СИСТЕМНИЙ
АНАЛІЗ

Ю.Г. КРИВОНОС, В.П. ХАРЧЕНКО, Н.М. ГЛАЗУНОВ

УДК 681.5+513.6+517.9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Памяти академика А.И. Кухтенко

Аннотация. Рассмотрены актуальные проблемы современной теории динамических систем на многообразиях, активно развивающихся в настоящее время. Дан краткий обзор таких направлений теории динамических систем. С использованием алгебр дуальных чисел, кватернионных алгебр, алгебр бикватернионов (дуальных кватернионов) разработаны приложения к исследованию бесконечно малых окрестностей и инфинитезимальных деформаций многообразий (схем). Кратко представлены теория дифференциально-алгебраических уравнений над полем вещественных чисел и их динамика, а также элементы оптимизации траекторий соответствующих динамических систем. На основе связности в расслоениях дано расширение теории дифференциально-алгебраических уравнений на алгебраические многообразия и схемы над произвольными полями и схемами соответственно.

Ключевые слова: дуальное число, дуальный кватернион, кватернионная алгебра, алгебраическое многообразие, схема, деформация, дифференциально-алгебраическое уравнение, математическая модель, динамическая система, дифференциальное уравнение на алгебраическом многообразии.

ВВЕДЕНИЕ

В работах по механике, теории управления и теории систем академик А.И. Кухтенко исследовал, применял и популяризировал дуальные числа, бикватернионы, дифференциально-алгебраические уравнения, динамические системы на многообразиях, топосы, теорию категорий и функторов [1–4]. В докладах на семинарах, комментариях к ним он отмечал, что наряду с системностью исследований необходимо изучать и использовать новые математические структуры и соответствующие им методы. В отделении «Технической кибернетики», возглавляемом А.И. Кухтенко, в отделе системных исследований в Институте кибернетики АН УССР, а ранее — в Киевском институте инженеров гражданской авиации (КИИГА), где он заведовал кафедрой и был проректором по научной работе, выполнялись и другие фундаментальные и прикладные исследования, которые им инициировались и курировались.

Принципы системности и системного анализа предполагают, что объект, процесс или проблема рассматриваются и исследуются как система с учетом всех ее граней и их взаимосвязей. Если представить грани системы как многообразия, а их взаимосвязи — как отображения между ними, то получаем соответствующую математическую модель этой системы. Рассматриваем также задачи на моделях. Понятие модели и задач на модели неявно использовалось проектировщиками и разработчиками системы Мир-2 и языка Аналитик, выполнявшими работу в Институте кибернетики АН УССР под руководством академика В.М. Глушкова, который, возможно, пришел к идее модели и задач на модели на основе своих исследований по алгебре и теории автоматов.

Под моделью будем понимать математическую модель исследуемого объекта или процесса, которая представляется как топологическое, дифференцируемое или алгебраическое многообразие с соответствующими расслоениями на них и отображениями между многообразиями и расслоениями. В некоторых задачах понятия классического многообразия оказывается недостаточно и его необходимо расширить в том или ином направлении. В данной работе используем расширение понятия алгебраического многообразия до понятия схемы, более общо — до топосов с применением языка гомологической алгебры. Понятие схемы было предложено А. Гротендиком и Ж. Дьедонне на основе работ К. Шевалле, А. Картана, О. Зарисского и др.

В статье дан краткий обзор актуальных направлений и соответствующих структур теории динамических систем, проведено сопоставление их с теорией динамических систем на многообразиях, рассмотрены новые направления развития этих теорий, а также кратко указаны приложения. В качестве одной из математических моделей системности используем элементы гомологической алгебры и теории категорий. Рассмотрено пять аспектов теории динамических систем: 1) дуальные числа, бикватернионы, деформации и динамика; 2) математическая модель движения объекта как движение динамической системы на многообразии; 3) элементы оптимизации траекторий; 4) интегрируемые модели как аналитические модели законов и траекторий движения; 5) интегрируемые модели на алгебраических многообразиях над полями конечной характеристики и конечными кольцами, приложениями которых являются: связь, защита информации, сжатие информации. Так как в конечной характеристике классический анализ не работает, адекватным аппаратом является язык современной алгебраической и дифференциальной геометрии. Наряду с динамикой процессов, описываемых системами дифференциально-алгебраических уравнений, рассмотрим и более общую ситуацию, включающую также потоки информации, циркулирующие в системе, например в транспортной, и потоки информации, циркулирующие между системой и ее окружением. Для представления динамики таких процессов систем дифференциально-алгебраических уравнений недостаточно, необходимо исследовать и применять более общие динамические системы, в частности динамические системы над полями конечной характеристики. Это приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений на алгебраических многообразиях.

Сигналы, возмущения и волны связаны с деформациями многообразий и/или деформациями полей на многообразиях. Условимся о трактовке термина многообразие. Для того чтобы охватить аспекты 1–5 теории динамических систем, необходимо расширить понятие алгебраического многообразия до понятия схемы. Грубо говоря, аффинная схема строится по любому коммутативному кольцу путем задания топологии Зарисского и структурного пучка в ней. В динамике полезны геометрические точки схем, соответствующие максимальным идеалам спектра. Обычные алгебраические многообразия, в частности алгебраические кривые, вкладываются в такое схемное представление. Произвольные схемы строятся путем склеивания аффинных схем. При выводе и исследовании дифференциальных законов движения динамических объектов, возмущений и волн [5–10] используются бесконечно малые окрестности и инфинитезимальные деформации. Алгебраической структурой, позволяющей описывать и исследовать деформации, является понятие плоского морфизма. В контексте схем оно представляется плоскими морфизмами схем. Понятие плоского морфизма схем формализует интуитивное понятие непрерывного семейства схем, или, если ограничиться классическими многообразиями, — непрерывного семейства многообразий. Кольца дуальных чисел и их отображения в многообразия и схемы позволяют проводить такие исследования не только над классическими полями вещественных и комплексных чисел, но и над полями конечной характеристики. В целях компактности изложения в большинстве случаев ограничиваемся достаточно простыми математическими конструкциями и примерами.

1. ДУАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, БИКВАТЕРНИОНЫ, ДЕФОРМАЦИИ И ДИНАМИКА

Дуальные числа появились в принципе перенесения Штуди: линейчатую геометрию можно поставить в соответствие с двумерной геометрией единичной дуальной сферы [11]. Напомним, что в классическом понимании дуальное число есть выражение вида $A = a + b\varepsilon$, где a, b — вещественные числа, ε — единица со свойством $\varepsilon^2 = 0$. Арифметика дуальных чисел A, $A_1 = a_1 + b_1\varepsilon$ определяется известными формулами $A + A_1 = (a + a_1) + (b + b_1)\varepsilon$, $AA_1 = aa_1 + {} + (ab_1 + ba_1)\varepsilon$. С алгебраической точки зрения множество дуальных чисел образует кольцо с нильпотентными элементами. Пусть прямая L в евклидовом пространстве определяется двумя лежащими на ней точками, заданными концами векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, выходящими из начала координат. Скалярное произведение векторов обозначаем $(,)$ или просто $\boldsymbol{xy}$. Плюккеровы координаты можно ввести несколькими способами. Е. Штуди и В. Бляшке [11, 12] вводят величины $\boldsymbol{a} = \rho(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{b} = \rho(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})$ с условием $\boldsymbol{a}^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 1$, нормируя тем самым множитель ρ. Если евклидово пространство трехмерное, то шесть координат векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — однородные плюккеровы координаты прямой L. Геометрически вектор $\boldsymbol{a}$ задает направление прямой L, а механическая интерпретация вектора $\boldsymbol{b}$ — векторный момент (единичной) силы, действующий в направлении прямой L относительно начала координат. Е. Штуди вводит дуальный вектор $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\varepsilon$. Его квадрат $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab}\varepsilon = 1$, так как $\boldsymbol{ab} = 0$. Тем самым прямая L отображается (перенесена) в точку единичной дуальной сферы $\boldsymbol{A}^2 = 1$. Рассмотрения Е. Штуди и Р. фон Мизеса [11, 13] могут быть расширены и распространены на значительно более широкие классы алгебраических и геометрических объектов. Для этого, следуя [14, 15], расширим определение дуальных чисел так, чтобы оно было верно над любым полем. Пусть k — поле, $k[\varepsilon]$ — кольцо многочленов над k от переменной ε. Профакторизовав $k[\varepsilon]$ по идеалу (ε^2), получают искомое кольцо дуальных чисел D над $k: D = k[\varepsilon] / (\varepsilon^2)$. Как и классическое кольцо дуальных чисел, кольцо D является нильпотентным. Далее, если это специально не оговорено, под дуальными числами понимаем элементы определенных выше колец D.

Переход от коммутативных колец к схемам осуществляется посредством определения топологии Зарисского (и других топологий) и пучков в топологии Зарисского (и в других топологиях) [14, 15]. Например, полезная в теории чисел и криптографии аффинная схема $Spec\,\mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел, имеет в качестве топологического пространства множество простых идеалов кольца $\mathbb{Z}$ с топологией Зарисского на этом множестве, а ее структурный пучок есть пучок колец, сечениями которого над максимальными точками спектра, т.е. простыми идеалами (p), являются поля $\mathbb{F}_p$; сечение над общей точкой (0) — поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$. В настоящее время имеется ряд содержательных изложений теории схем (работы [14, 15] и ссылки к ним). Соответствующая дуальному кольцу D аффинная схема $Spec\,D$ имеет одну геометрическую точку, соответствующую максимальному идеалу (ε), и содержит в своем структурном пучке нильпотентные элементы, что отличает эту схему от классических алгебраических многообразий. Целесообразно также расширить кольцо дуальных чисел, введя $n \geq 1$ величин $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ и определив n-мерное локальное кольцо дуальных чисел выражением

$$D_n = k[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n] / (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)^2,$$

где $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — максимальный идеал.

Бесконечно малые окрестности. Пусть X — схема над алгебраически замкнутым полем k (используя язык классических алгебраических многообразий, можно понимать под X множество комплексных корней (нулей) системы алгебраических уравнений с целыми, вещественными или комплексными коэффициентами либо множество нулей системы алгебраических уравнений с коэффициентами в конечном поле). Однако в данной работе, ввиду наличия нильпотентных элементов в структурном пучке аффинной схемы $Spec\,D$, будем применять язык схем. Здесь и далее под точкой схемы понимаем ее геометрическую (замкнутую) точку, если не оговорено противное. Фиксируем, следуя [14], обозначения: o — замкнутая точка схемы $Spec\,k$, $\bar{o}$ — замкнутая точка схемы $Spec\,D$, $i: Spec\,k \to Spec\,D$ — каноническое вложение, при котором $\bar{o} = i(o)$.

Лемма 1. Любой морфизм $\varphi: Spec\,D \to X$ определяет морфизм $\varphi \circ i(o)$: $Spec\,k \to X$, где $x = \varphi \circ i(o)$ — замкнутая точка схемы X.

Доказательство. Гомоморфизм $D \to k$ с ядром (ε) определяет каноническое вложение i, а морфизм $\varphi \circ i(o)$ задает замкнутую точку $x \in X$.

Пусть U — аффинная окрестность точки x, m_x — максимальный идеал точки x в $k[U]$.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{M}_x$ — множество таких морфизмов схем $Spec\,D \to X$, что $\varphi(\bar{o}) = x$. Тогда $\mathcal{M}_x(Spec\,D, X) = \mathcal{M}_x(Spec\,D, U)$.

Доказательство леммы следует из локальности рассмотрений.

