УДК 519.853

Ю.П. ЛАПТИН

ТОЧНЫЕ ШТРАФНЫЕ ФУНКЦИИ И ВЫПУКЛЫЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В СХЕМАХ ДЕКОМПОЗИЦИИ ПО ПЕРЕМЕННЫМ[1]

Аннотация. Использование точных штрафных функций в схемах декомпозиции по переменным для нелинейных задач оптимизации позволяет преодолеть проблемы, связанные с неявным описанием допустимой области координирующей задачи. Рассматриваются вопросы определения значений штрафных коэффициентов при таком подходе. Для случая, когда функции исходной задачи определены не на всем пространстве переменных, предлагается использовать выпуклые продолжения функций.

Ключевые слова: выпуклое программирование, точные штрафные функции, методы декомпозиции.

ВВЕДЕНИЕ

Схемы декомпозиции по переменным широко используются при решении оптимизационных задач, имеющих специальную структуру (см., например, [1–3]). При фиксированных значениях связывающих переменных исходная задача большой размерности распадается на небольшие подзадачи, каждая из которых решается независимо. Оптимальные значения подзадач зависят от параметров — связывающих переменных, значения которых определяются при решении координирующей задачи.

В случае, когда отдельные подзадачи являются задачами линейного программирования или имеют специальную структуру, их точные решения могут быть получены достаточно эффективно. На основе этих решений вычисляются субградиенты функций координирующей задачи. Если при некоторых значениях связывающих переменных подзадачи не имеют решений (множество допустимых точек пусто), определяются дополнительные ограничения в пространстве связывающих переменных. Трудоемкость построения таких дополнительных ограничений соизмерима с затратами на получение точных решений подзадач.

Для нелинейных задач ситуация существенно отличается. Отметим, что получать можно только приближенные решения подзадач. В связи с этим приходится использовать ε-субградиенты функций координирующей задачи [4, 5]. С увеличением точности возрастает трудоемкость решения подзадач. Но более критическими являются проблемы, когда множество допустимых точек подзадач становится пустым при некоторых значениях связывающих переменных и построить дополнительные ограничения оказывается чрезвычайно сложно.

Эффективным подходом для преодоления этих проблем является использование точных штрафных функций [1]. На практике часто удается подобрать корректные значения штрафных коэффициентов и успешно решать задачи. Но в общем случае разработка методик определения значений штрафов сталкивается с существенными трудностями, связанными с большой размерностью исходных задач. В настоящей статье рассматриваются некоторые возможные подходы к решению таких проблем. Приводятся обобщения ранее полученных результатов [11], позволяющие определять значения штрафов без решения сложных вспомогательных задач. Это существенно в случае применения точных штрафных функций в схемах декомпозиции.

Еще более сложной оказывается ситуация с ограниченными областями определения функций, описывающих исходную задачу. Для этого случая используются эффективные процедуры выпуклого продолжения функций на все пространство переменных, изложенные в [9, 10]. В настоящей статье рассмотрены особенности такого использования в схемах декомпозиции по переменным.

---

[1] Работа выполнена в рамках научно-исследовательской темы В.Ф.120.14 в Институте кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим блочную задачу математического программирования со связывающими переменными: найти

$$F^* = \min_x \sum_{q=1}^{Q} f_q^0(x^0, x^q) \tag{1}$$

при ограничениях

$$(x^0, x^q) \in C_q = \{(x^0, x^q) : f_q^1(x^0, x^q) \le 0\},\ q = 1, \ldots, Q, \tag{2}$$

где $f_q^i(x^0, x^q)$ — выпуклые собственные функции, $i = 0,1$, $x^q \in R^{N_q}$, $q = 0,1, \ldots, Q$. При этом предполагается, что C_q — компактные множества, $C_q \subseteq \operatorname{dom} f_q^0 \cap \operatorname{dom} f_q^1$, $q = 1, \ldots, Q$.

Пусть связывающие переменные x^0 фиксированы. Обозначим

$$\Psi^q(x^0) = \min\{f_q^0(x^0, x^q) : x^q \in C_q(x^0)\}, \tag{3}$$

где $C_q(x^0) = \{x^q : f_q^1(x^0, x^q) \le 0\}$. Положим $W^q = \{x^0 : C_q(x^0) \ne \varnothing\}$, $\Psi^q(x^0) = +\infty$, если $x^0 \notin W^q$.

В схемах декомпозиции решается следующая (координирующая) задача, которая эквивалентна исходной (1), (2): найти

$$\min\left\{ \sum_{q=1}^{Q} \Psi^q(x^0) :\ x^0 \in W^q,\ q = 1, \ldots, Q \right\}. \tag{4}$$

Известно [1, разд. 5.2], что $\Psi^q(x^0)$ — выпуклые собственные функции. Для вычисления субградиентов функций $\Psi^q(x^0)$ используются точные решения подзадач (3). Подходы к построению ε-субградиентов этих функций на основании приближенных решений изложены в [4, 5].

