УДК 519.21

К.Ю. ЖЕРНОВЫЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУХКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЭРЛАНГОВСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Аннотация. Предложен метод исследования систем обслуживания $M/E_2/2/m$ и $M/E_2/2/\infty$ — стандартных систем, а также систем с пороговой и гистерезисной стратегиями случайного отбрасывания заявок в целях управления входящим потоком. Получены рекуррентные соотношения для вычисления стационарного распределения числа заявок в системе и стационарных характеристик. Построенные алгоритмы проверены на примерах с использованием имитационных моделей, созданных с помощью инструментальных средств GPSS World.

Ключевые слова: двухканальная система обслуживания, простейший входящий поток, эрланговское распределение времени обслуживания, случайное отбрасывание заявок, метод фиктивных фаз, рекуррентные соотношения.

ВВЕДЕНИЕ

Определение стационарных характеристик систем обслуживания типа M/G/n/m и $M/G/n/\infty$ с числом каналов $n>1$ значительно усложняется по сравнению с одноканальными системами. В настоящее время не существует аналитических методов исследования многоканальных систем указанных типов, которые позволяли бы находить для них стационарные показатели производительности в приемлемом для анализа виде. Одно из немногих исключений представляет система $M/D/n/\infty$, для которой можно получить некоторые характеристики, связанные с числом заявок в системе [1].

Для исследования одноканальных систем с эрланговскими распределениями, в частности системы $M/E_S/1/\infty$ [1], используется метод фиктивных фаз, разработанный Эрлангом [2]. Для эрланговского распределения порядка s времени обслуживания предполагается, что каждая заявка последовательно проходит s фаз обслуживания, длительности которых распределены по показательным законам с параметрами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ соответственно.

Цель настоящей статьи — построение с помощью метода фиктивных фаз рекуррентных алгоритмов для вычисления стационарного распределения числа заявок в двухканальных системах обслуживания $M/E_2/2/m$ и $M/E_2/2/\infty$, а также в соответствующих системах с пороговыми и гистерезисными стратегиями случайного отбрасывания заявок. Случайное отбрасывание заявок применяется в системах обслуживания в целях предотвращения перегрузок, когда каждая поступающая заявка может быть отброшена с определенной вероятностью, зависящей от длины очереди в момент поступления заявки, даже если буфер еще полностью не заполнен [3–8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ СИСТЕМ $M/E_2/2/m$ И $M/E_2/2/\infty$

Рассмотрим систему $M/E_2/2/m$, где m — максимальное число заявок, которые одновременно могут находиться в очереди. Входящий поток заявок — простейший, т.е. интервалы времени между моментами прибытия соседних по времени заявок являются независимыми случайными величинами, показательно распределенными с параметром λ. Время обслуживания каждой заявки распределено согласно обобщенному закону Эрланга второго порядка, т.е. представляет сумму двух независимых случайных величин, показательно распределенных с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно.

На основании метода фаз введем следующие обозначения для состояний системы: s_0 — в системе нет заявок; s_{111} — в системе одна заявка, занят один канал, который осуществляет обслуживание в первой фазе; s_{112} — в системе одна заявка, занят один канал, обслуживание во второй фазе; s_{k11} — в системе k заявок $(2 \le k \le m+2)$, занято два канала, которые осуществляют обслуживание в первой фазе; s_{k12} — в системе k заявок $(2 \le k \le m+2)$, занято два канала, одна заявка пребывает на первой фазе обслуживания, другая — на второй; s_{k22} — в системе k заявок $(2 \le k \le m+2)$, занято два канала, которые осуществляют обслуживание во второй фазе. Стационарные вероятности пребывания системы в каждом перечисленном состоянии обозначим $p_0, p_{111}, p_{112}, p_{k11}, p_{k12}, p_{k22}$ соответственно $(2 \le k \le m+2)$. Для определения этих вероятностей получим систему уравнений:

$$
\begin{gathered}
-\lambda p_0 + \mu_2 p_{112} = 0, \\
-(\lambda + \mu_2) p_{112} + \mu_1 p_{111} + 2\mu_2 p_{222} = 0, \\
-(\lambda + 2\mu_2) p_{222} + \mu_1 p_{212} = 0, \\
-(\lambda + \mu_1) p_{111} + \lambda p_0 + \mu_2 p_{212} = 0;
\end{gathered} \tag{1}
$$