Определение 1. Положим $T_x = Spec\,k[U] / m_x^2$. Схему T_x называют бесконечно малой окрестностью первого порядка точки x.

Замечание 1. Гомоморфизм $Spec\,k[U] \to Spec\,k[U] / m_x^2$ определяет замкнутое вложение $T_x \to U$, T_x — замкнутая подсхема в U.

Из сформулированных утверждений получаем следующий результат.

Предложение 1. Морфизмы $Spec\,D \to X$, переводящие $Spec\,k$ в $x \in X$, взаимно однозначно соответствуют морфизмам $Spec\,D \to T_x$.

Инфинитезимальные деформации. Пусть $X \to Y$ — морфизм схем. Схему X называют плоской над схемой Y, если пучок $\mathcal{O}_X$ плоский над $\mathcal{O}_Y$. Напомним понятие деформации. Для схем X, T и плоского морфизма $X \to T$ с фиксированной точкой $t \in T$ такой, что $X_t \simeq X_o$, полагают, что задана (глобальная) деформация схемы X_o. Пусть X_o — схема конечного типа над полем k и D — кольцо дуальных чисел над полем k. Инфинитезимальной деформацией X_o называют схему X', плоскую над D и такую, что $X' \otimes_D k \simeq X_o$.

Предложение 2. Пусть задана глобальная деформация схемы X_o. Тогда существует и инфинитезимальная деформация схемы X_o.

Доказательство. Согласно лемме 1 существует морфизм $Spec\,D \to T$, определяемый некоторым элементом касательного пространства к T в точке t. Тем самым существует схема X', плоская над D, с замкнутым слоем X_o, $X' \otimes_D k \simeq X_o$, что и дает искомую инфинитезимальную деформацию.

Бикватернионы Штуди. Напомним понятия кватернионной алгебры и кватерниона. Пусть k — поле характеристики, не равной двум.

Определение 2. Кватернионной алгеброй над полем k называют алгебру $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u} = x + y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ x,\ y,\ z,\ t \in k\}$ с базисом 1, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, удовлетворяющим соотношениям $\boldsymbol{i}^2 = a$, $\boldsymbol{j}^2 = b$, $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{ji} = -\boldsymbol{k}$, a, $b \in k$. Элементы $\boldsymbol{u}$ называют кватернионами над полем k.

Замечание 2. Если $k = \mathbb{Q}$, $a = -1$, $b = -1$, получают кватернионы Гамильтона над полем рациональных чисел, а для $k = \mathbb{R}$, $a = -1$, $b = -1$ — кватернионы Гамильтона.

Напомним, следуя Б.Л. ван дер Вардену, А.П. Котельникову [16], Е. Штуди и другим исследователям, понятие бикватерниона.

Определение 3. Бикватернионами Штуди, или бикватернионами, будем называть элементы тензорного произведения алгебры кватернионов $\mathcal{B}$ и алгебры (кольца) дуальных чисел D над $k: \mathcal{D} = \mathcal{B} \otimes_k D$.

Замечание 3. Алгебру $\mathcal{D}$ называют иногда алгеброй дуальных кватернионов, а ее элементы — дуальными кватернионами. Здесь, следуя упомянутым авторам и А.И. Кухтенко, который называл элементы алгебры $\mathcal{D}$ в случае поля вещественных чисел бикватернионами, будем использовать этот же термин.

Замечание 4. Бикватернионы над полем вещественных чисел можно представить алгеброй Клиффорда [17], которая является одним из источников теории бикватернионов.

Перечислим кратко приложения теории бикватернионов: движение и динамика твердых тел (эти направления развивались Е. Штуди, А.П. Котельниковым [11, 16] и их последователями); компьютерная визуализация и анимация, в частности применения в компьютерных играх; роботика и механотроника.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ) возникают в прикладных исследованиях, например в авиации и космонавтике, транспортных системах, химии, биологии, связи и электронике, как дифференциальные уравнения, описывающие динамику процесса или системы на алгебраическом многообразии, которое задает ограничения на местоположение и динамику системы, процесса, законы сохранения массы, зарядов, энергии. Подобные ДАУ часто возникают также в оптимальном управлении, при моделировании электрических цепей, в других областях. Здесь, следуя идеям В.М. Глушкова, а также Т. Шеуреру и другим исследователям, будем различать модель и задачи на модели [18–20]. Под моделью в этих работах понимают некоторую систему уравнений, состоящую из множества переменных и множества уравнений, которым эти переменные должны удовлетворять. Задача на модели специфицируется посредством выбора достаточного числа переменных как данных таким образом, чтобы решить уравнения для остальных переменных. Проиллюстрируем это на известном примере закона движения Ньютона $m\ddot{x} = F$, в котором математическая модель содержит x и F как переменные и массу m как параметр. Если F задана, имеем прямую задачу: задана сила F, найти (вычислить) траекторию x. В авиации и космонавтике, транспортных системах и в других направлениях исследований возникает обратная задача: при задании траектории x или ее свойства определить, какие силы как векторные величины следует применять для реализации данной траектории. Если представить грани такой системы как многообразия, а их взаимосвязи — как отображения между ними, то получаем математическую модель этой системы [21]. Моделями выступают различные классы многообразий и их обобщений с соответствующими расслоениями на них и отображениями между многообразиями и расслоениями. Система ДАУ [22] имеет вид

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}, t) = 0, \ \boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_n)^{\mathrm{T}}, \ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x} = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где матрица $\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ якобиана системы сингулярная, T — операция транспонирования.

Типы дифференциально-алгебраических уравнений. Перечислим типы дифференциально-алгебраических уравнений. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) рассматриваются как частный случай дифференциально-алгебраических уравнений.

Замечание 5. Пусть $\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ — решение системы (1). Если матрица $\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ якобиана системы (1) неособая, то (1) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$. Далее в некоторых случаях будем использовать ОДУ и ДАУ применительно и к системам таких уравнений, если это не приводит к противоречию.

