УДК 519.81

И.А. ПАСИЧНИЧЕНКО

К АКСИОМАТИЧЕСКОМУ ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОБОБЩЕННОГО ПРИНЦИПА МАКСИМИНА

Аннотация. Рассмотрена проблема аксиоматического определения класса критериев принятия решений в условиях неопределенности, которые оценивают решение по его минимальной ожидаемой полезности на замкнутом семействе конечно-аддитивных вероятностных мер на множестве значений неизвестного параметра. Предложено аксиоматическое описание соответствующего отношения предпочтения, основанное на специфической форме принципа гарантированного результата.

Ключевые слова: принцип оптимальности, отношение предпочтения, аксиомы рационального выбора, гарантированный результат.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется некоторый набор A отображений множества Θ значений неизвестного параметра (состояний природы) во множество X последствий. Выбор из данного набора — некая задача принятия решений, при этом набор называется множеством допустимых альтернатив (или решений). Рассмотрим класс действительных функций U на A, имеющих вид

$$U(a) = \min_{p \in P} \int_{\Theta} u[a(\theta)]\, dp(\theta), \;\; a \in A, \tag{1}$$

где P — статистическая закономерность на Θ, u — действительная функция последствий. В настоящей работе предложены условия, при которых между множеством решений A, упорядоченным отношением предпочтения, и подмножеством действительной прямой существует изоморфизм, заданный некоторым отображением из класса (1). Этим условиям дана интерпретация в терминах ситуации принятия решений. Таким образом, представлено аксиоматическое определение класса критериев принятия решений вида (1), который здесь называем обобщенным принципом максимина.

Класс критериев (1) обобщает байесовский и максиминный принципы оптимальности [1] и используется в решении прикладных задач, в частности при построении мер риска и поиске оптимальных портфельных решений [2]. Первое аксиоматическое определение этого класса дано в работе [3]: получены необходимые и достаточные условия в терминах действительных функций на множествах решений и последствий на основе принципа гарантированного результата. Позже аналогичные по форме условия, но сформулированные в терминах отношений предпочтения и с отличающейся интерпретацией, были использованы в [4] для аксиоматизации критерия (1) в модели Анскомба–Ауманна и разрешения парадокса Эллсберга. Обсуждение принципа гарантированного результата и построенные на его основании модели многошаговых предпочтений приведены в [5]. В [6] рассмотрено проблему аксиоматического определения критерия (1) для случая, когда статистическая закономерность P задана извне, а u — функция полезности фон Неймана–Моргенштерна.

Данная статья развивает результаты, полученные в [3], по нескольким направлениям. Прежде всего, в отличие от указанной работы предложенная здесь аксиоматизация проведена в терминах отношений предпочтения. Вместе с тем одно из условий было ослаблено, что позволило дать ему естественную интерпретацию. Кроме того, существенно ослаблено допущение «богатства» множеств последствий и решений.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Пусть X, Θ — произвольные непустые множества, A — некоторое множество функций $a:\Theta \to X$, которое содержит, в частности, все функции с конечными множествами значений (простые функции). Пусть $\precsim$ — бинарное отношение на множестве

$$A^{\infty} = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid n \in N, \ a_i \in A, \ i = \overline{1, n}\}$$

всех конечных упорядоченных наборов элементов A. Для произвольного $x \in X$ элемент $x^* \in A$ определяется равенством $x^*(\theta) = x$ для всех $\theta \in \Theta$. Пусть $\dot{\precsim}$ — бинарное отношение на X^{∞}, согласованное с $\precsim$ следующим образом: для любых двух элементов $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_m)$ множества X^{∞} имеем

$$(x_1, \ldots, x_n) \mathrel{\dot{\precsim}} (y_1, \ldots, y_m) \Leftrightarrow (x_1^*, \ldots, x_n^*) \precsim (y_1^*, \ldots, y_m^*) .$$

Пусть для любого $a \in A$ существуют такие $x,\ y \in X$, что $x \mathrel{\dot{\precsim}} a(\theta) \mathrel{\dot{\precsim}} y$ для всех $\theta \in \Theta$. Будем отождествлять элементы $a \in A$ и $(a) \in A^{\infty}$; аналогично для остальных множеств. Отношения $\prec$ и $\sim$ являются соответственно асимметричной и симметричной частями $\precsim$; аналогично обозначаются части остальных отношений.