$$
-(\lambda + 2\mu_1) p_{k11} + \lambda p_{k-1,11} + \mu_2 p_{k+1,12} = 0, \; 2 \le k \le m+1; \tag{2}
$$

$$
-(\lambda + \mu_1 + \mu_2) p_{k12} + \lambda p_{k-1,12} + 2\mu_1 p_{k11} + 2\mu_2 p_{k+1,22} = 0, \; 2 \le k \le m+1; \tag{3}
$$

$$
-(\lambda + 2\mu_2) p_{k22} + \lambda p_{k-1,22} + \mu_1 p_{k12} = 0, \; 3 \le k \le m+1; \tag{4}
$$

$$
\begin{gathered}
-2\mu_1 p_{m+2,11} + \lambda p_{m+1,11} = 0, \\
-(\mu_1 + \mu_2) p_{m+2,12} + \lambda p_{m+1,12} + 2\mu_1 p_{m+2,11} = 0, \\
-2\mu_2 p_{m+2,22} + \lambda p_{m+1,22} + \mu_1 p_{m+2,12} = 0;
\end{gathered} \tag{5}
$$

$$
p_0 + p_{111} + p_{112} + \sum_{k=2}^{m+2} (p_{k11} + p_{k12} + p_{k22}) = 1. \tag{6}
$$

Введем обозначения

$$
\alpha_i = \frac{\lambda}{\mu_i}, \; i = 1,2; \; \eta = \frac{\mu_2}{\mu_1}; \; \tilde{p}_{k11} = \frac{p_{k11}}{p_0}, \; \tilde{p}_{k12} = \frac{p_{k12}}{p_0}, \; 1 \le k \le m+2;
$$
$$
\tilde{p}_{k22} = \frac{p_{k22}}{p_0}, \; 2 \le k \le m+2,
$$

и с помощью уравнений (1) находим

$$
\begin{gathered}
\tilde{p}_{112} = \alpha_2, \; \tilde{p}_{222} = \frac{\alpha_2 (\alpha_1 \alpha_2 + \eta \alpha_2 + \eta^{-1} \alpha_1)}{\alpha_1 + 2\eta \alpha_2 + 2\eta + 2}, \\
\tilde{p}_{111} = \alpha_2 (\alpha_1 + \eta) - 2\eta \tilde{p}_{222}, \; \tilde{p}_{212} = (\alpha_1 + 2\eta) \tilde{p}_{222}.
\end{gathered} \tag{7}
$$

Из уравнений (2)–(4) получаем рекуррентные соотношения

$$\tilde p_{k22}=f_{22}(\tilde p_{k-1,22},\tilde p_{k-2,11},\tilde p_{k-2,12},\tilde p_{k-1,12}),\ 3\le k\le m+1;$$

$$\tilde p_{k12}=f_{12}(\tilde p_{k22},\tilde p_{k-1,22}),\ 3\le k\le m+1;$$

$$\tilde p_{k11}=f_{11}(\tilde p_{k12},\tilde p_{k-1,12},\tilde p_{k+1,22}),\ 2\le k\le m+1, \qquad (8)$$

где

$$f_{22}(x,\ y,z,u)=\frac{2\alpha_1 x-2\alpha_2 y-(\alpha_2+2\eta^{-1})(\alpha_1 z-(\alpha_1+\eta+1)u)}{2(\alpha_1+\eta\alpha_2+2\eta+2)};$$

$$f_{12}(x,\ y)=(\alpha_1+2\eta)x-\alpha_1 y;$$

$$f_{11}(x,\ y,z)=\frac{\alpha_1+\eta+1}{2}x-\frac{\alpha_1}{2}y-\eta z.$$

С помощью уравнений (5) находим

$$\tilde p_{m+2,12}=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+2\eta+2}((\eta\alpha_2+\eta+3)\tilde p_{m+1,12}-\eta\alpha_2(\tilde p_{m12}+\tilde p_{m+1,22})),$$

$$\tilde p_{m+2,22}=\frac{\alpha_2}{2}\tilde p_{m+1,22}+\frac{1}{2\eta}\tilde p_{m+2,12},\quad \tilde p_{m+2,11}=\frac{\alpha_1}{2}\tilde p_{m+1,11}. \qquad (9)$$

