 6,2r^2+3{,}1r^2\approx\xi\cdot 1,70r^3+\xi\cdot 6,2r^2+3{,}1r^2$ операций умножения/сложения.

Поскольку элементы результирующей матрицы (6) вычисляются только один раз, выигрыш по аддитивной и общей сложностям относительно сложности вычисления операции (2) с помощью гибридного алгоритма [9] соответственно составляет

$$\delta_{\text{а}}=\xi\cdot W_{\text{а}}^{*}+(\xi-1)r^2+r^2-W_{\text{а}}\approx\xi\cdot 0,85r^3+\xi\cdot 8,3r^2+\xi\cdot r^2-\xi\cdot 0,85r^3-$$

$$-\xi\cdot 6,2r^2-3{,}1r^2\approx\xi\cdot 3{,}1r^2-3{,}1r^2\approx 3{,}1(\xi-1)r^2$$ операций сложения,

$$\delta_{\text{общ}}=\xi\cdot W_{\text{общ}}^{*}+(\xi-1)r^2+r^2-W_{\text{общ}}\approx\xi\cdot 1,70r^3+\xi\cdot 8,3r^2+\xi\cdot r^2-\xi\cdot 1,70r^3-$$

$$-\xi\cdot 6,2r^2-3{,}1r^2\approx 3{,}1(\xi-1)r^2$$ операций умножения/сложения.

Данный выигрыш при ограниченном размере клетки r является существенным ускорением вычисления операции (2).

БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ КЛЕТОЧНОЙ ОПЕРАЦИИ $D=C+\sum_{l=1}^{\xi}A_lB_l$, ПОСТРОЕННЫЙ НА ОСНОВЕ ГИБРИДНОГО АЛГОРИТМА УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ ПОРЯДКА $n=6\mu$ $(\mu>0)$

Гибридный алгоритм умножения двух квадратных матриц: $A=\{a_{ij}\}$ и $B=\{b_{ij}\}$ порядка $n=6\mu\ (\mu>0)$ [9] характеризуется наименьшей по сравнению с известными алгоритмами мультипликативной сложностью, составляющей $W_{\text{м}}^{*}\approx 0,426n^3+2{,}5n^2$ операций умножения. При этом аддитивная и общая сложности вычислений соответственно составляют $W_{\text{а}}^{*}\approx 1,278n^3+16n^2-15,3n$ операций сложения, $W_{\text{общ}}^{*}\approx 1{,}70n^3+18{,}5n^2-15,3n$ операций умножения/сложения.

Для построения быстрого алгоритма вычисления клеточной операции (2) на основе данного алгоритма преобразуем его структуру информационных связей, используя свойства коммутативности и ассоциативности операций сложения. В этом случае основным вычислительным ядром алгоритма являются следующие регулярные вычисления:

$$
\begin{aligned}
&s_{ij}^{1}=\sum_{l=1}^{\xi}(\theta_{ij}^{1(l)}-h_i^{1(l)}-g_j^{1(l)}), && s_{ij}^{5}=\sum_{l=1}^{\xi}(\theta_{ij}^{5(l)}-h_i^{5(l)}-g_j^{5(l)}),\\
&s_{ij}^{2}=\sum_{l=1}^{\xi}(\theta_{ij}^{2(l)}-h_i^{2(l)}-g_j^{2(l)}), && s_{ij}^{6}=\sum_{l=1}^{\xi}(\theta_{ij}^{6(l)}-h_i^{6(l)}-g_j^{6(l)}),\\
&s_{ij}^{3}=\sum_{l=1}^{\xi}(\theta_{ij}^{3(l)}-h_i^{3(l)}-g_j^{3(l)}), && \vdots\quad\ \vdots\quad\ \vdots\quad\ \vdots\quad\ \vdots,\\
&s_{ij}^{4}=\sum_{l=1}^{\xi}(\theta_{ij}^{4(l)}-h_i^{4(l)}-g_j^{4(l)}), && s_{ij}^{23}=\sum_{l=1}^{\xi}(\theta_{ij}^{23(l)}-h_i^{23(l)}-g_j^{23(l)}),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$i, j=1,2,\ldots,r/3;\ l=1,2,\ldots,\xi$.