Рассмотрим задачу (3). Пусть заданы точка $\bar{x}^0 \in R^{N_0}$ и совокупность $x_1^q, x_2^q, \ldots, x_m^q$ точек из R^{N_q}, в каждой точке $(\bar{x}^0, x_k^q)$ вычислены значения $f_q^{ik} = f_q^i(\bar{x}^0, x_k^q)$ и субградиенты $g^{ik} = (g_0^{ik}, g_q^{ik})$ функций f_q^i: $g_0^{ik} = \dfrac{\partial f_q^i}{\partial x^0}(\bar{x}^0, x_k^q)$, $g_q^{ik} = \dfrac{\partial f_q^i}{\partial x^q}(\bar{x}^0, x_k^q)$, $i = 0,1$, $k = 1, \ldots, m$. Рассмотрим нижнюю линейную аппроксимацию задачи (3) при фиксированном $x^0 = \bar{x}^0$:

$$\min_{x^q, \xi} \xi \tag{5}$$

при ограничениях

$$f_q^{0k} + (g_q^{0k}, x^q - x_k^q) \le \xi,\ k = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

$$f_q^{1k} + (g_q^{1k}, x^q - x_k^q) \le 0,\ k = 1, \ldots, m. \tag{7}$$

Теорема 1. Пусть задана точка $\bar{x}^q \in C_q(\bar{x}^0)$; ξ^*, x^{q*} — оптимальное решение; $\bar{u}_{ik}$, $k = 1, \ldots, m$, $i = 0,1$, — оптимальные значения двойственных переменных задачи (5)–(7). Тогда $\xi^* \le \Psi^q(\bar{x}^0) \le f_q^0(\bar{x}^0, \bar{x}^q)$, для ε-субградиента функции $\Psi^q(\bar{x}^0)$ имеет место $g_{\Psi^q}^{\varepsilon}(\bar{x}^0) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{1} \bar{u}_{ik} g_0^{ik}$, где $\varepsilon = f_q^0(\bar{x}^0, \bar{x}^q) - \xi^*$.

Приведенная теорема является переформулировкой теоремы 2 из [4].

Обычно точки $x_1^q, x_2^q, \ldots, x_m^q$ генерируются в ходе решения задачи (3), точка $\bar{x}^q \in C_q(\bar{x}^0)$ — одна из них (наилучшая допустимая). Проблема получения допустимых точек в ходе решения задачи (3) может быть достаточно сложной.

Особым является случай, когда $C_q(\bar{x}^0) = \varnothing$. Обозначим $C_q^m(\bar{x}^0) = \{x^q : f_q^{1k} + (g_q^{1k}, x^q - x_k^q) \le 0, \quad k = 1, \ldots, m\}$. Множество $C_q^m(\bar{x}^0)$ есть внешняя аппроксимация множества $C_q(\bar{x}^0)$. Если $C_q^m(\bar{x}^0) = \varnothing$, то можно построить (см., например, [3]) дополнительное ограничение вида $\langle a, x^0 \rangle + b \le 0$, которому должны удовлетворять связывающие переменные (точки множества W^q). Совокупность таких ограничений при разных значениях вектора $\bar{x}^0$ формирует внешнюю аппроксимацию множеств W^q. Однако в случае $C_q(\bar{x}^0) = \varnothing$ построение совокупности точек $x_1^q, x_2^q, \ldots, x_m^q$, для которой выполняется требование $C_q^m(\bar{x}^0) = \varnothing$, может быть достаточно трудоемким.

При условии, что функции $f_q^i(x^0, x^q)$, $i = 0,1;\ q = 1, \ldots, Q$, определены для любых значений переменных, преодолеть эти проблемы можно при использовании точных штрафных функций для решения задачи (1), (2) (см., например, [1, разд. 5.2]). Исходная задача при этом становится задачей безусловной оптимизации: найти

$$\min_x \sum_{q=1}^{Q} [f_q^0(x^0, x^q) + \beta_q f_q^+(x^0, x^q)]. \tag{8}$$

Координирующая задача (4) и подзадачи (3) также оказываются задачами безусловной оптимизации. Здесь $f_q^+(x^0, x^q) = \max\{0, f_q^1(x^0, x^q)\}$. Ключевым при таком подходе оказывается вопрос определения значений коэффициентов β_q. Необходимо отметить, что значения β_q^i должны быть не меньше оптимальных значений двойственных переменных задачи (1), (2) и не могут быть получены при решении отдельных подзадач вида (3).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ШТРАФНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

2.1. Основные определения. Для описания предлагаемого подхода рассмотрим задачи в стандартной формулировке: найти

$$f^* = \min\{f_0(x) : x \in C\}, \tag{9}$$

где $C = \{x : f_i(x) \le 0, i = 1, \ldots, m; x \in R^n\}$, $f_i : R^n \to R$, $i = 0, \ldots, m$, — выпуклые функции. В данном разделе предполагается, что функции f_i принимают конечные значения при любых значениях переменных.

Уточнение результатов с учетом структуры исходной задачи будет описано ниже.

Положим

$$\Phi_\beta(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i f_i^+(x), \quad F_\lambda(x) = f_0(x) + \lambda h^+(x),$$

где $h(x) = \max\{f_i(x), i = 1, \ldots, m\}$, $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$,

$$\Phi_\beta^* = \min\{\Phi_\beta(x) : x \in R^n\}, \tag{10}$$

$$F_\lambda^* = \min\{F_\lambda(x) : x \in R^n\}. \tag{11}$$

Функция $\Phi_\beta(x)$ (соответственно $F_\lambda(x)$) называется точной штрафной функцией, если решения задач (9) и (10) (соответственно (11)) совпадают.

Известно [1, теоремы 26 и 27], что если u_i^*, $i=1, \dots, m$, — оптимальные значения множителей Лагранжа задачи (9), то $\Phi_\beta(x)$ — точная штрафная функция при $\beta_i > u_i^*$, $i=1, \dots, m$, $F_\lambda(x)$ — точная штрафная функция при $\lambda > \sum_{i=1}^m u_i^*$.

Точные штрафные функции широко используются при реализации различных алгоритмов оптимизации. При этом для определения множителей Лагранжа на каждой итерации решаются некоторые вспомогательные задачи (например, линеаризация исходной задачи) [1, 6, 8].

В предлагаемом ниже подходе также формулируется вспомогательная задача, однако для ее решения используются эвристические алгоритмы.