Рекуррентные соотношения (7)–(9) позволяют последовательно вычислять $\tilde p_{k11}$, $\tilde p_{k12}$, $1\le k\le m+2$; $\tilde p_{k22}$, $2\le k\le m+2$. Используя условие нормировки (6), можно определить стационарные вероятности по формулам

$$p_0=(1+\tilde p_{111}+\tilde p_{112}+\sum_{k=2}^{m+2}(\tilde p_{k11}+\tilde p_{k12}+\tilde p_{k22}))^{-1};$$

$$p_{k11}=p_0\tilde p_{k11},\ p_{k12}=p_0\tilde p_{k12},\ 1\le k\le m+2;\ p_{k22}=p_0\tilde p_{k22},\ 2\le k\le m+2;$$

$$p_1=p_{111}+p_{112};\ p_k=p_{k11}+p_{k12}+p_{k22},\ 2\le k\le m+2, \qquad (10)$$

где p_k — стационарная вероятность наличия в системе k заявок.

Стационарные характеристики системы M/E$_2$/2/m: вероятность обслуживания поступившей заявки (относительную пропускную способность системы) $\mathbf{P}_{\text{sv}}$, среднюю длину очереди $\mathbf{E}(Q)$ и среднее время ожидания $\mathbf{E}(W)$ находим по формулам:

$$\mathbf{P}_{\text{sv}}=1-p_{m+2},\ \mathbf{E}(Q)=p_3+\sum_{k=4}^{m+2}(k-2)p_k,\ \mathbf{E}(W)=\frac{\mathbf{E}(Q)}{\lambda\mathbf{P}_{\text{sv}}}. \qquad (11)$$

Для системы M/E$_2$/2/∞ ограничение на длину очереди отсутствует, поэтому система уравнений для стационарных вероятностей $p_0, p_{111}, p_{112}, p_{k11}, p_{k12}$, p_{k22} $(k\ge 2)$ принимает вид

$$-\lambda p_0+\mu_2 p_{112}=0,$$

$$-(\lambda+\mu_2)p_{112}+\mu_1 p_{111}+2\mu_2 p_{222}=0,$$

$$-(\lambda+2\mu_2)p_{222}+\mu_1 p_{212}=0,$$

$$-(\lambda+\mu_1)p_{111}+\lambda p_0+\mu_2 p_{212}=0;$$

$$-(\lambda+2\mu_1)p_{k11}+\lambda p_{k-1,11}+\mu_2 p_{k+1,12}=0,\ k\ge 2;$$

$$-(\lambda+\mu_1+\mu_2)p_{k12}+\lambda p_{k-1,12}+2\mu_1 p_{k11}+2\mu_2 p_{k+1,22}=0,\ k\ge 2;$$

$$-(\lambda+2\mu_2)p_{k22}+\lambda p_{k-1,22}+\mu_1 p_{k12}=0,\ k\ge 2; \qquad (12)$$

$$p_0 + p_{111} + p_{112} + \sum_{k=2}^{\infty} (p_{k11} + p_{k12} + p_{k22}) = 1. \qquad (13)$$

Для существования стационарного распределения числа заявок в системе M/E$_2$/2/∞ должно выполняться условие $\rho = \frac{\lambda \mathbf{E}(T_{\text{sv}})}{2} < 1$, где $\mathbf{E}(T_{\text{sv}}) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}$ — среднее время обслуживания одной заявки.

Для решения системы уравнений (12), (13) используем равенства (7) и рекуррентные соотношения, следующие из (8),

$$\begin{gathered}\widetilde{p}_{k22} = f_{22}(\widetilde{p}_{k-1,22}, \widetilde{p}_{k-2,11}, \widetilde{p}_{k-2,12}, \widetilde{p}_{k-1,12}),\ k \geq 3;\\ \widetilde{p}_{k12} = f_{12}(\widetilde{p}_{k22}, \widetilde{p}_{k-1,22}),\ k \geq 3; \\ \widetilde{p}_{k11} = f_{11}(\widetilde{p}_{k12}, \widetilde{p}_{k-1,12}, \widetilde{p}_{k+1,22}),\ k \geq 2.\end{gathered} \qquad (14)$$