Назовем X множеством последствий, Θ — множеством значений неизвестного параметра, A — множеством решений, $\precsim$ и $\dot{\precsim}$ — отношениями предпочтения. Считаем, что в результате реализации значений $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \Theta^{\infty}$ неизвестного параметра и выбора набора решений $(a_1, \ldots, a_n) \in A^{\infty}$ получаем набор последствий $(a_1(\theta_1), \ldots, a_n(\theta_n)) \in X^{\infty}$. В возможных приложениях этой модели для описания доступных в ситуации альтернатив достаточно множества A. Элементы A^{∞} следует рассматривать как вспомогательные альтернативы, введенные для определения «интенсивности» предпочтений между элементами A. Действительная доступность наборов из A^{∞}, а также всего множества A (ввиду требований богатства этого множества) не обязательна. Допускается лишь, что принимающий решения способен представить себе такую идеальную ситуацию и имеет предпочтения относительно альтернатив в ней. При этом реализации Θ^{∞} представляются им как перестановочные: для любой перестановки γ элементов $\{1, \ldots, n\}$ у него нет оснований считать реализацию $(\theta_{\gamma(1)}, \ldots, \theta_{\gamma(n)})$ более или менее вероятной (в обыденном смысле), чем $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$.

Пусть PF — множество всех конечно-аддитивных вероятностных мер на Θ, т.е.

$$PF = \{p: 2^{\Theta} \to [0; 1] \mid p(\Theta) = 1, \ p(A \cup B) = p(A) + p(B \setminus A) \ \ \forall A, B \subseteq \Theta\}.$$

Пусть M — банахово пространство ограниченных действительных функций на Θ, M^* — сопряженное пространство. Считаем PF подмножеством M^*, отождествляя $p \in PF$ с соответствующим интегралом по конечно-аддитивной мере. Множество PF вместе с относительной топологией τ, порожденной *-слабой топологией пространства M^*, образуют компакт [7, теорема 1.11.4]. Приведем два определения, предложенные в [8].

Определение 1. Статистической закономерностью на Θ называют непустое замкнутое в τ подмножество PF.

Определение 2. Пусть S — произвольное непустое множество. Для $x, y \in S^\infty$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, обозначим (x, y) элемент $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in S^\infty$. Бинарное отношение $(\precsim_0, S^\infty)$ называют статистическими предпочтениями на S, если:

- оно транзитивно и полно;
- из того, что $(a_1, \ldots, a_n) \in S^\infty$ и γ — некоторая перестановка $\{1, \ldots, n\}$, следует $(a_1, \ldots, a_n) \sim_0 (a_{\gamma(1)}, \ldots, a_{\gamma(n)})$;
- $(\forall\, a, b, x, y \in S^\infty : x \sim_0 y)\ a \precsim_0 b \Leftrightarrow (a, x) \precsim_0 (b, y)$;
- $\forall\, a, b, x, y \in S^\infty :\ x \prec_0 y\ \exists\, n \in N :\ (a, \underbrace{x, \ldots, x}_{n}) \prec_0 (b, \underbrace{y, \ldots, y}_{n})$.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Элементы X обозначаются x, y, z; элементы A — a, b, c; для действительных функций на Θ использованы символы f, g, h. Набор $(\alpha, \ldots, \alpha)$ из n одинаковых элементов X или A для краткости обозначен α^n.

Рассмотрим набор условий на отношение предпочтения $(\precsim, A^\infty)$.

A0. Отношение $(\dot{\precsim}, X^\infty)$ «достаточно богато» в следующем смысле:

а) $\exists\, x, y \in X :\ x \dot{\prec} y$;
б) $\exists\, e \in X :\ \forall\, x \in X\ \ (x, e) \dot{\sim} x$;
в) $\forall\, x \in X\ \exists\, y \in X : (x, y) \dot{\sim} e$, где e — некоторый элемент со свойством б);
г) $\forall\, x \in X,\ n, m \in N : n \geq m\ \exists\, y, z \in X :\ x \dot{\sim} y^n$ и $y^m \dot{\sim} z$.