Здесь

$$
\begin{aligned}
&\theta_{ij}^{1(l)}=\sum_{k=1}^{r/6}(\alpha_{i,2k-1}^{1(l)}+b_{6k-1,3j-1}^{(l)})(b_{6k-4,3j-1}^{(l)}+\alpha_{i,2k}^{1(l)}),\\
&\theta_{ij}^{2(l)}=\sum_{k=1}^{r/6}(\alpha_{i,2k-1}^{2(l)}+\beta_{2k,j}^{1(l)})(\beta_{2k-1,j}^{1(l)}+\alpha_{i,2k}^{2(l)}),\\
&\theta_{ij}^{3(l)}=\sum_{k=1}^{r/6}(a_{3i-1,6k-4}^{(l)}+\beta_{2k,j}^{2(l)})(\beta_{2k-1,j}^{2(l)}+a_{3i-1,6k-1}^{(l)}),\\
&\theta_{ij}^{4(l)}=\sum_{k=1}^{r/6}(\alpha_{i,2k-1}^{3(l)}+\beta_{2k,j}^{3(l)})(\beta_{2k-1,j}^{3(l)}+\alpha_{i,2k}^{3(l)}),\\
&\theta_{ij}^{5(l)}=\sum_{k=1}^{r/6}(\alpha_{i,2k-1}^{4(l)}+\beta_{2k,j}^{4(l)})(\beta_{2k-1,j}^{4(l)}+\alpha_{i,2k}^{4(l)}),\\
&\theta_{ij}^{6(l)}=\sum_{k=1}^{r/6}(a_{3i-2,6k-5}^{(l)}+b_{6k-2,3j-2}^{(l)})(b_{6k-5,3j-2}^{(l)}+a_{3i-2,6k-2}^{(l)}),\\
&\theta_{ij}^{7(l)}=\sum_{k=1}^{r/6}(\alpha_{i,2k-1}^{5(l)}+\beta_{2k,j}^{5(l)})(\beta_{2k-1,j}^{5(l)}+\alpha_{i,2k}^{5(l)}),\\
&\theta_{ij}^{8(l)}=\sum_{k=1}^{r/6}(\alpha_{i,2k-1}^{6(l)}+\beta_{2k,j}^{6(l)})(\beta_{2k-1,j}^{6(l)}+\alpha_{i,2k}^{6(l)}),\\
&\theta_{ij}^{9(l)}=\sum_{k=1}^{r/6}(\alpha_{i,2k-1}^{7(l)}+\beta_{2k,j}^{7(l)})(\beta_{2k-1,j}^{7(l)}+\alpha_{i,2k}^{7(l)}),\\
&\theta_{ij}^{10(l)}=\sum_{k=1}^{r/6}(\alpha_{i,2k-1}^{8(l)}+b_{6k-1,3j}^{(l)})(b_{6k-4,3j}^{(l)}+\alpha_{i,2k}^{8(l)}),\\
&\theta_{ij}^{11(l)}=\sum_{k=1}^{r/6}(a_{3i,6k-4}^{(l)}+\beta_{2k,j}^{8(l)})(\beta_{2k-1,j}^{8(l)}+a_{3i,6k-1}^{(l)}),\\
&\theta_{ij}^{12(l)}=\sum_{k=1}^{r/6}(\alpha_{i,2k-1}^{9(l)}+\beta_{2k,j}^{9(l)})(\beta_{2k-1,j}^{9(l)}+\alpha_{i,2k}^{9(l)}),\\
&\theta_{ij}^{13(l)}=\sum_{k=1}^{r/6}(\alpha_{i,2k-1}^{10(l)}+\beta_{2k,j}^{10(l)})(\beta_{2k-1,j}^{10(l)}+\alpha_{i,2k}^{10(l)}),\\
&\theta_{ij}^{14(l)}=\sum_{k=1}^{r/6}(a_{3i-2,6k-3}^{(l)}+b_{6k,3j-2}^{(l)})(b_{6k-3,3j-2}^{(l)}+a_{3i-2,6k}^{(l)}),\\
&\theta_{ij}^{15(l)}=\sum_{k=1}^{r/6}(\alpha_{i,2k-1}^{11(l)}+\beta_{2k,j}^{11(l)})(\beta_{2k-1,j}^{11(l)}+\alpha_{i,2k}^{11(l)}),\\
&\theta_{ij}^{16(l)}=\sum_{k=1}^{r/6}(\alpha_{i,2k-1}^{12(l)}+\beta_{2k,j}^{12(l)})(\beta_{2k-1,j}^{12(l)}+\alpha_{i,2k}^{12(l)}),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$\theta_{ij}^{17(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} (\alpha_{i,2k-1}^{13(l)} + \beta_{2k,j}^{13(l)})(\beta_{2k-1,j}^{13(l)} + \alpha_{i,2k}^{13(l)}),$$