Рекуррентные соотношения (7), (14) позволяют последовательно вычислять $\widetilde{p}_{k11}$, $\widetilde{p}_{k12}$, $1 \leq k \leq N$; $\widetilde{p}_{k22}$, $2 \leq k \leq N$. Затем, записав условие нормировки (13) в виде

$$p_{0(N)} + p_{111(N)} + p_{112(N)} + \sum_{k=2}^{N} (p_{k11(N)} + p_{k12(N)} + p_{k22(N)}) = 1,$$

можно определить приближенные значения стационарных вероятностей с помощью равенств

$$p_{0(N)} = \left(1 + \widetilde{p}_{111} + \widetilde{p}_{112} + \sum_{k=2}^{N} (\widetilde{p}_{k11} + \widetilde{p}_{k12} + \widetilde{p}_{k22})\right)^{-1};$$

$$p_{k11(N)} = p_{0(N)} \widetilde{p}_{k11},\ \ p_{k12(N)} = p_{0(N)} \widetilde{p}_{k12},\ 1 \leq k \leq N;$$

$$p_{k22(N)} = p_{0(N)} \widetilde{p}_{k22},\ 2 \leq k \leq N; \qquad (15)$$

$$p_{1(N)} = p_{111(N)} + p_{112(N)};\ \ p_{k(N)} = p_{k11(N)} + p_{k12(N)} + p_{k22(N)},\ 2 \leq k \leq N.$$

Определим приближенные значения стационарных характеристик системы M/E$_2$/2/∞ — средней длины очереди $\mathbf{E}(Q)$ и среднего времени ожидания $\mathbf{E}(W)$:

$$\mathbf{E}(Q)_{(N)} = p_{3(N)} + \sum_{k=4}^{N} (k-2) p_{k(N)},\ \ \mathbf{E}(W)_{(N)} = \frac{\mathbf{E}(Q)_{(N)}}{\lambda}.$$

Значение N выбираем настолько большим, чтобы выполнялось одно из условий (или каждое условие), задающих точность определения стационарных вероятностей. Эти условия можно задать, например, в виде

$$p_{0(N)} < \varepsilon_1;\ \ p_{N(N)} < \varepsilon_2;\ \ \mathbf{E}(Q)_{(N)} - \mathbf{E}(Q)_{(N-1)} < \varepsilon_3.$$

Здесь ε_1, ε_2, ε_3 — положительные числа, задающие требуемую точность вычислений.

СИСТЕМЫ M/E$_2$/2/m И M/E$_2$/2/∞ С ПОРОГОВОЙ СТРАТЕГИЕЙ СЛУЧАЙНОГО ОТБРАСЫВАНИЯ ЗАЯВОК

Для системы обслуживания M/E$_2$/2/m рассмотрим стратегию случайного отбрасывания заявок согласно правилу: если в момент прибытия заявки число их в системе равно $n \in \{1, 2, \ldots, m+2\}$, то заявка принимается на обслуживание с вероятностью β_n $(0 < \beta_n \leq 1,\ \beta_{m+2} = 0)$ и получает отказ (отбрасывается) с вероятностью $1-\beta_n$. Ограничиваясь рассмотрением упрощенного варианта этой стратегии, зафиксируем пороговое значение h $(3 \le h \le m+1)$ и предположим, что $\beta_n = 1$ при $1 \le n \le h-1$ и $\beta_n = \beta$ $(0 < \beta < 1)$ при $h \le n \le m+1$. Интенсивность простейшего потока заявок, принимаемых на обслуживание в результате реализации случайного отбрасывания, равна $\widetilde{\lambda} = \lambda\beta$.