Сформулируем в виде леммы следующее простое утверждение.

Лемма 1. Пусть множество C компактно и замкнуто, значения штрафных коэффициентов фиксированы, заданы число $\varepsilon > 0$ и последовательность точек x_k, $k=1,2,\dots$, сходящаяся к решению $\widetilde{x}$ задачи (10) (или решению задачи (11)). Пусть также каждой точке x_k по некоторому правилу P поставлена в соответствие точка $z_k = P(x_k)$, $z_k \in C$, $k=1,2,\dots$, и выполняются неравенства

$$\varphi(x_k) \ge f_0(z_k) + \varepsilon \, \| z_k - x_k \| \text{ для точек } x_k \notin C, \; k=1,2,\dots, \tag{12}$$

где $\varphi(x) = \Phi_\beta(x)$ (соответственно $\varphi(x) = F_\lambda(x)$). Тогда $\widetilde{x} \in C$.

Доказательство очевидно, поскольку без ограничения общности можно считать, что для последовательности z_k, $k=1,2,\dots$, существует предельная точка $z^* \in C$ и если $\widetilde{x} \notin C$, то $f_0(z^*) = \varphi(z^*) < \varphi(\widetilde{x})$), т.е. $\widetilde{x}$ не является решением задачи (10).

2.2. Использование функции F_λ. Пусть заданы $x \notin C$, правило $P: R^n \to C$. Обозначим

$$\lambda_P(x, \varepsilon) = \max\left(0, \frac{f_0(z) + \varepsilon \, \| z - x \| - f_0(x)}{h^+(x)}\right), \text{ где } z = P(x), \tag{13}$$

$$\lambda_P(\varepsilon) = \sup\{\lambda_P(x, \varepsilon) : x \notin C\}. \tag{14}$$

Предположим, что для решения задачи (11) применяется некоторый сходящийся алгоритм A. Поскольку точные штрафные коэффициенты заранее неизвестны, их значения будем уточнять (увеличивать) по ходу работы алгоритма. Обозначим λ_k значение коэффициента λ на итерации k. Для $k=1$ значение $\lambda_1 > 0$ считается заданным. При построении алгоритмом A точки x_k на итерации k используется значение λ_k. Если в точке x_k неравенство (12) выполняется при $\lambda = \lambda_k$, полагаем $\lambda_{k+1} = \lambda_k$, в противном случае $\lambda_{k+1} = \lambda_P(x_k, \varepsilon) + R$, где $R > 0$ — заданный фиксированный параметр.

Очевидно, что соотношения (12) выполняются, если $\lambda > \lambda_P(\varepsilon)$, и число уточнений коэффициентов λ_k будет конечным, если $\lambda_P(\varepsilon) < \infty$.

Использование штрафных функций с существенно завышенными значениями штрафных коэффициентов приводит к проблемам, связанным с ошибками округления, ухудшением сходимости оптимизационных алгоритмов. Поэтому важной характеристикой правила P является величина $\lambda_P(\varepsilon)$. В дальнейшем будем рассматривать различные подходы к формированию правил P.

Представляет интерес оценка величины $\lambda_P(\varepsilon)$, которая может быть достигнута при выборе подходящего правила P. Рассмотрим случай, когда исходная задача (9) является задачей линейного программирования:

$$f^* = \min \langle c, x \rangle, \tag{15}$$

$$\langle a_i, x \rangle + b_i \le 0, \; i=1, \dots, m. \tag{16}$$

Лемма 2. Пусть задача (15), (16) имеет единственное оптимальное решение x^*, $P = P^* : R^n \to x^*$, ограничения, активные в точке x^*, линейно независимы, $(u_1^*, \ldots, u_m^*)$ — оптимальные значения двойственных переменных задачи (15), (16). Тогда $\lambda_P(0) = \sum_{i=1}^m u_i^*$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что из выпуклости функций f_0, h следует, что $\lambda_P(x,0)$ не возрастает вдоль любого направления, исходящего из точки x^* и лежащего вне допустимой области. Отсюда вытекает, что для любого $\bar{\delta} > 0$ имеет место

$$\lambda_P(0) = \sup\{\lambda_P(x,0) \colon 0 < h(x) \le \bar{\delta}\} = \sup_{0<\delta\le\bar{\delta}} \max\{\lambda_P(x,0) \colon h(x) = \delta\} =$$

$$= \sup_{0<\delta\le\bar{\delta}} \left\{ \frac{1}{\delta} \max\{f_0(x^*) - f_0(x) \colon h(x) = \delta,\ f_0(x^*) - f_0(x) \ge 0\} \right\} =$$

$$= \sup_{0<\delta\le\bar{\delta}} \frac{1}{\delta}[f^* - f_\delta^*],$$

где $f_\delta^* = \min\{f_0(x) \colon h(x) = \delta,\ f_0(x^*) - f_0(x) \ge 0\} = \min\{f_0(x) \colon h(x) \le \delta\}$.

Последнее равенство имеет место, поскольку минимум достигается на границе допустимого множества.

Рассматривая f_δ^* как функцию от значений правых частей ограничений (16), при достаточно малых значениях δ получаем $f_\delta^* = f^* - \delta \sum_{i=1}^m u_i^*$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Очевидно, что величина $\lambda_P(\varepsilon)$ существенно зависит от правила P. Для того чтобы минимизировать $\lambda_P(\varepsilon)$, необходимо использовать в качестве правила P для каждой точки x_k решение вспомогательной задачи (построение оптимального правила P)

$$z_k = P(x_k) = \arg\min_z \{f_0(z) + \varepsilon \| z - x_k \| \colon z \in C\}. \tag{17}$$

Эта задача, конечно, не является более легкой, чем исходная. Но поскольку получаемое решение (точка z_k) используется для уточнения штрафного коэффициента (при нарушении условий (12)), можно ограничиться грубыми приближениями и использовать эвристические алгоритмы. Это приведет к завышенному значению $\lambda_P(\varepsilon)$.