$$\theta_{ij}^{18(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} (\alpha_{i,2k-1}^{14(l)} + \beta_{2k,j}^{14(l)})(\beta_{2k-1,j}^{14(l)} + \alpha_{i,2k}^{14(l)}),$$

$$\theta_{ij}^{19(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} (a_{3i-2,3k-1}^{(l)} + b_{6k-1,3j-2}^{(l)})(b_{6k-4,3j-2}^{(l)} + a_{3i-2,6k-1}^{(l)}),$$

$$\theta_{ij}^{20(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} (a_{3i-1,6k-3}^{(l)} + b_{6k,3j-1}^{(l)})(b_{6k-3,3j-1}^{(l)} + a_{3i-1,6k}^{(l)}),$$

$$\theta_{ij}^{21(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} (a_{3i-1,6k-5}^{(l)} + b_{6k-2,3j}^{(l)})(b_{6k-5,3j}^{(l)} + a_{3i-1,6k-2}^{(l)}),$$

$$\theta_{ij}^{22(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} (a_{3i,6k-5}^{(l)} + b_{6k-2,3j-1}^{(l)})(b_{6k-5,3j-1}^{(l)} + a_{3i,6k-2}^{(l)}),$$

$$\theta_{ij}^{23(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} (a_{3i,6k-3}^{(l)} + b_{6k,3j}^{(l)})(b_{6k-3,3j}^{(l)} + a_{3i,6k}^{(l)}),$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, r/3$; $k = 1, 2, \ldots, r/6$;

$$h_i^{1(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \alpha_{i,2k-1}^{1(l)} \alpha_{i,2k}^{1(l)}, \qquad h_i^{13(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \alpha_{i,2k-1}^{10(l)} \alpha_{i,2k}^{10(l)},$$

$$h_i^{2(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \alpha_{i,2k-1}^{2(l)} \alpha_{i,2k}^{2(l)}, \qquad h_i^{14(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} a_{3i-2,6k-3}^{(l)} a_{3i-2,6k}^{(l)},$$

$$h_i^{3(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} a_{3i-1,6k-4}^{(l)} a_{3i-1,6k-1}^{(l)}, \qquad h_i^{15(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \alpha_{i,2k-1}^{11(l)} \alpha_{i,2k}^{11(l)},$$

$$h_i^{4(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \alpha_{i,2k-1}^{3(l)} \alpha_{i,2k}^{3(l)}, \qquad h_i^{16(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \alpha_{i,2k-1}^{12(l)} \alpha_{i,2k}^{12(l)},$$

$$h_i^{5(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \alpha_{i,2k-1}^{4(l)} \alpha_{i,2k}^{4(l)}, \qquad h_i^{17(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \alpha_{i,2k-1}^{13(l)} \alpha_{i,2k}^{13(l)},$$

$$h_i^{6(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} a_{3i-2,6k-5}^{(l)} a_{3i-2,6k-2}^{(l)}, \qquad h_i^{18(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \alpha_{i,2k-1}^{14(l)} \alpha_{i,2k}^{14(l)}, \tag{9}$$

$$h_i^{7(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \alpha_{i,2k-1}^{5(l)} \alpha_{i,2k}^{5(l)}, \qquad h_i^{19(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} a_{3i-2,3k-1}^{(l)} a_{3i-2,6k-1}^{(l)},$$