Условие A0 касается структуры множества последствий и отношения предпочтения на нем. Оно допускает нетривиальность отношения предпочтения, существование «нейтрального» и «противоположного» последствий, а также представления произвольного последствия как набора фиксированной длины.

A1. $(\precsim, A^\infty)$ — статистические предпочтения на A.

A2. Для любых $a, b \in A$, если $a(\theta) \dot{\precsim} b(\theta)$ для всех $\theta \in \Theta$, то $a \precsim b$.

A3. Для любых $a, b \in A$ и $n, m \in N$, если $[a(\theta)]^n \dot{\sim} [b(\theta)]^m$ для всех $\theta \in \Theta$, то $a^n \sim b^m$.

A4. Для любых $a, b \in A$ и $x \in X$, если $a(\theta) \dot{\sim} (b(\theta), x)$ для всех $\theta \in \Theta$, то $a \sim (b, x^*)$.

A5. Для любых $a, b, c \in A$, если $[a(\theta), b(\theta)] \dot{\sim} [c(\theta)]^2$ для всех $\theta \in \Theta$, то $(a, b) \precsim c^2$.

Условие A1 естественно в контексте сказанного об интерпретации множества наборов решений A^∞. Условия A2–A5 касаются связи между отношениями предпочтения на последствиях и решениях. Смысл A2 понятен: если последствие решения b при любых обстоятельствах не хуже последствия решения a, то b не хуже a. В условии A3 при любом $\theta \in \Theta$ последствия решений a и b, повторенные n и m раз соответственно, равноценны, следовательно, такими являются и сами решения, повторенные столько же раз. В A4 последствия решения a и набора (b, x^*) равноценны при любом $\theta \in \Theta$.

Остановимся детальнее на условии A5, которое является специфической формой принципа гарантированного результата. Возьмем произвольные $s, t \in \Theta$.

Согласно А1 отношение $(\dot{\precsim}, X^{\infty})$ — статистические предпочтения на X. Поэтому из $[a(\theta), b(\theta)] \dot{\sim} [c(\theta)]^2$, $\theta \in \{s, t\}$, следует

$$[a(s), b(t), a(t), b(s)] \dot{\sim} [c(s), c(t), c(t), c(s)]. \tag{2}$$

Отсюда вытекает, что если $[a(s), b(t)] \dot{\succ} [c(s), c(t)]$, то $[c(t), c(s)] \dot{\succ} [a(t), b(s)]$, поскольку в противном случае было бы противоречие с (2). Результат выбора c^2 не зависит от порядка появлений значений параметра s и t, так как $[c(s), c(t)] \dot{\sim} [c(t), c(s)]$. Для (a, b) верно противоположное: если, например, при реализации (s, t) будет $[a(s), b(t)] \dot{\succ} [c(s), c(t)]$, то при (t, s) получим $[c(t), c(s)] \dot{\succ} [a(t), b(s)]$. Более того, выражение (2) показывает, что «выигрыш» от выбора (a, b) вместо c^2 в первом случае равен «проигрышу» во втором. Поскольку нет оснований надеяться на какую-либо из реализаций (s, t) или (t, s) больше, чем на другую, естественно выбрать c^2, гарантировав при этом по крайней мере независимость результата от порядка появлений значений параметра.

Теорема 1. Пусть выполнено условие А0. Отношение предпочтения $(\precsim, A^{\infty})$ удовлетворяет условиям А1–А5 тогда и только тогда, когда существует $U: A \to R$ со следующими свойствами:

1) для любых $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_m) \in A^{\infty}$

$$(a_1, \ldots, a_n) \precsim (b_1, \ldots, b_m) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} U(a_i) \le \sum_{j=1}^{m} U(b_j);$$

2) существуют такие функция $u: X \to R$ и статистическая закономерность P на Θ, что

$$U(a) = \min_{p \in P} \int_{\Theta} u[a(\theta)]dp, \;\; a \in A.$$

Следствие. Если $(\precsim, A^{\infty})$ удовлетворяет условиям А0–А5, то существуют такие функция $u: X \to R$ и статистическая закономерность P на Θ, что для любых $a, b \in A$

$$a \precsim b \Leftrightarrow \min_{p \in P} \int_{\Theta} u[a(\theta)]dp \le \min_{p \in P} \int_{\Theta} u[b(\theta)]dp.$$