Если точка z_k лежит на границе множества C, то ограничение (12) можно представить в виде

$$f_0'(z_k, p_k) + \lambda h'(z_k, p_k) \ge \varepsilon - o(\| z_k - x_k \|), \tag{18}$$

где $f_0'(z_k, p_k), h'(z_k, p_k)$ — производные по направлению p_k функций f_0, h в точке z_k; $p_k = (x_k - z_k)/\| x_k - z_k \|$, $o(\| z_k - x_k \|) \ge 0$. Последнее неравенство следует из выпуклости функций f_0, h.

Рассмотрим возможные подходы к определению правила P. Для $x \notin C$, $y_0 \in C$ обозначим $\pi_C(x, y_0)$ — точку пересечения отрезка $[x, y_0]$ с границей множества C.

Теорема 2. Пусть множество C ограничено, функция f_0 липшицева на C, задана точка $y_0 \in C$, $h(y_0) < 0$, $P(x) = \pi_C(x, y_0)$ для $x \notin C$. Тогда $\lambda_P(\varepsilon) < \infty$.

Доказательство. Обозначим M константу Липшица функции f, $r = \max\{\| y_0 - z \| \colon z \in C\}$. Пусть $x \notin C$. Можно показать, что в силу выпуклости функций f и h имеют место неравенства $f_0(x) \ge f_0(z) - \left[\frac{f_0(y_0) - f_0(z)}{\| y_0 - z\|}\right] \cdot \| z - x\|$, $h(x) \ge \frac{-h(y_0)}{\| y_0 - z\|} \| z - x\|$, где $z = \pi_C(x, y_0)$.

Учитывая, что $f_0(z) + \varepsilon \|z - x\| - f_0(x) \le \left(\frac{f_0(y_0) - f_0(z)}{\| y_0 - z\|} + \varepsilon\right) \cdot \|z - x\| \le (M + \varepsilon)\|z - x\|$, получаем $\lambda_P(x, \varepsilon) \le \frac{(M+\varepsilon)\| z - x\|}{h(x)} \le \frac{(M+\varepsilon)}{|h(y_0)|} \| y_0 - z\| \le r \frac{(M+\varepsilon)}{|h(y_0)|}$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Правило $P(x) = \pi_C(x, y_0)$ позволяет строить достаточно эффективные процедуры уточнения штрафного коэффициента, однако при неудачном выборе точки y_0 значения коэффициентов могут устанавливаться достаточно большими.

Для улучшения качества рассмотренного правила P возможны два подхода.

1. Использовать точку $z_k = \pi_C(x_k, y_0)$ как начальную для уточнения решения задачи (17). Более подробно это будет рассматриваться при описании применения предложенного подхода в схемах декомпозиции.

2. Для каждой точки x_k, $k = 1, 2, \ldots$, вместо начальной точки $y_0 \in C$ использовать некоторую вспомогательную точку $y_k \in C$. В этом случае полагаем $z_k = P(x_k) = \pi_C(x_k, y_k)$. Вопросы выбора вспомогательных точек $y_k \in C$ должны рассматриваться отдельно.

2.3. Использование функции Φ_β. Рассмотрим схему уточнения штрафных коэффициентов для функции Φ_β. Пусть последовательность точек x_k, $k = 1, 2, \ldots$, генерируется сходящимся алгоритмом A при решении задачи (10). Точки z_k формируются в соответствии с правилом P: $z_k = P(x_k)$, $z_k \in C$, $k = 1, 2, \ldots$ Коэффициенты β заранее неизвестны и уточняются (увеличиваются) по ходу работы алгоритма. Обозначим $\beta^k = (\beta_i^k, \ldots, \beta_m^k)$ значения штрафных коэффициентов на итерации k, для $k = 1$ значения $\beta^1 > 0$ считаются заданными. При построении алгоритмом A точки x_k на итерации k используются значения β^k. Для точки x_k проверяется неравенство (12) при $\beta = \beta^k$. Это неравенство можно представить в виде

$$f_0(x_k) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i^k f_i^+(x_k) - f_0(z_k) \ge \varepsilon \| z_k - x_k \| . \tag{19}$$

Если (19) выполняется, полагаем $\beta_i^{k+1} = \beta_i^k$, $i = 1, \ldots, m$. В противном случае обозначим

$$\beta_P(x_k, \varepsilon) = \min_{\beta} \left\{ \max_i \beta_i : f_0(x_k) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i f_i^+(x_k) - f_0(z_k) \ge \varepsilon \| z_k - x_k \|, \beta \ge 0 \right\},$$

что эквивалентно

$$\beta_P(x_k, \varepsilon) = \max \left\{ 0, \frac{f_0(z_k) + \varepsilon \| z_k - x_k \| - f_0(x_k)}{\sum_{i=1}^{m} f_i^+(x_k)} \right\}, \tag{20}$$

и определим

$$\beta_i^{k+1} = \begin{cases} \beta_i^k, \text{ если } \beta_i^k \ge \beta_P(x_k, \varepsilon) \text{ или } f_i^+(x_k) = 0, \\ \beta_P(x_k, \varepsilon) + R \text{ в противном случае}, \quad i = 1, \ldots, m, \end{cases} . \tag{21}$$

где $R > 0$ — заданный фиксированный параметр.