$$h_i^{8(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \alpha_{i,2k-1}^{6(l)} \alpha_{i,2k}^{6(l)}, \qquad h_i^{20(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} a_{3i-1,6k-3}^{(l)} a_{3i-1,6k}^{(l)},$$

$$h_i^{9(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \alpha_{i,2k-1}^{7(l)} \alpha_{i,2k}^{7(l)}, \qquad h_i^{21(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} a_{3i-1,6k-5}^{(l)} a_{3i-1,6k-2}^{(l)},$$

$$h_i^{10(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \alpha_{i,2k-1}^{8(l)} \alpha_{i,2k}^{8(l)}, \qquad h_i^{22(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} a_{3i,6k-5}^{(l)} a_{3i,6k-2}^{(l)},$$

$$h_i^{11(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} a_{3i,6k-4}^{(l)} a_{3i,6k-1}^{(l)}, \qquad h_i^{23(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} a_{3i,6k-3}^{(l)} a_{3i,6k}^{(l)},$$

$$h_i^{12(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \alpha_{i,2k-1}^{9(l)} \alpha_{i,2k}^{9(l)},$$

$$g_j^{1(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} b_{6k-1,\,3j-1}^{(l)} b_{6k-4,\,3-1j}^{(l)},$$

$$g_j^{2(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \beta_{2k,\,j}^{1(l)} \beta_{2k-1,\,j}^{1(l)},$$

$$g_j^{3(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \beta_{2k,\,j}^{2(l)} \beta_{2k-1,\,j}^{2(l)},$$

$$g_j^{4(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \beta_{2k,\,j}^{3(l)} \beta_{2k-1,\,j}^{3(l)},$$

$$g_j^{5(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \beta_{2k,\,j}^{4(l)} \beta_{2k-1,\,j}^{4(l)},$$

$$g_j^{6(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} b_{6k-2,\,3j-2}^{(l)} b_{6k-5,\,3j-2}^{(l)},$$

$$g_j^{7(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \beta_{2k,\,j}^{5(l)} \beta_{2k-1,\,j}^{5(l)},$$

$$g_j^{8(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \beta_{2k,\,j}^{6(l)} \beta_{2k-1,\,j}^{6(l)},$$

$$g_j^{9(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \beta_{2k,\,j}^{7(l)} \beta_{2k-1,\,j}^{7(l)},$$

$$g_j^{10(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} b_{6k-1,\,3j}^{(l)} b_{6k-4,\,3j}^{(l)},$$

$$g_j^{11(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \beta_{2k,\,j}^{8(l)} \beta_{2k-1,\,j}^{8(l)},$$

$$g_j^{12(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \beta_{2k,\,j}^{9(l)} \beta_{2k-1,\,j}^{9(l)},$$

$$g_j^{13(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \beta_{2k,\,j}^{10(l)} \beta_{2k-1,\,j}^{10(l)},$$

$$g_j^{14(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} b_{6k,\,3j-2}^{(l)} b_{6k-3,\,3j-2}^{(l)},$$

$$g_j^{15(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \beta_{2k,\,j}^{11(l)} \beta_{2k-1,\,j}^{11(l)},$$

$$g_j^{16(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \beta_{2k,\,j}^{12(l)} \beta_{2k-1,\,j}^{12(l)},$$

$$g_j^{17(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \beta_{2k,\,j}^{13(l)} \beta_{2k-1,\,j}^{13(l)},$$

$$g_j^{18(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} \beta_{2k,\,j}^{14(l)} \beta_{2k-1,\,j}^{14(l)},$$

$$g_j^{19(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} b_{6k-1,\,3j-2}^{(l)} b_{6k-4,\,3j-2}^{(l)},$$

$$g_j^{20(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} b_{6k,\,3j-1}^{(l)} b_{6k-3,\,3j-1}^{(l)},$$

$$g_j^{21(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} b_{6k-2,\,3j}^{(l)} b_{6k-5,\,3j}^{(l)},$$

$$g_j^{22(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} b_{6k-2,\,3j-1}^{(l)} b_{6k-5,\,3j-1}^{(l)},$$

$$g_j^{23(l)} = \sum_{k=1}^{r/6} b_{6k,\,3j}^{(l)} b_{6k-3,\,3j}^{(l)},$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, r/3;\ k = 1, 2, \ldots, r/6;\ l = 1, 2, \ldots, \xi$.