Доказательство. Необходимость условий А1–А5 устанавливается непосредственно. Проверим, например, необходимость А5. Если $a, b, c \in A$, $[a(\theta), b(\theta)] \dot{\sim} [c(\theta)]^2$ $\forall \theta \in \Theta$, то $u \circ a + u \circ b = 2u \circ c$, откуда

$$U(a) + U(b) = \min_{p \in P} \int_{\Theta} u \circ a \, dp + \min_{p \in P} \int_{\Theta} u \circ b \, dp \le \min_{p \in P} \int_{\Theta} (u \circ a + u \circ b) \, dp =$$

$$= 2 \min_{p \in P} \int_{\Theta} u \circ c \, dp = 2U(c),$$

следовательно $(a, b) \precsim c^2$.

Докажем достаточность условий А1–А5. Поскольку отношение $(\precsim, A^{\infty})$ согласно А1 является статистическими предпочтениями, существует [8, теорема П.1.1] такое отображение $U: A \to R$, что для любых $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_m) \in A^\infty$

$$(a_1, \ldots, a_n) \precsim (b_1, \ldots, b_m) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} U(a_i) \le \sum_{j=1}^{m} U(b_j).$$

В оставшейся части доказательства покажем, что U также обладает свойством 2.

Определим $u: X \to R$, положив $u(x) = U(x^*)$ $\forall x \in X$. Из определения $(\dot{\precsim}, X^\infty)$ вытекает, что для любых $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_m) \in X^\infty$

$$(x_1, \ldots, x_n) \dot{\precsim} (y_1, \ldots, y_m) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u(x_i) \le \sum_{j=1}^{m} u(y_j).$$

По условию А0, б) существует такое $e \in X$, что $u(e) = 0$. Согласно А0, а) и А0, в) найдутся такие $x^\circ, x_\circ \in X$, для которых

$$u(x^\circ) = -u(x_\circ) > 0.$$

Без потери общности можно выбрать U так, чтобы $u(x^\circ) = 1$. По условию А0, г) для произвольных натуральных чисел $n \ge m$ найдутся такие $y, z \in X$, что $x^\circ \dot{\sim} y^n$ и $y^m \dot{\sim} z$. Из этого непосредственно вытекает, что $nu(y) = 1$ и $mu(y) = u(z)$, следовательно, $u(z) = \frac{m}{n}$. Таким образом, множество $u(X)$ содержит все рациональные числа из $[0;1]$. На основании аналогичной аргументации оно также содержит все рациональные числа из $[-1;0]$.

Определим отображение φ_F множества $F = \{u \circ a \mid a \in A\} \subseteq M$ в действительную прямую, положив $\varphi_F(u \circ a) = U(a)$. Такое определение корректно, поскольку из $u \circ a = u \circ b$ согласно А2 вытекает $a \sim b$. Следующая лемма устанавливает свойства φ_F, которые понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1. Отображение φ_F имеет такие свойства:

1) если $f, g \in F$ и $f \le g$, то $\varphi_F(f) \le \varphi_F(g)$;

2) если $f, g \in F$ и $f = rg$, где $r > 0$ — рациональное число, то $\varphi_F(f) = r\varphi_F(g)$;

3) если $f, g \in F$ и $f = g + l^*$, где l — рациональное число из $[-1;1]$, то $\varphi_F(f) = \varphi_F(g) + l$;

4) если $f, g, h \in F$ и $f + g = 2h$, то $\varphi_F(f) + \varphi_F(g) \le 2\varphi_F(h)$.

Доказательство. Для произвольного $f \in F$ найдется такое $a \in A$, что $u \circ a = f$. Выберем некоторое из таких решений a и обозначим его a_f. Докажем свойства 1–4 леммы.