Сравнивая (13) и (20), получаем $\beta_P(x_k, \varepsilon) \le \lambda_P(x_k, \varepsilon)$, т.е. число уточнений коэффициентов β_i по ходу решения задачи (10) со штрафной функцией $\Phi_\beta(x)$ будет конечным, если $\lambda_P(\varepsilon) < \infty$. Возможности построения правила P, рассмотренные для функции F_λ, применимы также и для функции Φ_β.

2.4. Параметризация ограничений. Операция построения точки $z_k = \pi_C(x_k, y_0)$ для заданных x_k, y_0 может быть достаточно трудоемкой. Для упрощения процедуры уточнения штрафных коэффициентов в целом представим исходную задачу (9) в параметризованном виде: найти

$$\min\{f_0(x) : x \in C(b)\}, \tag{22}$$

где $C(b) = \{x : f_i(x) \le b_i,\ i = 1, \dots, m,\ x \in R^n\}$, $b_i \ge 0$, $i = 0, \dots, m$.

Пусть начальная допустимая точка $y_0 \in C$ фиксирована и задано некоторое $\delta > 0$. Обозначим $z_\delta(x)$ точку, получаемую при сдвиге на величину δ из x в направлении y_0:

$$z_\delta(x) = x + \delta p, \text{ где } p = (y_0 - x) / \| y_0 - x \|; \tag{23}$$

$$C_\delta(x) = C(b), \text{ где } b_i = f_i^+(z_\delta(x)),\ i = 1, \dots, m. \tag{24}$$

Последовательность точек x_k, $k = 1, 2, \dots$, генерируется сходящимся алгоритмом при решении задачи (10) или (11). Нетрудно видеть, что если $z_\delta(x_k) \notin C$, то $z_\delta(x_k) = \pi_{C_\delta(x_k)}(x_k, y_0)$. С учетом последнего соотношения будем на итерации k уточнять штрафные коэффициенты не для задачи $\min\{f_0(x) : x \in C\}$, а для задачи $\min\{f_0(x) : x \in C_\delta(x_k)\}$. При этом нет необходимости искать точку пересечения отрезка $[x_k, y_0]$ с границей множества C.

Рассмотрим штрафную функцию $\Phi_\beta^\delta(x, x_k) = f_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i (f_i(x) - f_i^+(z_\delta(x_k)))^+$ для множества $C_\delta(x_k)$ и функцию $F_\lambda^\delta(x, x_k) = f_0(x) + \lambda(h(x) - h(z_\delta(x_k)))^+$.

Заметим, что если $z_\delta(x_k) \notin C$, то

$$f_0(z_\delta(x_k)) = \Phi_\beta^\delta(z_\delta(x_k), x_k) = F_\lambda^\delta(z_\delta(x_k), x_k). \tag{25}$$

Условия сходимости к решению исходной задачи приведены в следующей теореме.

Теорема 3. Пусть множество C компактно и замкнуто, значения штрафных коэффициентов фиксированы, заданы точка $y_0 \in C$, удовлетворяющая условию Слейтера, числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, последовательность точек x_k, $k = 1, 2, \dots$, сходящаяся к решению $\tilde{x}$ задачи (10) (или решению задачи (11)). Пусть также для точек $x_k \notin C$, $k = 1, 2, \dots$, выполняются неравенства

$$\varphi^\delta(x_k, x_k) \ge f_0(\tilde{z}_k) + \varepsilon \| \tilde{z}_k - x_k \|, \text{ если } \tilde{z}_k \notin C, \tag{26}$$

$$\varphi(x_k) \ge f_0(z_k) + \varepsilon \| z_k - x_k \|, \text{ если } \tilde{z}_k \in C, \tag{27}$$

где $\varphi(x) = \Phi_\beta(x)$, $\varphi^\delta(x, x_k) = \Phi_\beta^\delta(x, x_k)$ (соответственно $\varphi(x) = F_\lambda(x)$, $\varphi^\delta(x, x_k) = F_\lambda^\delta(x, x_k)$), $\tilde{z}_k = z_\delta(x_k)$, $z_k = \pi_C(x_k, y_0)$. Тогда имеет место утверждение $\tilde{x} \in C$.

Доказательство. Предположим, что $\tilde{x} \notin C$. Обозначим $\tilde{z} = z_\delta(\tilde{x})$. Рассмотрим случай, когда $\tilde{z} \notin C$. Очевидно, последовательность точек $\tilde{z}_k$ сходится к $\tilde{z}$. Нетрудно проверить, что $\varphi(\tilde{x}) - \varphi(\tilde{z}) = \varphi^\delta(\tilde{x}, \tilde{x}) - \varphi^\delta(\tilde{z}, \tilde{x})$. Из (26), (25) вытекает $\varphi^{\delta}(\widetilde{x},\widetilde{x}) > f_0(\widetilde{z}) = \varphi^{\delta}(\widetilde{z},\widetilde{x})$, откуда следует $\varphi(\widetilde{x}) - \varphi(\widetilde{z}) > 0$, что противоречит условию оптимальности точки $\widetilde{x}$.

Случай $\widetilde{z} \in C$ соответствует лемме 1. Теорема доказана.