Коэффициенты $\alpha_{ik}^{1(l)}, \ldots, \alpha_{ik}^{14(l)}$ и $\beta_{kj}^{1(l)}, \ldots, \beta_{kj}^{14(l)}$ соответственно имеют следующий вид:

$$\alpha_{ik}^{1(l)} = a_{3i-2,\,3k-2}^{(l)} + a_{3i-2,\,3k-1}^{(l)} + a_{3i-2,\,3k}^{(l)} - a_{3i-1,\,3k-2}^{(l)} - a_{3i-1,\,3k-1}^{(l)} - a_{3i,\,3k-2}^{(l)} - a_{3i,\,3k}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{2(l)} = a_{3i-2,\,3k-2}^{(l)} - a_{3i-1,\,3k-2}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{3(l)} = -a_{3i-2,\,3k-2}^{(l)} + a_{3i-1,\,3k-2}^{(l)} + a_{3i-1,\,3k-1}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{4(l)} = a_{3i-1,\,3k-2}^{(l)} + a_{3i-1,\,3k-1}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{5(l)} = -a_{3i-2,\,3k-2}^{(l)} + a_{3i,\,3k-2}^{(l)} + a_{3i,\,3k-1}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{6(l)} = -a_{3i-2,\,3k-2}^{(l)} + a_{3i,\,3k-2}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{7(l)} = a_{3i,\,3k-2}^{(l)} + a_{3i,\,3k-1}^{(l)}, \tag{10}$$

$$\alpha_{ik}^{8(l)} = a_{3i-2,\,3k-2}^{(l)} + a_{3i-2,\,3k-1}^{(l)} + a_{3i-2,\,3k}^{(l)} - a_{3i-1,\,3k-1}^{(l)} - a_{3i-1,\,3k}^{(l)} - a_{3i,\,3k-2}^{(l)} - a_{3i,\,3k-1}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{9(l)} = -a_{3i-2,\,3k}^{(l)} + a_{3i,\,3k-1}^{(l)} + a_{3i,\,3k}^{(l)},$$