Линейное неявное дифференциально-алгебраическое уравнение имеет вид

$$\boldsymbol{A}(t)\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}(t) = 0,$$

где $\boldsymbol{A}(t)$ и $\boldsymbol{B}(t)$ — матрицы размера $n \times n$. Если эти матрицы постоянны, то имеем инвариантное во времени линейное неявное ДАУ.

Нелинейное неявное дифференциально-алгебраическое уравнение имеет вид

$$\boldsymbol{F}(\dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}, t) = 0,$$

где $\boldsymbol{F}$ содержит хотя бы одну нелинейную переменную — $\dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}$ или t.

В некоторых приложениях используются полуявные дифференциально-алгебраические уравнения. Такие уравнения имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, t), \ 0 = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, t), \quad (2)$$

где $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ и производные от $\boldsymbol{z}$ не входят в ДАУ. Напомним в связи с этим стандартную вход/выход модель

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}),$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор состояния, $\boldsymbol{u}$ — вход, $\boldsymbol{y}$ — выход. Имеется также модулярная версия этой модели [23].

Классификация дифференциально-алгебраических уравнений по их индексу. Ограничимся здесь полуявными ДАУ. Индексом (дифференциальным) ДАУ (2) называют по определению минимальное число дифференцирований системы, которые необходимо выполнить, чтобы привести ее к ОДУ.

Пример 1. Дифференцируя в (2) $\boldsymbol{g}$ по t, получаем систему

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial x}\dot{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial z}\dot{\boldsymbol{z}} = 0.$$

Если матрица $\dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial z}$ неособая, то система (2) преобразуется в систему ОДУ, следовательно, в этом случае индекс системы (2) равен единице. Если матрица $\dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial z}$ особая, то система (2) имеет индекс больше единицы. Как правило, чем выше индекс системы, тем сложнее решить ее численными методами. Лагранжевы уравнения первого рода (см. ниже) являются примером ДАУ с индексом, равным трем.

Пример 2. Рассмотрим механическую систему с n пространственными координатами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и n координатами скоростей $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)^{\mathrm{T}} = \dot{\boldsymbol{x}}$, у которой на движения наложено m голономных, функционально независимых связей $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0$, $\nabla \boldsymbol{g} = (\nabla g_1, \ldots, \nabla g_m)^{\mathrm{T}}$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$ — градиент отображения $\boldsymbol{g}$. Пусть $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x})$ — положительно-определенная матрица масс данной механической системы. В этих обозначениях уравнения Лагранжа первого рода имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}, \; \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) + \boldsymbol{\lambda} \nabla \boldsymbol{g}, \; \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0,$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — вектор множителей Лагранжа. Можно проверить, что индекс этой системы равен трем.

3. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Рассмотрим дифференцируемое многообразие M, его касательное расслоение T_M и соответствующие им алгебраические и дифференциальные структуры, следуя [24, 25]. Пусть M — дифференцируемое многообразие и T_M — его касательное расслоение. Векторным полем на M называют отображение $X: M \to T_M$, удовлетворяющее условию $\pi \circ X = id_M$, где π — естественная проекция $T_M \to M$. Для точки $\boldsymbol{x}$ на M значение $X_{\boldsymbol{x}}$ лежит в касательном пространстве $T_{M,\boldsymbol{x}} = \pi^{-1}(\boldsymbol{x})$ к M в этой точке; $X_{\boldsymbol{x}}$ называют сечениями касательного расслоения T_M. Наиболее часто используются два метода определения касательного расслоения: 1) с помощью пучка гладких функций на M; 2) с применением пространства гладких путей в M. Локально оба определения приводят к одному и тому же касательному расслоению. Так как в разд. 1 применялся метод 1 для построения бесконечно малых окрестностей в более общем контексте схем, используем этот же метод, но применительно к гладким многообразиям. Пусть $m_{\boldsymbol{x}}$ — идеал пучка гладких функций на M, обращающихся в ноль в точке $\boldsymbol{x}$. Тогда двойственным к фактор-пространству m_x / m_x^2 является касательное пространство $T_{\boldsymbol{x}}$ в точке $\boldsymbol{x}$ на M. Использование топологии, применяемой при определении дифференцируемого многообразия, позволяет склеить из касательных пространств $T_{\boldsymbol{x}}$ касательное расслоение T_M. В методе 2 используется бесконечномерное пространство Ω гладких путей на M. Не повторяя известного построения касательного расслоения, продолжим применение данного метода для определения динамической системы на многообразии. На самом деле, метод 2 позволяет задавать динамические системы на компактных многообразиях (и часто не только на них). Определим отображение

$$\phi: M \times \mathbb{R} \to M$$

такое, что $\phi(\boldsymbol{x}_0, t) = l_{\boldsymbol{x}_0}(t)$, где $l_{\boldsymbol{x}_0}$ — глобальное решение для векторного поля X через точку $\boldsymbol{x}_0$. Если положить $\phi_t(\boldsymbol{x}) = l_{\boldsymbol{x}}(t)$, то $\phi_t: M \to M$ удовлетворяет равенству

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}: M \to M$$

для всех $s, t \in \mathbb{R}$, $\phi_0 = id_M$, так как $\phi_0(\boldsymbol{x}) = l_{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{x}$. Отображение ϕ, которое является диффеоморфизмом на M, называют потоком на M. Поток ϕ — математическая модель динамической системы на M. Если ϕ_t — динамическая система на C^∞-дифференцируемом многообразии M, $\dfrac{d\phi_t(\boldsymbol{x})}{dt} = X_{\boldsymbol{x}}$ определяет

C^{∞}-векторное поле на M. В связи с этим об X говорят иногда как о динамической системе.