2.5. Учет структуры исходной задачи. Для блочной задачи со связывающими переменными (1), (2) обозначим $x = (x^q,\, q = 0, \ldots, Q)$; $C = \{x\colon (x^0, x^q) \in C_q$, $q = 1, \ldots, Q\}$; y_0 — начальная точка такая, что $f_q^1(y_0^0, y_0^q) < 0,\, q = 1, \ldots, Q$; x_k — точка, полученная на текущей итерации при минимизации штрафной функции исходной блочной задачи (8); $z_k = P(x_k)$ — точка, полученная по правилу P, $z_k \in C,\, k = 1, 2, \ldots$

Неравенство (19) принимает вид

$$\sum_{q=1}^{Q}[f_q^0(x_k^0, x_k^q) + \beta_q^k f_q^+(x_k^0, x_k^q)] - \sum_{q=1}^{Q} f_q^0(z_k^0, z_k^q) \geq \varepsilon \| z_k - x_k \|. \qquad (28)$$

Соответственно соотношение (20) преобразуется в равенство

$$\beta_P(x_k, \varepsilon) = \max\left\{ 0,\ \frac{\sum_{q=1}^{Q} f_q^0(z_k^0, z_k^q) + \varepsilon \| z_k - x_k \| - \sum_{q=1}^{Q} f_q^0(x_k^0, x_k^q)}{\sum_{q=1}^{Q} f_q^+(x_k^0, x_k^q)} \right\}. \qquad (29)$$

Задача (17) построения оптимального правила P может быть представлена следующим образом:

$$z_k = P(x_k) =$$

$$= \arg\min_z \left\{ \sum_{q=1}^{Q} f_q^0(z^0, z^q) + \varepsilon \| z - x_k \| \colon (z^0, z^q) \in C_q,\, q = 1, \ldots, Q \right\}. \qquad (30)$$

Пусть на некоторой итерации при решении координирующей задачи выполнен переход в точку (значения связывающих переменных) x_k^0. Обозначим x_k^q, $q = 1, \ldots, Q$, значения блочных переменных, полученные к моменту перехода в точку x_k^0, $x_k = (x_k^0, x_k^q,\, q = 1, \ldots, Q)$. Если $x_k \notin C$, проводится построение точки z_k (правило P), которое будем выполнять последовательно по этапам $q = 0, \ldots, Q$.

На этапе $q = 0$ определим $\bar{z}_k = \pi_C(x_k, y_0)$, при этом $f_q^1(\bar{z}_k^0, \bar{z}_k^q) \leq 0$, $q = 1, \ldots, Q$. Значения связывающих переменных на последующих этапах изменяться не будут: $z_k^0 = \bar{z}_k^0$.

На этапе $q = 1, \ldots, Q$ выполняется отдельная обработка блока q. Если $f_q^1(z_k^0, \bar{z}_k^q) = 0$, полагаем $z_k^q = \bar{z}_k^q$. В случае $f_q^1(z_k^0, \bar{z}_k^q) < 0$ находится приближенное решение задачи (30) для блока q. Связывающие переменные и переменные остальных блоков считаются зафиксированными. Аналогичные действия проводятся при решении подзадач в схеме декомпозиции при фиксированных значениях связывающих переменных.

3. ОГРАНИЧЕННЫЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Если функции $f_q^i(x^0, x^q)$, $i = 0, 1$, $q = 1, \ldots, Q$, определены не для всех значений переменных, необходимо сочетать выпуклое продолжение этих функций на все пространство с использованием точных штрафов. Различные подходы к выпуклому продолжению функций рассматривались в [10]. При использовании в процессе решения оптимизационных задач существенной оказывается трудоемкость предлагаемых процедур.

3.1. Выпуклые продолжения. Приведем краткое описание подхода, изложенного в [9]. Рассмотрим задачу: найти

$$f^* = \min\{f(x) : x \in C\}, \qquad (31)$$

где $C = \{x \in R^n : h(x) \le 0\}$; f, h: $R^n \to R \cup \{+\infty\}$ — выпуклые функции, C — компактное множество, $C \subseteq \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, h$.

Считаются заданными точка $y_0 \in \mathrm{int}\, C$ и число $E < f(y_0)$. Обозначим $\pi_C(x, y_0)$ точку пересечения луча, исходящего из y_0 и проходящего через x, с границей множества C, где $x \ne y_0$. Положим

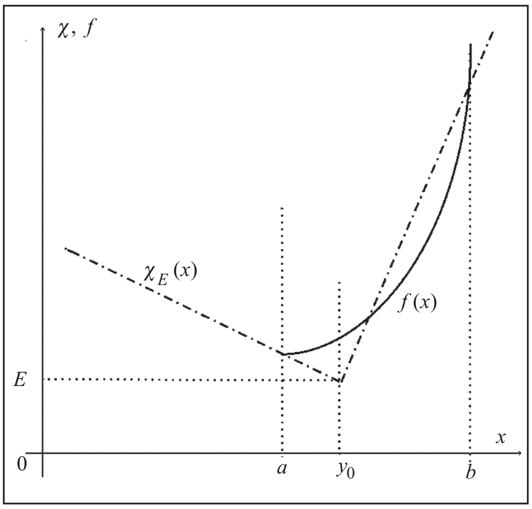

Рис. 1

$$\chi_E(x) = E + (f(\pi_C(x, y_0)) - E) \frac{\| x - y_0 \|}{\| \pi_C(x, y_0) - y_0 \|}, \qquad (32)$$

$$\psi_E(x) = \begin{cases} \chi_E(x), \text{ если } x \notin C, \\ f(x), \text{ если } x \in C. \end{cases} \qquad (33)$$

Функции $f(x)$ и $\chi_E(x)$ для одномерного пространства приведены на рис. 1, где сплошной линией показана функция $f(x)$, штрихпунктирной — функция $\chi_E(x)$, множество C — отрезок $[a, b]$.

Заметим, что функция

$$R_C(x) = \frac{\| x - y_0 \|}{\| \pi_C(x, y_0) - y_0 \|} \qquad (34)$$

есть функция Минковского (см., например, [7]) для множества C, записанная относительно точки y_0. При этом $R_C(x) \le 1$, если $x \in C$; $R_C(x) \ge 1$ при $x \notin C$ и $R_C(x) = 1$, если x лежит на границе множества C.