$$\alpha_{ik}^{10(l)} = a_{3i-2,\,3k}^{(l)} - a_{3i,\,3k}^{(l)},$$

$\alpha_{ik}^{11(l)} = a_{3i,\,3k-1}^{(l)} + a_{3i,\,3k}^{(l)}$,
$\alpha_{ik}^{12(l)} = -a_{3i-2,\,3k}^{(l)} + a_{3i-1,\,3k-1}^{(l)} + a_{3i-1,\,3k}^{(l)}$,
$\alpha_{ik}^{13(l)} = a_{3i-2,\,3k}^{(l)} - a_{3i-1,\,3k}^{(l)}$,
$\alpha_{ik}^{14(l)} = a_{3i-1,\,3k-1}^{(l)} + a_{3i-1,\,3k}^{(l)}$,
где $i, k = 1, 2, \ldots, r/3$; $k = 1, 2, \ldots, r/6$; $l = 1, 2, \ldots, \xi$;
$\beta_{kj}^{1(l)} = -b_{3k-2,\,3j-1}^{(l)} + b_{3k-1,\,3j-1}^{(l)}$,
$\beta_{kj}^{2(l)} = -b_{3k-2,\,3j-2}^{(l)} + b_{3k-2,\,3j-1}^{(l)} + b_{3k-1,\,3j-2}^{(l)} - b_{3k-1,\,3j-1}^{(l)} - b_{3k-1,\,3j}^{(l)} - b_{3k,\,3j-2}^{(l)} + b_{3k,\,3j}^{(l)}$,
$\beta_{kj}^{3(l)} = b_{3k-2,\,3j-2}^{(l)} - b_{3k-2,\,3j-1}^{(l)} + b_{3k-1,\,3j-1}^{(l)}$,
$\beta_{kj}^{4(l)} = -b_{3k-2,\,3j-2}^{(l)} + b_{3k-2,\,3j-1}^{(l)}$,
$\beta_{kj}^{5(l)} = b_{3k-2,\,3j-2}^{(l)} - b_{3k-2,\,3j}^{(l)} + b_{3k-1,\,3j}^{(l)}$,
$\beta_{kj}^{6(l)} = b_{3k-2,\,3j}^{(l)} - b_{3k-1,\,3j}^{(l)}$,
$\beta_{kj}^{7(l)} = -b_{3k-2,\,3j-2}^{(l)} + b_{3k-2,\,3j}^{(l)}$,
$\beta_{kj}^{8(l)} = -b_{3k-2,\,3j-2}^{(l)} + b_{3k-2,\,3j}^{(l)} + b_{3k-1,\,3j-2}^{(l)} - b_{3k-1,\,3j-1}^{(l)} -$
$- b_{3k-1,\,3j}^{(l)} - b_{3k,\,3j-2}^{(l)} + b_{3k,\,3j-1}^{(l)}$,   (11)
$\beta_{kj}^{9(l)} = b_{3k-1,\,3j-1}^{(l)} + b_{3k,\,3j-2}^{(l)} - b_{3k,\,3j-1}^{(l)}$,
$\beta_{kj}^{10(l)} = b_{3k-1,\,3j-1}^{(l)} - b_{3k,\,3j-1}^{(l)}$,
$\beta_{kj}^{11(l)} = -b_{3k,\,3j-2}^{(l)} + b_{3k,\,3j-1}^{(l)}$,
$\beta_{kj}^{12(l)} = b_{3k-1,\,3j}^{(l)} + b_{3k,\,3j-2}^{(l)} - b_{3k,\,3j}^{(l)}$,
$\beta_{kj}^{13(l)} = b_{3k-1,\,3j}^{(l)} - b_{3k,\,3j}^{(l)}$,
$\beta_{kj}^{14(l)} = -b_{3k,\,3j-2}^{(l)} + b_{3k,\,3j}^{(l)}$,
где $j, k = 1, 2, \ldots, r/3$; $k = 1, 2, \ldots, r/6$; $l = 1, 2, \ldots, \xi$.

Элементы результирующей матрицы $D = \{d_{ij}\}$ вычисляются единожды по следующим формулам:

$d_{3i-2,\,3j-2} = c_{3i-2,\,3j-2} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{19}$,
$d_{3i-2,\,3j-1} = c_{3i-2,\,3j-1} + s_{ij}^{1} + s_{ij}^{4} + s_{ij}^{5} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{12} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{15}$,
$d_{3i-2,\,3j} = c_{3i-2,\,3j} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{7} + s_{ij}^{9} + s_{ij}^{10} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{16} + s_{ij}^{18}$,   (12)
$d_{3i-1,\,3j-2} = c_{3i-1,\,3j-2} + s_{ij}^{2} + s_{ij}^{3} + s_{ij}^{4} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{16} + s_{ij}^{17}$,
$d_{3i-1,\,3j-1} = c_{3i-1,\,3j-1} + s_{ij}^{2} + s_{ij}^{4} + s_{ij}^{5} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{20}$,
$d_{3i-1,\,3j} = c_{3i-1,\,3j} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{16} + s_{ij}^{17} + s_{ij}^{18} + s_{ij}^{21}$,
$d_{3i,\,3j-2} = c_{3i,\,3j-2} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{7} + s_{ij}^{8} + s_{ij}^{11} + s_{ij}^{12} + s_{ij}^{13} + s_{ij}^{14}$,
$d_{3i,\,3j-1} = c_{3i,\,3j-1} + s_{ij}^{12} + s_{ij}^{13} + s_{ij}^{14} + s_{ij}^{15} + s_{ij}^{22}$,
$d_{3i,\,3j} = c_{3i,\,3j} + s_{ij}^{6} + s_{ij}^{7} + s_{ij}^{8} + s_{ij}^{9} + s_{ij}^{23}$,
где $i, j = 1, 2, \ldots, r/3$.