Система уравнений для определения стационарных вероятностей записывается в виде

$$\begin{gathered} -\lambda p_0 + \mu_2 p_{112} = 0, \\ -(\lambda+\mu_2) p_{112} + \mu_1 p_{111} + 2\mu_2 p_{222} = 0, \\ -(\lambda+2\mu_2) p_{222} + \mu_1 p_{212} = 0, \\ -(\lambda+\mu_1) p_{111} + \lambda p_0 + \mu_2 p_{212} = 0; \end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered} -(\lambda+2\mu_1) p_{k11} + \lambda p_{k-1,11} + \mu_2 p_{k+1,12} = 0,\ 2 \le k \le h-1; \\ -(\lambda+\mu_1+\mu_2) p_{k12} + \lambda p_{k-1,12} + 2\mu_1 p_{k11} + 2\mu_2 p_{k+1,22} = 0,\ 2 \le k \le h-1; \\ -(\lambda+2\mu_2) p_{k22} + \lambda p_{k-1,22} + \mu_1 p_{k12} = 0,\ 3 \le k \le h-1; \end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered} -(\widetilde{\lambda}+2\mu_1) p_{h11} + \lambda p_{h-1,11} + \mu_2 p_{h+1,12} = 0, \\ -(\widetilde{\lambda}+\mu_1+\mu_2) p_{h12} + \lambda p_{h-1,12} + 2\mu_1 p_{h11} + 2\mu_2 p_{h+1,22} = 0, \\ -(\widetilde{\lambda}+2\mu_2) p_{h22} + \lambda p_{h-1,22} + \mu_1 p_{h12} = 0; \end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered} -(\widetilde{\lambda}+2\mu_1) p_{k11} + \widetilde{\lambda} p_{k-1,11} + \mu_2 p_{k+1,12} = 0,\ h+1 \le k \le m+1; \\ -(\widetilde{\lambda}+\mu_1+\mu_2) p_{k12} + \widetilde{\lambda} p_{k-1,12} + 2\mu_1 p_{k11} + 2\mu_2 p_{k+1,22} = 0,\ h+1 \le k \le m+1; \\ -(\widetilde{\lambda}+2\mu_2) p_{k22} + \widetilde{\lambda} p_{k-1,22} + \mu_1 p_{k12} = 0,\ h+1 \le k \le m+1; \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} -2\mu_1 p_{m+2,11} + \widetilde{\lambda} p_{m+1,11} = 0, \\ -(\mu_1+\mu_2) p_{m+2,12} + \widetilde{\lambda} p_{m+1,12} + 2\mu_1 p_{m+2,11} = 0, \\ -2\mu_2 p_{m+2,22} + \widetilde{\lambda} p_{m+1,22} + \mu_1 p_{m+2,12} = 0; \end{gathered} \tag{20}$$

$$p_0 + p_{111} + p_{112} + \sum_{k=2}^{m+2} (p_{k11} + p_{k12} + p_{k22}) = 1. \tag{21}$$

С помощью уравнений (16) приходим к равенствам (7), а из уравнений (17) получаем рекуррентные соотношения

$$\begin{gathered} \widetilde{p}_{k22} = f_{22}(\widetilde{p}_{k-1,22}, \widetilde{p}_{k-2,11}, \widetilde{p}_{k-2,12}, \widetilde{p}_{k-1,12}),\ 3 \le k \le h-1; \\ \widetilde{p}_{k12} = f_{12}(\widetilde{p}_{k22}, \widetilde{p}_{k-1,22}),\ 3 \le k \le h-1; \\ \widetilde{p}_{k11} = f_{11}(\widetilde{p}_{k12}, \widetilde{p}_{k-1,12}, \widetilde{p}_{k+1,22}),\ 2 \le k \le h-1. \end{gathered} \tag{22}$$

Используя уравнения (16) при $k = h-1$, последнее уравнение из (19) при $k = h+1$ и уравнения (18), находим

$$\begin{gathered} \widetilde{p}_{h22} = \frac{2\alpha_1 \widetilde{p}_{h-1,22} - 2\alpha_2 \widetilde{p}_{h-2,11} - (\alpha_2 + 2\eta^{-1})(\alpha_1 \widetilde{p}_{h-2,12} - (\alpha_1 + \eta + 1)\widetilde{p}_{h-1,12})}{2(\widetilde{\alpha}_1 + \alpha_2\eta + 2\eta + 2)}; \\ \widetilde{p}_{h12} = (\widetilde{\alpha}_1 + 2\eta)\widetilde{p}_{h22} - \alpha_1 \widetilde{p}_{h-1,22}; \\ \widetilde{p}_{h11} = \frac{\eta(2\alpha_2 \widetilde{p}_{h-1,11} - 2\widetilde{\alpha}_1 \widetilde{p}_{h22} + (\widetilde{\alpha}_1 + 2\eta)((\widetilde{\alpha}_2 + \eta^{-1} + 1)\widetilde{p}_{h12} - \alpha_2 \widetilde{p}_{h-1,12}))}{2(\widetilde{\alpha}_1 + \widetilde{\alpha}_2\eta + 2\eta + 2)}; \\ \widetilde{p}_{h+1,22} = \frac{\widetilde{\alpha}_2\eta + \eta + 1}{2\eta}\widetilde{p}_{h12} - \frac{\alpha_2}{2}\widetilde{p}_{h-1,12} - \eta^{-1}\widetilde{p}_{h11}, \end{gathered} \tag{23}$$