Лагранжева динамическая система. Пусть $L: T_M \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция. Отображение $\gamma: \mathbb{R} \to M$ называют движением в лагранжевой системе, включающей конфигурационное пространство (многообразие) M и функцию Лагранжа L, если γ — экстремаль функционала

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\gamma}) dt,$$

где $\dot{\gamma}$ — вектор скорости, $\dot{\gamma}(t) \in T_{M,\gamma(t)}$. Известно следующее утверждение.

Предложение [24, 25]. Пусть M — конфигурационное многообразие с функцией Лагранжа $L(q, \dot{q}): T_M \to \mathbb{R}$, где $L(q, \dot{q})$ — выражение, представляющее L через координаты q и $\dot{q}$ на касательном расслоении T_M. Тогда изменение локальных координат $q = (q_1, \ldots, q_n)$ точки кривой $\gamma(t)$ при движении в лагранжевой системе на M удовлетворяет уравнениям Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$.

4. ЭЛЕМЕНТЫ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ

Рассмотрим задачу определения оптимального пути (траектории) из начального положения, которым является некоторое начальное подмногообразие $\mathcal{M}_0$, в некоторое конечное положение, представляемое подмногообразием достижения (конечным подмногообразием) $\mathcal{M}_1$. Напомним два известных класса задачи теории оптимального управления. Первый класс задач можно представить системами дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)), \quad i = 1, \ldots, n,$$

с целевым функционалом

$$J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) dt.$$

Второй класс представляет задачи неявного оптимального управления [23] и задается системами вида

$$A\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{y}} \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} + C\boldsymbol{u},$$

где $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ и матрица A имеет ранг n. Пусть управляющие переменные $(u_1, \ldots, u_m)$ изменяются в некотором замкнутом ограниченном множестве $U \subset \mathbb{R}^m$. Пусть функции $f_0(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), f_1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \ldots, f_n(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))$ и их частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ являются непрерывными функциями при $t_0 \le t \le t_1$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in U$. Допустимые управления $u_1(t), \ldots, u_m(t)$ — кусочно-непрерывные функции при $t_0 \le t \le t_1$. Принцип максимума Понтрягина [26, 27] дает необходимые условия экстремума. В случае оптимального по времени управления $f_0(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 1$, $J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = t_1 - t_0$. Функция Понтрягина имеет вид $H = \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 + \ldots + \psi_n f_n$. Оптимальные траектории лежат на подмногообразии $\mathcal{M} = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{u}) \left| \frac{\partial H}{\partial u_i} = 0, i = 1, \ldots, m \right. \right\}$. Рассмотрим, следуя [27], простой пример оптимального по времени управления.

Пример 3. Пусть управляемая система задана уравнением

$$\ddot{x} = u, \tag{3}$$

где u — управляющая переменная, $|u| \le 1$. Уравнение (3) эквивалентно линейной системе

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = u. \tag{4}$$

Задача оптимального управления: для данной начальной точки (α, β) найти такое оптимальное управление, которое переводит систему из (α, β) в начало координат (0, 0) за минимальное время. В рассматриваемом простом случае многообразием является фазовая плоскость, начальным многообразием — начальная точка (α, β), а конечным многообразием — точка (0, 0). Здесь функцией Понтрягина является $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u$. Функции ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют системе

$$\dot{\psi}_1 = 0, \ \dot{\psi}_2 = -\psi_1.$$

Таким образом,

$$\max_{|u| \le 1} H = \psi_1 x_2 + \max_{|u| \le 1} \psi_2 u = \psi_1 x_2 + |\psi_2|.$$

Это показывает, что оптимальное управление $u(t)$ — кусочно-непрерывная функция, которая принимает значения ± 1. Так как $\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_2$, все оптимальные траектории лежат в гиперплоскости $\psi_2 = 0$ пятимерного пространства с координатами $(x_1, x_2, \psi_1, \psi_2, u)$. Если $u = 1$, то из уравнения (4) получаем $x_2 = t + a$, $x_1 = \frac{t^2}{2} + at + b$ и фазовая траектория имеет вид $FC1 : x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 + c$. Если $u = -1$, то фазовая траектория имеет вид $FC2 : x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2 + d$.

Пусть C — кривая вида $x_1 = \frac{1}{2} x_2^2$, если $x_2 \le 0$; $x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2$, если $x_2 \ge 0$. Если $(\alpha, \beta) \in C$, то $u = 1$ при $\beta \ge 0$; $u = -1$ при $\beta \le 0$. Если точка (α, β) находится выше кривой C, то сначала $u(t) = -1$ и точка движется вдоль $FC2$ до точки пересечения с кривой C. Затем $u(t) = 1$ и точка движется вдоль C до начала координат. Случай, когда точка (α, β) находится ниже кривой C, рассматривается симметрично приведенному выше. Из теоремы 7 работы [26] следует, что только такие траектории оптимальны.

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ

Важный класс динамических систем на многообразиях представляют интегрируемые модели. В качестве примера приведем интегрируемые модели на эллиптических кривых. Такие модели связаны с функциями Вейерштрасса $\wp$, которые имеют много приложений в анализе, радиоэлектронике, интегрируемых системах (солитоны) и в других областях, представляющих практический и теоретический интерес. Известно, что функция Вейерштрасса $\wp$ и ее производная $\wp'$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - 60 c_2 \wp - 140 c_3.$$

Опишем кратко более общий класс интегрируемых моделей — математических моделей, допускающих формулировку по Лаксу [25, 28]:

$$\dot{L}(z) = [M(z), L(z)]. \tag{5}$$

Здесь $M(z)$, $L(z)$ — матричнозначные функции от формальной переменной z, матричные элементы которых — функции на фазовом пространстве модели. Уравнение (5) эквивалентно следующим уравнениям $\dot{\Psi} = M(z)\Psi(z)$:

$$L(z)\Psi(z) = \lambda\Psi(z). \tag{6}$$

Спектральная кривая S определяется посредством уравнения $\det(L(z)-\lambda)=0$. Линейную задачу (6) можно интерпретировать как способ задания линейного расслоения на спектральной кривой. Пространство всех линейных расслоений параметризуется якобиевым многообразием спектральной кривой S.