Рассмотрим задачу

$$\psi_E^* = \inf\{\psi_E(x) : x \in R^n\}. \qquad (35)$$

Лемма 3 [9]. Пусть $E \le f^*$, тогда $\psi_E^* = f^*$.

Обозначим $f'(x, p)$ производную функцию f в точке x по направлению p, $p(x) = \dfrac{x - y_0}{\| x - y_0 \|}$, fr C — граница множества C, $E(x) = f(x) - f'(x, p(x)) \cdot \| x - y_0 \|$,

$$\overline{E} = \inf\{E(x) : x \in \mathrm{fr}\, C\}. \qquad (36)$$

Теорема 4 [9]. Пусть C — замкнутое выпуклое множество, f — выпуклая липшицева на C функция. Тогда $\overline{E}$ — конечно и для всех $E \le \overline{E}$ функция $\psi_E(x)$ выпуклая.

Обозначим: $g_f(x)$ и $g_h(x)$ — субградиенты функций f и h в точке x.

Теорема 5 [9]. Пусть $E \le \bar{E}$, $\bar{x} = \pi_C(x, y_0)$, $x \ne y_0$. Тогда $(g_h(\bar{x}), y_0 - \bar{x}) \ne 0$ и вектор

$$g = g_f(\bar{x}) + \frac{E - f(\bar{x}) - \langle g_f(\bar{x}), y_0 - \bar{x}\rangle}{\langle g_h(\bar{x}), y_0 - \bar{x}\rangle} g_h(\bar{x}) \qquad (37)$$

есть субградиент функции $\chi_E(x)$ в точке x.

Если значения f^*, $\bar{E}$ известны и величина E удовлетворяет условиям леммы 3 и теоремы 4, то для решения задачи (35) можно применить любой алгоритм минимизации выпуклых функций и последовательность генерируемых точек будет сходиться к решению задачи (31). Рассмотрим случай, когда значения f^* и $\bar{E}$ неизвестны.

Предположим, что для решения задачи (35) используется некоторый сходящийся алгоритм A безусловной минимизации выпуклых функций, на каждой итерации которого вычисляются значение минимизируемой функции и ее субградиент.

Теорема 6 [9]. Пусть заданы некоторое число $\delta > 0$ и величина E, для точек $x_k \notin C$, получаемых алгоритмом A на итерации k, $k = 0, 1, \ldots$, выполняются условия

$$E < f(\bar{x}_k) - \delta, \qquad (38)$$

$$E < f(\bar{x}_k) - f'(\bar{x}_k, p(\bar{x}_k)) \cdot \|\bar{x}_k - y_0\|, \qquad (39)$$

где $\bar{x}_k = \pi_C(y_0, x_k)$. Тогда последовательность точек x_k, $k = 0, 1, \ldots$, сходится к решению задачи (31).

Если условия (38), (39) на некоторой итерации нарушаются, то для их выполнения значение E будем уменьшать на величину не менее R, где $R > 0$ — заданный параметр. В силу конечности f^* и $\bar{E}$ число таких уточнений величины E будет конечно, после чего алгоритм сходится к решению задачи (31).

Результаты вычислительных экспериментов изложены в [9]. Обобщения рассмотренных продолжений функций приведены в [10].

3.2. Использование выпуклых продолжений в схемах декомпозиции. Рассмотрим блочную задачу со связывающими переменными (1), (2). Предположение, что функции $f_q^i(x^0, x^q)$, $i = 0, 1$, $q = 1, \ldots, Q$, определены не для всех значений переменных, требует использования подходов, описанных в разд. 3.1.

Будем считать заданной начальную точку $y_0 = (y_0^q, q = 0, \ldots, Q)$ такую, что $f_q^1(y_0^0, y_0^q) < 0$, $q = 1, \ldots, Q$. Обозначим $\pi_{C_q}(x^0, x^q, y_0^0, y_0^q)$ точку пересечения луча, исходящего из (y_0^0, y_0^q) и проходящего через точку (x^0, x^q), с границей множества C_q. Определим функции $\chi_{E_q}(x^0, x^q)$, $\psi_{E_q}(x^0, x^q)$ и $R_{C_q}(x^0, x^q)$ по аналогии с (32), (33), (34).

Поскольку функция $f_q^1(x^0, x^q)$ определена не при любых значениях переменных, для описания множества C_q будем использовать функцию Минковского $R_{C_q}(x^0, x^q)$. Рассмотрим задачу: найти

$$F^* = \min_x \sum_{q=1}^{Q} \psi_{E_q}^q(x^0, x^q) \qquad (40)$$

при ограничениях

$$(x^0, x^q) \in C_q = \{(x^0, x^q) : R_{C_q}(x^0, x^q) \le 1\}, \quad q = 1, \ldots, Q. \qquad (41)$$

В соответствии с теоремой 4 для функции $f_q^0(x^0, x^q)$ и множества C_q существует конечное $\overline{E}_q$ такое, что для всех $E_q \le \overline{E}_q$ функция $\psi_{E_q}^q(x^0, x^q)$, $q = 1, \ldots, Q$, выпуклая (для любых значений переменных) . На множестве C_q функции f_q^0 и $\psi_{E_q}^q$ совпадают. Таким образом, при условии $E_q \le \overline{E}_q$, $q = 1, \ldots, Q$, задача (40), (41) и исходная задача (1), (2) эквивалентны. Для обеспечения условия $E_q \le \overline{E}_q$ необходимо проверять на каждой итерации аналог неравенства (39).

Для задачи (40), (41) могут применяться точные штрафные функции и подходы к определению значений штрафных коэффициентов, изложенные в разд. 2.

Рассмотрим задачу (40) без ограничений (41).