где $\widetilde{\alpha}_i = \dfrac{\widetilde{\lambda}}{\mu_i}$, $i=1,2$. С помощью уравнений (19) и (20) получаем

$$\begin{aligned}
&\widetilde{p}_{k12} = g_{12}(\widetilde{p}_{k22}, \widetilde{p}_{k-1,22}),\ h+1 \le k \le m+1;\\
&\widetilde{p}_{k22} = g_{22}(\widetilde{p}_{k-1,22}, \widetilde{p}_{k-2,11}, \widetilde{p}_{k-2,12}, \widetilde{p}_{k-1,12}),\ h+2 \le k \le m+1;\\
&\widetilde{p}_{k11} = g_{11}(\widetilde{p}_{k12}, \widetilde{p}_{k-1,12}, \widetilde{p}_{k+1,22}),\ h+1 \le k \le m+1;
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{p}_{m+2,12} = \frac{\widetilde{\alpha}_1}{\widetilde{\alpha}_1 + 2\eta + 2}((\eta\widetilde{\alpha}_2 + \eta + 3)\widetilde{p}_{m+1,12} - \eta\widetilde{\alpha}_2(\widetilde{p}_{m12} + \widetilde{p}_{m+1,22})),\\
&\widetilde{p}_{m+2,22} = \frac{\widetilde{\alpha}_2}{2}\widetilde{p}_{m+1,22} + \frac{1}{2\eta}\widetilde{p}_{m+2,12},\ \widetilde{p}_{m+2,11} = \frac{\widetilde{\alpha}_1}{2}\widetilde{p}_{m+1,11},
\end{aligned} \tag{25}$$

где

$$g_{12}(x, y) = (\widetilde{\alpha}_1 + 2\eta)x - \widetilde{\alpha}_1 y;$$

$$g_{22}(x, y, z, u) = \frac{2\widetilde{\alpha}_1 x - 2\widetilde{\alpha}_2 y - (\widetilde{\alpha}_2 + 2\eta^{-1})(\widetilde{\alpha}_1 z - (\widetilde{\alpha}_1 + \eta + 1)u)}{2(\widetilde{\alpha}_1 + \eta\widetilde{\alpha}_2 + 2\eta + 2)};$$

$$g_{11}(x, y, z) = \frac{\widetilde{\alpha}_1 + \eta + 1}{2}x - \frac{\widetilde{\alpha}_1}{2}y - \eta z.$$

Рекуррентные соотношения (7), (22)–(25) позволяют последовательно вычислять $\widetilde{p}_{k11}$, $\widetilde{p}_{k12}$, $1 \le k \le m+2$; $\widetilde{p}_{k22}$, $2 \le k \le m+2$. Затем, используя условие нормировки (21), можно определить стационарные вероятности и стационарные характеристики очереди $\mathbf{E}(Q)$, $\mathbf{E}(W)$ по формулам (10) и (11). Выражение для стационарной вероятности обслуживания с учетом потери случайно отбрасываемых заявок принимает вид

$$\mathbf{P}_{\text{sv}} = \frac{2(1 - p_0) - p_1}{\alpha_2(\eta + 1)}. \tag{26}$$

Формула (26) представляет отношение среднего числа обслуженных заявок за единицу времени к интенсивности потока прибывающих заявок.

Для системы $M/E_2/2/\infty$, в которой применяется стратегия случайного отбрасывания заявок с одним порогом h, система уравнений для стационарных вероятностей $p_0, p_{111}, p_{112}, p_{k11}, p_{k12}$, p_{k22} $(k \ge 2)$ состоит из бесконечного числа уравнений. Для ее решения используются равенства (7), (22), (23) и рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned}
&\widetilde{p}_{k12} = g_{12}(\widetilde{p}_{k22}, \widetilde{p}_{k-1,22}),\ k \ge h+1;\\
&\widetilde{p}_{k22} = g_{22}(\widetilde{p}_{k-1,22}, \widetilde{p}_{k-2,11}, \widetilde{p}_{k-2,12}, \widetilde{p}_{k-1,12}),\ k \ge h+2;\\
&\widetilde{p}_{k11} = g_{11}(\widetilde{p}_{k12}, \widetilde{p}_{k-1,12}, \widetilde{p}_{k+1,22}),\ k \ge h+1.
\end{aligned} \tag{27}$$