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

Исследование динамики процессов, включая динамику информационных процессов, приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений на алгебраических многообразиях. Рассмотрим случай эллиптических кривых. Такие кривые используются в криптографии, в ряде инженерных задач. Не менее важные приложения находят алгебраические кривые рода больше 1, их якобианы и более общие абелевы многообразия. Особенно интересен случай, когда алгебраическое многообразие изменяется в семействе подобных многообразий. Напомним известный пример. Пусть $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ — лежандрово семейство эллиптических кривых над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с $\lambda \in \mathbb{C} - \{0,1\}$. Дифференциальное уравнение Пикара–Фукса кодирует много свойств такого семейства эллиптических кривых. Ниже приводим для произвольного поля k ряд аспектов теории дифференциальных уравнений на алгебраических многообразиях, следуя идеям и результатам Б. Дворка, А. Гротендика, П. Делиня, П. Гриффитса, Ю.И. Манина, Н. Катца [29], монографиям [14, 15], а также статьям [30–32].

Связности на когерентных пучках гладких схем. Пусть S/k — гладкая схема над полем k, U — некоторый элемент открытого покрытия S, O_S — структурный пучок на S, $\Gamma(U, O_S)$ — сечение O_S на U. Для одномерного пучка ростков дифференциалов $\Omega^1_{S/k}$ и когерентного пучка $\mathcal{F}$ на S связностью на пучке $\mathcal{F}$ называют гомоморфизм пучков

$$\nabla : \mathcal{F} \to \Omega^1_{S/k} \otimes \mathcal{F}$$

такой, что если $f \in \Gamma(U, O_S)$, $g \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, то $\nabla(fg) = f\nabla(g) + df \otimes g$. Если применить понятие касательного пучка $\Theta^1_{S/k}$, использованного в разд. 1, а также элемента $\partial \in \Gamma(U, \Theta^1_{S/k})$, то можно дать двойственное, в смысле двойственности пучков $\Omega^1_{S/k}$ и $\Theta^1_{S/k}$, определение связности на локально свободном пучке $\mathcal{F}$. А именно, связность есть гомоморфизм $\rho : \Theta^1_{S/k} \to End_{O_S}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ такой, что $\rho(\partial)(fg) = \partial(f)g + f\rho(\partial)$.

Интегрирование связности. Напомним, что коцепным комплексом

$$(K^{\blacksquare}, d) = \{K^0 \xrightarrow{d} K^1 \xrightarrow{d} K^2 \xrightarrow{d} \cdots\}$$

в категории абелевых групп называют последовательность абелевых групп и морфизмов $d : K^p \to K^{p+1}$ таких, что $d \circ d = 0$. Пусть $\Omega^i_{S/k}$ — пучок ростков i-дифференциалов, $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на S, $\nabla^i(\alpha \otimes f) = d\alpha \otimes f + (-1)^i \alpha \wedge \wedge\nabla(f)$, где $\alpha \in \Omega^i_{S/k}$. Тогда гомоморфизмы ∇, ∇^i определяют последовательность гомоморфизмов

$$\mathcal{F} \to \Omega^1_{S/k} \otimes \mathcal{F} \to \Omega^2_{S/k} \otimes \mathcal{F} \to \cdots \qquad (7)$$

Связность интегрируема, если (7) — комплекс. Следующее утверждение может быть выведено на основе методов, представленных в [14, 15].

Предложение 3. Данные утверждения эквивалентны: а) связность ∇ интегрируема; б) $K = \nabla \circ \nabla^1 = 0$; в) ρ — гомоморфизм алгебр Ли пучков алгебр Ли.

Пример 4. Пусть $\mathcal{F} = O_S$, т.е. пучок $\mathcal{F}$ — структурный пучок на схеме S. Тогда $\nabla : O_S \to \Omega^1_{S/k} \otimes O_S \approx \Omega^1_{S/k}$, откуда $\nabla(f) = df$. Эта связность интегрируема, так как оператор внешнего дифференцирования d определяет комплекс де Рама: $O_S \to \Omega^1_{S/k} \otimes O_S \to \Omega^2_{S/k} \otimes O_S \to \ldots$

Относительный случай. Более общо, пусть X, S — гладкие схемы над полем k, $f : X \to S$ — гладкий морфизм схем. В этом случае существует комплекс де Рама относительных дифференциалов: $\Omega^{\blacksquare}_{X/S} : O_X \to \Omega^1_{X/S} \to \Omega^2_{X/S} \to \ldots$ Существует также точная последовательность комплексов

$$0 \to f^*(\Omega^{\blacksquare}_S) \to \Omega^{\blacksquare}_X \to \Omega^{\blacksquare}_{X/S} \to 0, \qquad (8)$$

и в этой ситуации существует интегрируемая связность Гаусса–Манина. Ниже используем понятия абелевого пучка, под которым понимаем пучок абелевых групп, производного функтора, категории комплексов, пучка когомологий де Рама, определения и свойства которых приведены в [14, 15, 29, 30]. Пусть $R^0 f_*$ — функтор из категории комплексов абелевых пучков на X в категорию комплексов абелевых пучков на S, $R^i f_*$ — гиперпроизводный функтор функтора $R^0 f_*$. Обозначим $\mathcal{H}^i_{DR}(X/S)$ пучок когомологий де Рама такой, что $\mathcal{H}^i_{DR}(X/S) = R^i f_* \Omega^{\blacksquare}_{X/S}$. Напомним, что $\mathcal{H}^i = \mathcal{H}^i_{DR} = R^i f_* \Omega^{\blacksquare}_{X/S}$; $\mathcal{H}^i_{DR}(X/S)$ называют расслоением Гаусса–Манина.