1. Из $u \circ a_f \le u \circ a_g$ вытекает $a_f(\theta) \dot{\precsim} a_g(\theta)$ $\forall \theta \in \Theta$, тогда согласно А2 имеем $a_f \precsim a_g$ и, следовательно, $\varphi_F(f) \le \varphi_F(g)$.

2. Для $n, m \in N$: $r = \frac{m}{n}$ имеем $n(u \circ a_f) = m(u \circ a_g)$, что влечет $[a_f(\theta)]^n \dot{\sim} [a_g(\theta)]^m$ $\forall \theta \in \Theta$. Тогда применение А3 дает $a_f^n \sim a_g^m$, откуда $nU(a_f) = mU(a_g)$ и $\varphi_F(f) = r\varphi_F(g)$.

3. Из того, что $a_f(\theta) \dot{\sim} (a_g(\theta), x)$ $\forall \theta \in \Theta$, где x — некоторый элемент X, для которого $u(x) = l$, применением А4 получим $a_f \sim (a_g, x^*)$, откуда $U(a_f) = U(a_g) + U(x^*)$ и, следовательно, $\varphi_F(f) = \varphi_F(g) + l$.

4. Нужное отношение $(a_f, a_g) \precsim a_h^2$ вытекает из того, что $[a_f(\theta), a_g(\theta)] \sim$

$\sim [a_h(\theta)]^2 \quad \forall \theta \in \Theta$, и свойства А5.

Лемма доказана.

Распространим φ_F на все M с сохранением свойств, установленных леммой 1. Выполним это в несколько этапов, которые завершатся далее леммой 4.

Пусть M_0 — множество всех простых функций на Θ с рациональными значениями. Множество F содержит, в частности, все функции из M_0 со значениями на отрезке $[-1;1]$; обозначим $M_0^{[-1;1]}$ множество таких функций. Сначала построим $\varphi: M_0 \to R$, используя при этом лишь значения φ_F на $M_0^{[-1;1]}$. Очевидно, что для любого $f \in M_0$ справедливо ${}^1\!/_B f \in M_0^{[-1;1]}$, где B — произвольная рациональная верхняя грань функции $|f|$. Положим $\varphi(f) = B\varphi_F({}^1\!/_B f)$. Отображение φ определено однозначно, поскольку, если B_1 и B_2 — две рациональные верхние грани $|f|$, имеем

$$B_1\varphi_F\left(\frac{1}{B_1}f\right) = B_1\varphi_F\left(\frac{B_2}{B_1}\frac{1}{B_2}f\right) = B_2\varphi_F\left(\frac{1}{B_2}f\right).$$

Очевидно, что $\varphi = \varphi_F$ на $M_0^{[-1;1]}$. Отображение φ имеет свойства 1–4 с M_0 вместо F. Действительно, если $f, g \in M_0$ и $f = rg$, где r — положительное рациональное число, то ${}^1\!/_B f, {}^1\!/_B g \in M_0^{[-1;1]}$ и ${}^1\!/_B f = r({}^1\!/_B g)$, где B — произвольная рациональная верхняя грань функций $|f|$ и $|g|$. Тогда $\varphi(f) = B\varphi({}^1\!/_B f) =$ $= Br\varphi({}^1\!/_B g) = r\varphi(g)$, следовательно, φ имеет свойство 2 на M_0. Аналогично доказываются свойства 1, 3 и 4. Более того, очевидно, что свойство 3 можно усилить, сняв ограничение $-1 \le l \le 1$.

Покажем, что φ к тому же равномерно непрерывно на M_0 по норме пространства M. Для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмем рациональное $0 < \delta < \varepsilon$. Для любых $f, g \in M_0$ из $\|f - g\| < \delta$ следует $g(\theta) - \delta < f(\theta) < g(\theta) + \delta \quad \forall \theta \in \Theta$. Тогда $\varphi(g - \delta^*) \le \varphi(f) \le \varphi(g + \delta^*)$, откуда получаем $|\varphi(f) - \varphi(g)| \le \delta < \varepsilon$.