Приближенные значения стационарных вероятностей можно определить по формулам (15). Для существования стационарных вероятностей должно выполняться условие $\widetilde{\rho} = \dfrac{\widetilde{\lambda}\mathbf{E}(T_{\text{sv}})}{2} < 1$. Приближенные значения стационарных характеристик находим по формулам

$$\mathbf{E}(Q)_{(N)} = p_{3(N)} + \sum_{k=4}^{N}(k-2)p_{k(N)},\ \mathbf{E}(W)_{(N)} = \frac{\mathbf{E}(Q)_{(N)}}{\lambda\mathbf{P}_{\text{sv}(N)}},$$

$$\mathbf{P}_{\text{sv}(N)} = \frac{2(1 - p_{0(N)}) - p_{1(N)}}{\alpha_2(\eta + 1)}. \tag{28}$$

СИСТЕМЫ M/E$_2$/2/m И M/E$_2$/2/∞ С ГИСТЕРЕЗИСНОЙ СТРАТЕГИЕЙ СЛУЧАЙНОГО ОТБРАСЫВАНИЯ ЗАЯВОК

Для системы обслуживания M/E$_2$/2/m рассмотрим гистерезисную стратегию случайного отбрасывания заявок с двумя порогами: h_1 и h_2 $(3 \le h_1 < h_2 < m+1)$ и с двумя режимами функционирования: основным и режимом отбрасывания. Предположим, что $\beta_n = 1$ при $1 \le n \le h_1$ для основного режима и $\beta_n = \beta$ $(0 < \beta < 1)$ при $h_2 \le n \le m+1$, $\beta_{m+2} = 0$ для режима отбрасывания. Здесь n — число заявок в системе в момент прибытия заявки. Если в момент прибытия заявки выполняется условие $h_1 < n < h_2$, то режим не изменяется. Режим отбрасывания функционирует от момента, когда число заявок в системе (на обслуживании и в очереди) достигает значения h_2, до момента, когда число заявок уменьшается до значения h_1.

Введем следующие обозначения для состояний системы в основном режиме: s_0 — в системе нет заявок; s_{111} — в системе одна заявка, занят один канал, который осуществляет обслуживание в первой фазе; s_{112} — в системе одна заявка, занят один канал, обслуживание во второй фазе; s_{k11} — в системе k заявок $(2 \le k \le h_2 - 1)$, занято два канала, которые осуществляют обслуживание в первой фазе; s_{k12} — в системе k заявок $(2 \le k \le h_2 - 1)$, занято два канала, одна заявка пребывает в первой фазе обслуживания, другая — во второй; s_{k22} — в системе k заявок $(2 \le k \le h_2 - 1)$, занято два канала, которые осуществляют обслуживание во второй фазе. Пусть $p_0, p_{111}, p_{112}, p_{k11}, p_{k12}, p_{k22}$ $(2 \le k \le h_2 - 1)$ — стационарные вероятности пребывания системы в каждом из перечисленных состояний. Обозначим $\tilde{s}_{k11}, \tilde{s}_{k12}, \tilde{s}_{k22}$ $(h_1 + 1 \le k \le m+2)$ аналогичные состояния системы в режиме отбрасывания, а через q_{k11}, q_{k12}, q_{k22} $(h_1 + 1 \le k \le m+2)$ — стационарные вероятности пребывания системы в этих состояниях.