Пример 5. Пусть $k = \mathbb{C}$ — поле комплексных чисел. Для каждого $i \geq 0$ $\mathcal{H}^i_{DR}(X/S)$ — локально свободный когерентный алгебраический пучок на S, слой которого в каждой точке $s \in S$ — $\mathbb{C}$-векторное пространство $H^i(X_s, \mathbb{C})$, на котором существует связность Гаусса–Манина. Когомологии $\mathcal{H}^i_{DR}(X/S)$ интерпретируются как уравнения Пикара–Фукса, а $H^i(X_s, \mathbb{C})$ — как локальная система ростков решений этих уравнений.

Общее алгебраическое определение связности Гаусса–Манина использует комплекс дифференциалов (8) и фильтрацию $0 \to f^*(\Omega^i_S) \to \Omega^i_X \to \Omega^i_{X/S} \to 0$, $F^i(\Omega^n_X) := \mathrm{Im}(f^*(\Omega^i_S) \otimes \Omega^{n-i}_X \to \Omega^n_X)$. Пусть $gr^i = F^i / F^{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots$ Ниже под размерностью коммутативных колец понимается их алгебраическая размерность.

Пример 6. Пусть $f : X \to S$, $S = Spec\, B$, $X = Spec\, A$, — морфизм аффинных гладких схем над полем k, размерности колец: $\dim B = 1$, $\dim A = 2$; $\mathcal{H}^r_{DR}(X/S) = \mathcal{H}^r_{DR}(A/B)$. Пусть $\Omega^1_B = Bdt$, $r = 1$. Тогда $0 \to gr^1 \to F^0/F^2 \to$ $\to gr^0 \to 0$, где $F^0 = \Omega^{\blacksquare}_A$. Имеем: $F^1 = \Omega^1_B \otimes A \oplus \Omega^2_A$, $F^2 = 0$. Точная последовательность имеет вид $0 \to \Omega^1_B \otimes A \oplus \Omega^2_A \to \Omega^{\blacksquare}_A \to A \oplus \Omega^1_{A/B} \to 0$. Рассмотрим эллиптическую кривую $y^2 = x^3 + t$. В этом случае $B = k[t, t^{-1}]$, $A = \dfrac{B[x, y]}{y^2 - x^3 - t}$. Инвариантный дифференциал на кривой имеет вид $\omega = \dfrac{dx}{y}$. После вычислений с дифференциалами получаем дифференциальное уравнение Пикара–Фукса $\dfrac{d\omega}{dt} + \dfrac{1}{6t}\omega = 0$, описывающее, как инвариантный дифференциал варьируется в семействе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Научное наследие А.И. Кухтенко значительно богаче, чем выбранные направления, представленные в настоящей статье. Дан краткий обзор теории динамических систем с акцентом на их более широкое толкование в рамках динамических систем на многообразиях и схемах, причем над полями в любой характеристике. Рассмотрены вопросы изменения многообразий и схем в семействе, т.е. вопросы их деформации. Исследованы бесконечно малые окрестности и инфинитезимальные деформации многообразий (схем) на основе алгебр дуальных чисел над произвольными коммутативными кольцами. Над коммутативными кольцами определены алгебры бикватернионов (дуальных кватернионов). Кратко представлены теория дифференциально-алгебраических уравнений над полем вещественных чисел и их динамика, а также элементы оптимизации траекторий соответствующих динамических систем. На основе теории связности в расслоениях дано расширение теории дифференциально-алгебраических уравнений на алгебраические многообразия и схемы над произвольными полями и над схемами соответственно. Связности в расслоениях над алгебраическими многообразиями и схемами над полями позволяют представлять и исследовать соответствующие интегрируемые модели, а также использовать их в теории обработки сигналов и в криптографии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кухтенко А.И. О построении абстрактной теории систем // Кибернетика и вычислительная техника. — 1980. — Вып. 47. — С. 3–10.
2. Кухтенко А.И. Шестая проблема Д. Гильберта в механике и теории управления // Кибернетика и вычислительная техника. — Киев, 1985. — 523 с. — (Препр. /АН УССР. Ин-т кибернетики; 85-37).
3. Кухтенко А.И. Основные направления развития теории управления сложными системами // Сложные системы управления. — Киев: Наук. думка, 1968. — Вып. 4. — С. 6–24.
4. Сложные системы управления: Сб. статей / Отв. ред. акад. А.И. Кухтенко. — Киев: Наук. думка, 1988. — Вып. 23. — 112 с.
5. Кривонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А. Динамические игры с разрывными траекториями. — Киев: Наук. думка, 2005. — 220 с.
6. Kharchenko V., Kuzmenko N. Minimization of unmanned aierial vehicle trajectory deviation during the complicated obstacles overfly // Proc. of the National Aviation University. — Kyiv, 2012. — N 2 (51). — P. 70–76.
7. Kharchenko V., Wang Bo, Grekhov A., Bezsmertna D. Investigation of modulation scheme and transmitter nonlinearity impact on ADS-B messages transmission via OFDM satellite link // Proc. of the NAU. — 2014. — N 3(60). — P. 7–14.

8. Kharchenko V.P., Kulyk M.S., Matiychuk M.P. Justification of thrust vector deflection of twin-engine unmanned aerial vehicle power plants // Aviation. — 2011. — **15**, N 1. — P. 25–29.

9. Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г. Волновые гиперболические модели распространения возмущений. — Киев: Наук. думка, 2015. — 171 с.

10. Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г. Математические методы в задачах распространения и дифракции волн. — Киев: Наук. думка, 2012. — 232 с.

11. Study E. Geometrie der Dynamen. — Leipzig: Teubner, 1903. — 265 p.

12. Бляшке В. Дифференциальная геометрия. — М.: ОНТИ, 1935. — 430 с.