Продолжим φ с M_0 на M с сохранением его свойств. Прежде всего, множество M_0 плотно в M. Действительно, для произвольных $f \in M$ и $\varepsilon > 0$ зафиксируем рациональную нижнюю α и верхнюю β грани функции f и выберем $n \in N$ достаточно большим, чтобы $(\beta - \alpha)/n < \varepsilon$. Положим

$$f_0(\theta) = \alpha + i\frac{\beta - \alpha}{n} \text{ при } \theta \in \left\{\theta' \in \Theta \middle| \alpha + i\frac{\beta - \alpha}{n} \le f(\theta') < \alpha + (i+1)\frac{\beta - \alpha}{n}\right\}, \; i = \overline{0, n}.$$

Очевидно, что $f_0 \in M_0$ и $\|f - f_0\| < \varepsilon$.

В следующей лемме, использовав плотность M_0 в M, продолжим φ на M по непрерывности.

Лемма 2. Отображение $\varphi: M_0 \to R$ имеет единственное непрерывное продолжение на M. Более того, это продолжение равномерно непрерывно.

Доказательство. Для произвольного $f \in M$ выберем последовательность $\{f_n\}$ элементов M_0, сходящуюся к f по норме. По равномерной непрерывности φ на M_0 последовательность $\{\varphi(f_n)\}$ фундаментальна. Несложно проверить, что

$\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(f_n)$ не зависит от выбора последовательности $\{f_n\}$. Положим $\varphi(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(f_n)$.

Покажем, что построенный функционал равномерно непрерывен на M. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, что для любых $f_0, g_0 \in M_0$ $||f_0 - g_0|| < \delta$ влечет $|\varphi(f_0) - \varphi(g_0)| < \varepsilon/3$. Пусть $f, g \in M$ и $||f - g|| < \delta/3$. Возьмем такие $f_0, g_0 \in M_0$, что $||f - f_0|| < \delta/3$ и $|\varphi(f) - \varphi(f_0)| < \varepsilon/3$, $||g - g_0|| < \delta/3$ и $|\varphi(g) - \varphi(g_0)| < \varepsilon/3$. Тогда $||f_0 - g_0|| < \delta$, откуда согласно выбору δ имеем $|\varphi(f_0) - \varphi(g_0)| < \varepsilon/3$. Следовательно, $|\varphi(f) - \varphi(g)| < \varepsilon$. Очевидно, что это единственное непрерывное продолжение φ на M.

Лемма доказана.

Следующая лемма проверяет сохранение свойств φ при продолжении на M.

Лемма 3. Функционал $\varphi: M \to R$ имеет такие свойства: для любых $f, g \in M$:

1) если $f \le g$, то $\varphi(f) \le \varphi(g)$;

2) $\varphi(rf + l^*) = r\varphi(f) + l$ для любых $r, l \in R$: $r \ge 0$;

3) $\varphi(f + g) \ge \varphi(f) + \varphi(g)$.

Доказательство. Под сходимостью последовательностей элементов M понимается сходимость по норме. Для $f \le g$ возьмем такие последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ элементов M_0, что $f_n \le f$, $g \le g_n$ $\forall n \in N$, $f_n \to f$ и $g_n \to g$ при $n \to \infty$. Тогда $\varphi(f_n) \le \varphi(g_n)$ $\forall n \in N$, поэтому $\varphi(f) \le \varphi(g)$.

Для любых рациональных $r \ge 0$ и l, если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ для последовательности $\{f_n\}$ элементов M_0, то $\lim\limits_{n\to\infty} (rf_n + l^*) = rf + l^*$. Поэтому

$$\varphi(rf + l^*) = \lim_{n\to\infty} \varphi(rf_n + l^*) = \lim_{n\to\infty} (r\varphi(f_n) + l) = r\varphi(f) + l.$$

Пусть r и l — действительные числа, $r \ge 0$. Выберем такие последовательности рациональных чисел $\{r_n\}$ и $\{l_n\}$, что $r_n \ge 0$ $\forall n \in N$, $r_n \to r$ и $l_n \to l$ при $n \to \infty$. Тогда для $\varepsilon > 0$ и $n \ge n_0$ имеем $|r_n - r| < \varepsilon$ и $|l_n - l| < \varepsilon$, откуда

$$\sup_{\theta\in\Theta} |r_n f(\theta) + l_n - rf(\theta) - l| \le \sup_{\theta\in\Theta} (|(r_n - r) f(\theta)| + |l_n - l|) < \varepsilon ||f|| + \varepsilon,$$