Оценим вычислительную сложность рассмотренного алгоритма (7)–(12).

Мультипликативная сложность данного алгоритма определяется следующим образом:

$W_{\text{м}} = W_{\text{м}}^{(8)} + W_{\text{м}}^{(9)}$,

$W_{\text{м}}^{(8)} = \xi \cdot 23\left[\frac{r}{6}\cdot\left(\frac{r}{3}\right)^2\right] = 23\left(\frac{r^3}{54}\right) \approx \xi \cdot 0,426r^3$ операций умножения,

$W_{\text{м}}^{(9)} = \xi \cdot 2 \cdot 23\left(\frac{r}{6}\cdot\frac{r}{3}\right) = \xi \cdot 46\frac{r^2}{18} \approx \xi \cdot 2,55r^2$ операций умножения.

Таким образом, $W_{\text{м}} = W_{\text{м}}^{(8)} + W_{\text{м}}^{(9)} \approx \xi \cdot 0,426r^3 + \xi \cdot 2,55r^2$ операций умножения.

Аддитивная сложность рассмотренного алгоритма составляет

$$W_{\text{а}} = W_{\text{а}}^{(7)} + W_{\text{а}}^{(8)} + W_{\text{а}}^{(9)} + W_{\text{а}}^{(10)} + W_{\text{а}}^{(11)} + W_{\text{а}}^{(12)},$$

где $W_{\text{а}}^{(7)} = \xi \cdot 23 \cdot 2\left(\frac{r}{3}\right)^2 + (\xi - 1)\cdot 23\left(\frac{r}{3}\right)^2 \approx \xi \cdot 5,11r^2 + \xi \cdot 2,55r^2 - 2,55r^2$ операций сложения,

$W_{\text{а}}^{(8)} = \xi \cdot \left[23\left(\frac{r}{3}\right)^2\left(\frac{r}{6} - 1\right) + 23 \cdot 2\left(\frac{r}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{r}{6}\right)\right] = \xi \cdot \left[69\left(\frac{r^3}{54}\right) - 23\left(\frac{r^2}{9}\right)\right] \approx$

$\approx \xi \cdot 1,278r^3 - \xi \cdot 2,55r^2$ операций сложения,

$W_{\text{а}}^{(9)} = \xi \cdot 2 \cdot 23\left[\frac{r}{3}\left(\frac{r}{6} - 1\right)\right] = \xi \cdot \left(23\frac{r^2}{9} - 46\frac{r}{3}\right) \approx \xi \cdot 2,55r^2 - \xi \cdot 15,3r$ операций сложения,

$W_{\text{а}}^{(10),(11),(12)} = W_{\text{а}}^{(10)} + W_{\text{а}}^{(11)} + W_{\text{а}}^{(12)} = \xi \cdot 28\left(\frac{r}{3}\right)^2 + \xi \cdot 28\left(\frac{r}{3}\right)^2 + 51\left(\frac{r}{3}\right)^2 \approx$

$\approx \xi \cdot 6,22r^2 + 5,66r^2$ операций сложения.

Следовательно, полная аддитивная сложность алгоритма (7)–(12) определяется так:

$W_{\text{а}} = W_{\text{а}}^{(7)} + W_{\text{а}}^{(8)} + W_{\text{а}}^{(9)} + W_{\text{а}}^{(10),(11),(12)} \approx \xi \cdot 5,11r^2 + \xi \cdot 2,55r^2 - 2,55r^2 +$

$+ \xi \cdot 1,28r^3 - \xi \cdot 2,55r^2 + \xi \cdot 2,55r^2 - \xi \cdot 15,3r + \xi \cdot 6,22r^2 + 5,66r^2 \approx$

$\approx \xi \cdot 1,28r^3 + \xi \cdot 13,9r^2 - \xi \cdot 15,3r + 3,1r^2$ операций сложения.