13. v. Mises R. Anwendung der Motorrechnung // Z. Angew. Math. Mech. — 1924. — **4.** — P. 193–213.

14. Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — Т. 1, 2.

15. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. — М.: Мир, 1981. — 510 с.

16. Котельников А.П. Винтовое исчисление и некоторые его приложения к геометрии и динамике. — Изд. 2, стереотип. — М.: КомКниги, 2006. — 224 с.

17. Clifford W. Mathematical papers. — London: Macmillan, 1882. — 521 p.

18. Глушков В.М. Абстрактная теория автоматов // Успехи мат. наук. — 1961. — **16**, вып. 5 (101). — С. 3–62.

19. Scheurer T. Tocher’s principle of modeling: Practical significance and mathematical implications // J. Oper. Res. Soc. — 1984. — **32.** — P. 195–207.

20. Глазунов Н.М. Опыт применения диалоговой системы программирования в математических исследованиях // Управляющие системы и машины. — 1974. — № 6. — С. 70–72.

21. Glazunov N. Categorification of Fourier transforms, efficient computation and computing intelligence // Nuclear Instruments & Methods in Physics Research, Section A. — 2004. — **534.** — P. 324–328.

22. Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. Numerical solutions of initial value problems in differential-algebraic equations. — Amsterdam: North-Holland, 1996. — 251 p.

23. Ericsson L., Söderlind G., Bring A. Numerical methods for the simulation of modular dynamical systems. — Stockholm: Royal Inst. of Thechnology, 1992. — 68 p.

24. Арнольд И.В. Математические методы классической механики. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 472 с.

25. Bifurcations and periodic orbits of vector fields / Ed. by D. Schlomiuk. — Berlin; Montreal: Kluwer Acad. Publ. (Netherland), 1993. — 472 p.

26. Pontryagin L.S. Optimal’nye protsessy regulirovaniya // Proc. of the Intern. Congress of Mathematicians. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1960. — P. 182–202.

27. Isaev V.K., Leitman G. Pontryagin’s maximum principle and aerospace research // Intern. Conf. Differential Equations and Topology. — M.: Steklov Math. Institute RAS, Lomonosov Moscow State Univ., 2008. — P. 255–256.

28. Lax P. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Commun. Pure Appl. Math. — 1968. — **21**, N 5. — P. 467–490.

29. Katz N. G2 and hypergeometric sheaves // Finite Fields Appl. — 2007. — **13**, N 2. — P. 175–223.

30. Kedlaya K., Tuitman J. Effective convergence bounds for Frobenius structures on connections // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 2012. — **128.** — P. 7–16.

31. Glazunov N.M. Quadratic forms, algebraic groups and number theory // Чебышевский сборник. Науч.-теорет. журн. Посвящается 75-летию академика В.П. Платонова. — 2015. — **16**, вып. 4 (56). — С. 77–89.

32. Glazunov N.M. Extremal forms and rigidity in arithmetic geometry and in dynamics // Чебышевский сборник. Науч.-теорет. журн. Посвящается столетию со дня рождения профессора А.Б. Шидловского. — 2015. — **16**, вып. 3 (55). — С. 124–146.

Надійшла до редакції 18.01.2016

Ю.Г. Кривонос, В.П. Харченко, М.М. Глазунов

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНІ РІВНЯННЯ І ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ НА МНОГОВИДАХ

Анотація. Розглянуто актуальні проблеми сучасної теорії динамічних систем на многовидах, які активно розвиваються на цей час. Наведено стислий огляд таких напрямів теорії динамічних систем. З використанням алгебр дуальних чисел, кватерніонних алгебр, алгебр бікватерніонів (дуальних кватерніонів) розроблено застосунки до дослідження нескінченно малих околиць та інфінітезимальних деформацій многовидів (схем). Стисло наведено теорію диференціально-алгебраїчних рівнянь над полем дійсних чисел та їхню динаміку, а також елементи оптимізації траєкторій відповідних динамічних систем. На основі зв'язності в розшаруваннях наведено розширення теорії диференціально-алгебраїчних рівнянь на алгебраїчні многовиди і схеми над довільними полями і схемами відповідно.

Ключові слова: дуальне число, дуальний кватерніон, кватерніонна алгебра, алгебраїчний многовид, схема, деформація, диференціально-алгебраїчне рівняння, математична модель, динамічна система, диференціальне рівняння на алгебраїчному многовиді.

Iu.G. Kryvonos, V.P. Kharchenko, N.M. Glazunov

DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS AND DYNAMICAL SYSTEMS ON MANIFOLDS

Abstract. The authors consider actual problems of the modern theory of dynamical systems on manifolds, which are being actively developed. A brief review of the fields of the theory of dynamical systems is given. The results of the algebra of dual numbers, quaternionic algebra, biquaternions (dual quaternion) and their application to the study of infinitesimal neighborhoods and infinitesimal deformations of varieties (schemes) are presented. Summarized the theory of differential-algebraic equations over the field of real numbers and their dynamics, as well as relevant elements of trajectory optimization of dynamic systems. On the basis of the connection in the bundles, an extension of the theory of differential-algebraic equations to algebraic manifolds and schemes over, arbitrary fields and schemes, respectively, is given.

Keywords: dual number, dual quaternion, motor, quaternionic algebra, algebraic manifold, scheme, deformation, differential-algebraic equation, mathematical model, dynamical system, differential equation on algebraic manifold.

Кривонос Юрий Георгиевич,
академик НАН Украины, профессор, заместитель директора Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: aik@public.icyb.kiev.ua.

Харченко Владимир Петрович,
доктор техн. наук, профессор, исполняющий обязанности ректора Национального авиационного университета, Киев, e-mail: kharch@nau.edu.ua.

Глазунов Николай Михайлович,
доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, профессор Национального авиационного университета, Киев, e-mail: glanm@yahoo.com.