т.е. $r_n f + l_n^* \to rf + l^*$ при $n \to \infty$. Из непрерывности φ на M следует

$$\varphi(rf + l^*) = \lim_{n\to\infty} \varphi(r_n f + l_n^*) = \lim_{n\to\infty} (r_n \varphi(f) + l_n) = r\varphi(f) + l.$$

Если $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ — последовательности элементов M_0 и $f_n \to f$, $g_n \to g$ при $n \to \infty$, то $f_n + g_n \to f + g$ при $n \to \infty$, поэтому

$$\varphi(f + g) = \lim_{n\to\infty} \varphi(f_n + g_n) \ge \lim_{n\to\infty} \varphi(f_n) + \lim_{n\to\infty} \varphi(g_n) = \varphi(f) + \varphi(g).$$

Лемма доказана.

Итак, функционал φ определен на всем M, имеет нужные свойства и совпадает с отображением φ_F по крайней мере на $M_0^{[-1;\,1]}$. Осталось проверить, что φ совпадает с φ_F на всей его области определения.

Лемма 4. Имеем $\varphi = \varphi_F$ на F.

Доказательство леммы проведем в три шага.

1. Пусть сначала $f \in F$ — простая функция со значениями строго между -1 и 1. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем рациональное $\delta > 0$ меньшим величины

$$\min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}(1-\max_{\theta\in\Theta}|f(\theta)|)\right\}.$$

Далее возьмем такое $f_0 \in M_0$, чтобы $||f - f_0|| < \delta$ и

$$|\varphi(f) - \varphi(f_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Согласно выбору δ имеем $f_0 \in M_0^{[-1;\,1]}$, следовательно,

$$\varphi(f_0) = \varphi_F(f_0). \tag{4}$$

В то же время из соотношений $f_0 - \delta^* \le f \le f_0 + \delta^*$, $f_0 - \delta^*, f_0 + \delta^* \in$ $\in M_0^{[-1;\,1]} \subseteq F$, и свойства 1 леммы 1 вытекает

$$|\varphi_F(f) - \varphi_F(f_0)| \le \delta < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Сравнивая (3), (4) и (5), получаем $|\varphi(f) - \varphi_F(f)| < \varepsilon$, откуда следует $\varphi(f) = \varphi_F(f)$ через произвольность ε.

2. Пусть $f \in F$ — простая функция с произвольными значениями. Тогда $\frac{1}{n} f \in F \;\forall\, n \in N$ согласно условию А0, г) и, более того, $-1 < \frac{1}{n_0} f(\theta) < 1 \;\forall\, \theta \in \Theta$ при достаточно большом $n_0 \in N$. Следовательно,

$$\varphi_F(f) = n_0 \varphi_F\left(\frac{1}{n_0} f\right) = n_0 \varphi\left(\frac{1}{n_0} f\right) = \varphi(f),$$

где второе равенство вытекает из доказанного в п. 1 данной леммы.

3. Пусть f — произвольная функция из F. Тогда имеем $|f(\theta)| \le u(x)$ для некоторого $x \in X$ и всех $\theta \in \Theta$; положим $B = u(x)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $n \in N$ достаточно большим, чтобы выполнялось $B/n < \varepsilon/2$.

Положим

$$f_0(\theta) = \frac{B}{n} i \text{ при } \theta \in \left\{\theta' \in \Theta \,|\, \frac{B}{n} i \le f(\theta') < \frac{B}{n}(i+1)\right\},\; i = \overline{-n, n-2},$$

$$f_0(\theta) = \frac{B}{n}(n-1) \text{ при } \theta \in \left\{\theta' \in \Theta \,|\, \frac{B}{n}(n-1) \le f(\theta') \le B\right\}.$$

Очевидно, что f_0 и $f_0 + (B/n)^*$ — простые функции и выполнено соотношение $f_0 \le f \le f_0 + (B/n)^*$. Более того, из условий А0, в) и А0, г) вытекает, что f_0 и $f_0 + (B/n)^*$ принадлежат F. Тогда из свойств 1 и 3 леммы 1 следует $|\varphi_F(f) - \varphi_F(f_0)| \le B/n < \varepsilon/2$. Согласно доказанному в п. 2 леммы $\varphi_F(f_0) =$ $= \varphi(f_0)$. В то же время из свойств φ имеем $|\varphi(f_0) - \varphi(f)| < \varepsilon/2$. В результате получим $|\varphi(f) - \varphi_F(f)| < \varepsilon$ для произвольного ε, откуда $\varphi(f) = \varphi_F(f)$.