Теорема 7. Пусть множества $C_q = \{(x^0, x^q): f_q^1(x^0, x^q) \le 0\}$ выпуклы и замкнуты, функции f_q^0 выпуклы и липшицевы на C_q , задана начальная точка $y_0 = (y_0^q, q = 0, \ldots, Q)$, для которой $f_q^1(y_0^0, y_0^q) < 0$, $q = 1, \ldots, Q$. Тогда существует набор чисел $E^* = (E_q^*, q = 1, \ldots, Q)$ такой, что для любых $E_q < E_q^*$, $q = 1, \ldots, Q$, решение задачи (1), (2) совпадает с решением задачи (40).

Доказательство. Рассмотрим задачу (40), (41). Пусть $E_q = \widetilde{E}_q \le \overline{E}_q$, $q = 1, \ldots, Q$, т.е. задачи (40), (41) и (1), (2) эквивалентны. Для функции $\Phi_\beta(x) = \sum_{q=1}^{Q} (\psi_{\widetilde{E}_q}^q(x^0, x^q) + \beta_q [R_{C_q}(x^0, x^q) - 1]^+)$ существуют коэффициенты $\beta_q^*, q = 1, \ldots, Q$, такие, что $\Phi_\beta(x)$ — точная штрафная функция при $\beta_q \ge \beta_q^*, q = 1, \ldots, Q$.

Покажем, что $\psi_{\widetilde{E}_q}^q(x^0, x^q) + \beta_q [R_{C_q}(x^0, x^q) - 1]^+ = \psi_{\widetilde{E}_q - \beta_q}^q(x^0, x^q)$. Действительно, при $(x^0, x^q) \in C_q$ правая и левая части соотношения равны $f_q^0(x^0, x^q)$. Пусть $(x^0, x^q) \notin C_q$, тогда

$$\psi_{\widetilde{E}_q}^q(x^0, x^q) + \beta_q [R_{C_q}(x^0, x^q) - 1]^+ =$$

$$= \widetilde{E}_q + (f_q^0(\pi_{C_q}(x^0, x^q, y_0^0, y_0^q)) - \widetilde{E}_q) \frac{\|(x^0, x^q) - (y_0^0, y_0^q)\|}{\|\pi_{C_q}(x^0, x^q, y_0^0, y_0^q) - (y_0^0, y_0^q)\|} +$$

$$+ \beta \left(\frac{\|(x^0, x^q) - (y_0^0, y_0^q)\|}{\|\pi_{C_q}(x^0, x^q, y_0^0, y_0^q) - (y_0^0, y_0^q)\|} - 1 \right) = \psi_{\widetilde{E}_q - \beta}^q(x^0, x^q) .$$

Отсюда, полагая $E_q^* = \widetilde{E}_q - \beta_q^*, q = 1, \ldots, Q$, получаем утверждение теоремы. ■

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование точных штрафных функций в схемах декомпозиции по переменным позволяет преодолеть многие проблемы, связанные с отсутствием решений подзадач при некоторых значениях связывающих переменных. Существенным при этом оказывается определение значений штрафных коэффициентов. Для их оценки обычно используются вспомогательные линеаризованные задачи. Однако для блочной задачи большой размерности трудоемкость решения вспомогательной задачи может быть соизмерима с трудоемкостью решения исходной.

В данной статье рассмотрены подходы, позволяющие оценивать значения штрафных коэффициентов и не требующие решения вспомогательных задач. Для использования предложенных подходов должна быть известна начальная (вспомогательная) допустимая точка исходной задачи, удовлетворяющая условию Слейтера. Значение оценок штрафных коэффициентов существенно зависит от вспомогательной допустимой точки. Вопросы выбора вспомогательных точек должны рассматриваться отдельно.

В случае, когда функции исходной задачи определены не на всем пространстве переменных, необходимо использовать выпуклые продолжения функций. В работе приведены эффективные процедуры такого продолжения. Полученные результаты будут полезны при разработке алгоритмов решения выпуклых блочных задач оптимизации со связывающими переменными большой размерности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shor N.Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. — London: Kluwer Academic Publishers, 1998. — 381 p.
2. Zverovich V., Fábián C., Ellison E., Mitra G. A computational study of a solver system for processing two-stage stochastic LPs with enhanced Benders decomposition // Mathematical Programming Computation. — 2012. — **4**, Issue 3. — P. 211–238.
3. Ruszczynski A. A regularized decomposition method for minimizing a sum of polyhedral functions // Mathematical Programming. — 1986. — **35.** — P. 309–333.
4. Лаптин Ю.П. ε-субградиенты в методах декомпозиции по переменным для некоторых задач оптимизации // Теорія оптимальних рішень. — 2003. — № 2. — С. 75–82.
5. Лаптин Ю.П., Журбенко Н.Г. Некоторые вопросы решения блочных нелинейных задач оптимизации со связывающими переменными // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 2. — С. 47–55.
6. Byrd R.H., Lopez-Calva G., Nocedal J. A line search exact penalty method using steering rules // Math. Program., Series A and B. — 2012. — **133.** — P. 39–73.
7. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. — 320 с.
8. Данилин Ю.М. Линеаризация и штрафные функции // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 5. — С. 65–79.
9. Лаптин Ю.П., Лиховид А.П. Использование выпуклых продолжений функций для решения нелинейных задач оптимизации // Управляющие системы и машины. — 2010. — № 6. — С. 25–31.
10. Лаптин Ю.П., Бардадым Т.А. Некоторые подходы к регуляризации нелинейных задач оптимизации // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 3. — С. 57–68.
11. Лаптин Ю.П. Вопросы построения точных штрафных функций // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика. — 2013. — Вып. 4. — С. 21–31.

Поступила 18.06.2015