Тогда общая вычислительная сложность алгоритма (7)–(12) составляет

$W_{\text{общ}} = W_{\text{м}} + W_{\text{а}} \approx \xi \cdot 0,426r^3 + \xi \cdot 2,55r^2 + \xi \cdot 1,28r^3 + \xi \cdot 13,9r^2 -$

$- \xi \cdot 15,3r + 3,1r^2 \approx \xi \cdot 1,7r^3 + \xi \cdot 16,4r^2 + 3,1r^2 - \xi \cdot 15,3r$ операций умножения / сложения.

Поскольку в рассмотренном алгоритме вычисления (12) выполняются единожды, а не ξ раз (в случае вычисления данной операции с помощью указанного выше алгоритма [9]), выигрыш по аддитивной и общей сложностям соответственно составляет

$\delta_{\text{а}} = \xi \cdot W_{\text{а}}^{*} + (\xi - 1)r^2 + r^2 - W_{\text{а}} \approx \xi \cdot 1,28r^3 + \xi \cdot 16r^2 - \xi \cdot 15,3r + \xi \cdot r^2 -$

$- \xi \cdot 1,28r^3 - \xi \cdot 13,9r^2 + \xi \cdot 15,3r - 3,1r^2 \approx \xi \cdot 3,1r^2 - 3,1r^2 \approx 3,1(\xi - 1)r^2$ операций сложения,

$\delta_{\text{общ}} = \xi \cdot W_{\text{общ}}^{*} + (\xi - 1)r^2 + r^2 - W_{\text{общ}} \approx \xi \cdot 1,7r^3 + \xi \cdot 18,5r^2 - \xi \cdot 15,3r +$

$+ \xi \cdot r^2 - \xi \cdot 1,7r^3 - \xi \cdot 16,4r^2 - 3,1r^2 + \xi \cdot 15,3r \approx \xi \cdot 3,1r^2 - 3,1r^2 \approx 3,1(\xi - 1)r^2$ операций умножения/сложения.

Эффективность рассмотренных алгоритмов (3)–(6) и (7)–(12) состоит в минимизации их операционной сложности по сравнению со сложностью вычисления операции (2) с помощью гибридных алгоритмов из работы [9].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные в настоящей статье быстрые алгоритмы для базовой операции (2), обладая наименьшей по сравнению с известными алгоритмами операционной сложностью и высокой регулярностью вычислений, имеют практическую ценность и могут обеспечить максимально эффективную реализацию клеточных методов линейной алгебры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воеводин А.В. О классе клеточных алгоритмов и его свойствах // Вопросы кибернетики. — 1988. — № 135. — С. 50–64.
2. Лысанов С.Ю. Клеточные методы решения задач линейной алгебры // Вопросы кибернетики. — 1988. — № 135. — С. 64–73.
3. Strassen V. Gaussian elimination is not optimal // Numerische Mathematik. — 1969. — **13.** — P. 354–356.
4. Winograd S. On multiplication of 2×2 matrices // Linear Algebra and Its Application. — 1971. — **4.** — P. 381–388.
5. Laderman J.D. A noncommutative algorithm for multiplying 3×3 matrices using 23 multiplications // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1976. — **82**, N 1. — P. 126–128.
6. Winograd S.A. A new algorithm for inner product // IEEE Transactions on Computers. — 1968. — **C-18.** — P. 693–694.
7. Елфимова Л.Д., Капитонова Ю.В. Быстрый алгоритм для умножения матриц и его эффективная реализация на систолических массивах // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 1. — С. 135–150.
8. Елфимова Л.Д. Быстрые гибридные алгоритмы умножения матриц // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 4. — С. 49–59.
9. Елфимова Л.Д. Новые быстрые гибридные алгоритмы умножения матриц // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 6. — С. 59–67.
10. Елфимова Л.Д. Быстрый клеточный метод умножения матриц // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 55–59.
11. Елфимова Л.Д. Смешанный клеточный метод умножения матриц // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 1. — С. 22–27.
12. Елфимова Л.Д. Новые клеточные методы умножения матриц // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 1. — С. 19–29.
13. Елфимова Л.Д. Объединенный клеточный метод умножения матриц // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 5. — С. 28–37.

Поступила 12.01. 2015