Лемма доказана.

Построено продолжение φ отображения φ_F на все M, которое обладает свойствами 1–3 леммы 3. На основании леммы 3.1.2 из [8] после очевидных модификаций получаем следующий результат.

Лемма 5. Для того чтобы функционал $\varphi : M \to R$ имел свойства 1–3 леммы 3, необходимо и достаточно, чтобы он был представим в виде

$$\varphi(f) = \inf_{g \in G} g(f) \quad \forall f \in M, \tag{6}$$

где G — некоторое непустое замкнутое в *-слабой топологии пространства M^* множество ограниченных линейных функционалов g, удовлетворяющих двум условиям: 1) $g(1^*) = 1$; 2) для любого $f \in M$ $f \geq 0^*$ влечет $g(f) \geq 0$.

Итак, функционал φ имеет форму (6). Перепишем это выражение, воспользовавшись известным [9, теорема IV.5.1] результатом о представлении ограниченных линейных функционалов на M, согласно которому для любого $g \in G$ существует такая ограниченная конечно-аддитивная функция множества p_g, что

$$g(f) = \int_{\Theta} f\, dp_g \quad \forall f \in M.$$

Более того, согласно свойствам 1 и 2 леммы 5 p_g является конечно-аддитивной вероятностной мерой, т.е. $p_g \in PF$. Поставив в соответствие каждому $g \in G$ меру $p_g \in PF$, из (6) получим

$$\varphi(f) = \inf_{g \in G} \int_{\Theta} f\, dp_g = \inf_{p \in P} \int_{\Theta} f\, dp = \min_{p \in P} \int_{\Theta} f\, dp \quad \forall f \in M,$$

где $P = \{p_g | g \in G\}$ — непустое замкнутое в τ подмножество PF, следовательно, статистическая закономерность на Θ. Точная нижняя грань достигается, поскольку отображение $p \mapsto \int_{\Theta} f\, dp$ непрерывно на компакте P.

Для завершения доказательства отметим, что согласно лемме 4 для любого $a \in A$ справедливо $U(a) = \varphi_F(u \circ a) = \varphi(u \circ a)$, откуда

$$U(a) = \min_{p \in P} \int_{\Theta} u \circ a\, dp.$$

Теорема 1 доказана.

Автор благодарен В.И. Иваненко за полезные обсуждения и предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 256 с.
2. Кирилюк В.С. Теория ожидаемой полезности, оптимальные портфели и полиэдральные когерентные меры риска // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — **50**, № 6. — С. 63–72.
3. Иваненко В.И., Лабковский В.А. Об одном классе правил выбора критерия // ДАН СССР. — 1986. — **287**, № 3. — С. 564–567.
4. Gilboa I., Schmeidler D. Maxmin expected utility with a non-unique prior // Journal of Mathematical Economics. — 1989. — **18**, N 2. — P. 141–153.
5. Михалевич В.М. Проблема неопределенности в задачах принятия решения и принцип гарантированного результата: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев: Нац. ун-т «Києво-Могил. акад.», 2013. — 316 с.
6. Іваненко В.І., Пасічніченко І.О. Очікувана корисність у ситуаціях прийняття рішень з випадковими в широкому сенсі наслідками // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2015. — № 2. — С. 51–58.
7. Эдвардс Р. Функциональный анализ: Пер. с англ. — М.: Мир, 1969. — 1071 с.
8. Иваненко В.И., Лабковский В.А. Проблема неопределенности в задачах принятия решений. — К.: Наук. думка, 1990. — 136 с.
9. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы (общая теория): Пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит, 1962. — 896 с.

Поступила 27.03.2015