Для определения стационарных вероятностей получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&-\lambda p_0 + \mu_2 p_{112} = 0,\\
&-(\lambda + \mu_2) p_{112} + \mu_1 p_{111} + 2\mu_2 p_{222} = 0,\\
&-(\lambda + 2\mu_2) p_{222} + \mu_1 p_{212} = 0,\\
&-(\lambda + \mu_1) p_{111} + \lambda p_0 + \mu_2 p_{212} = 0;
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
&-(\lambda + 2\mu_1) p_{k11} + \lambda p_{k-1,11} + \mu_2 p_{k+1,12} = 0,\ 2 \le k \le h_1 - 1,\ h_1 + 1 \le k \le h_2 - 2;\\
&-(\lambda + \mu_1 + \mu_2) p_{k12} + \lambda p_{k-1,12} + 2\mu_1 p_{k11} + 2\mu_2 p_{k+1,22} = 0,\\
&\quad 2 \le k \le h_1 - 1,\quad h_1 + 1 \le k \le h_2 - 2;\\
&-(\lambda + 2\mu_2) p_{k22} + \lambda p_{k-1,22} + \mu_1 p_{k12} = 0,\ 3 \le k \le h_2 - 1;
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
&-(\lambda + 2\mu_1) p_{h_1 11} + \lambda p_{h_1 - 1,11} + \mu_2 (p_{h_1 + 1,12} + q_{h_1 + 1,12}) = 0,\\
&-(\lambda + \mu_1 + \mu_2) p_{h_1 12} + \lambda p_{h_1 - 1,12} + 2\mu_1 p_{h_1 11} + 2\mu_2 (p_{h_1 + 1,22} + p_{h_1 + 1,22}) = 0;
\end{aligned} \tag{31}$$

$$-(\lambda + 2\mu_1) p_{h_2 - 1,11} + \lambda p_{h_2 - 2,11} = 0; \tag{32}$$

$$-(\lambda + \mu_1 + \mu_2) p_{h_2 - 1,12} + \lambda p_{h_2 - 2,12} + 2\mu_1 p_{h_2 - 1,11} = 0; \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
&-(\tilde{\lambda} + 2\mu_1) q_{h_1 + 1,11} + \mu_2 q_{h_1 + 2,12} = 0,\\
&-(\tilde{\lambda} + \mu_1 + \mu_2) q_{h_1 + 1,12} + 2\mu_1 q_{h_1 + 1,11} + 2\mu_2 q_{h_1 + 2,22} = 0,\\
&-(\tilde{\lambda} + 2\mu_2) q_{h_1 + 1,22} + \mu_1 q_{h_1 + 1,12} = 0;
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
&-(\tilde{\lambda} + 2\mu_1) q_{h_2 11} + \tilde{\lambda} q_{h_2 - 1,11} + \lambda p_{h_2 - 1,11} + \mu_2 q_{h_2 + 1,12} = 0,\\
&-(\tilde{\lambda} + \mu_1 + \mu_2) q_{h_2 12} + \tilde{\lambda} q_{h_2 - 1,12} + \lambda p_{h_2 - 1,12} + 2\mu_1 q_{h_2 11} + 2\mu_2 q_{h_2 + 1,22} = 0,\\
&-(\tilde{\lambda} + 2\mu_2) q_{h_2 22} + \tilde{\lambda} q_{h_2 - 1,22} + \lambda p_{h_2 - 1,22} + \mu_1 q_{h_2 12} = 0;
\end{aligned} \tag{35}$$

$$-(\tilde{\lambda}+2\mu_1)q_{k11}+\tilde{\lambda}q_{k-1,11}+\mu_2 q_{k+1,12}=0,\ \ h_1+2\le k\le h_2-1,\ \ h_2+1\le k\le m+1,$$
$$\begin{gathered}-(\tilde{\lambda}+\mu_1+\mu_2)q_{k12}+\tilde{\lambda}q_{k-1,12}+2\mu_1 q_{k11}+2\mu_2 q_{k+1,22}=0,\\ h_1+2\le k\le h_2-1,\ \ h_2+1\le k\le m+1;\end{gathered} \tag{36}$$
$$-(\tilde{\lambda}+2\mu_2)q_{k22}+\tilde{\lambda}q_{k-1,22}+\mu_1 q_{k12}=0,\ \ h_1+2\le k\le h_2-1,\ \ h_2+1\le k\le m+1;$$

$$\begin{gathered}-2\mu_1 q_{m+2,11}+\tilde{\lambda}q_{m+1,11}=0,\\ -(\mu_1+\mu_2)q_{m+2,12}+\tilde{\lambda}q_{m+1,12}+2\mu_1 q_{m+2,11}=0,\\ -2\mu_2 q_{m+2,22}+\tilde{\lambda}q_{m+1,22}+\mu_1 q_{m+2,12}=0;\end{gathered} \tag{37}$$

$$p_0+p_{111}+p_{112}+\sum_{k=2}^{h_2-1}(p_{k11}+p_{k12}+p_{k22})+\sum_{k=h_1+1}^{m+2}(q_{k11}+q_{k12}+q_{k22})=1. \tag{38}$$

Введя обозначения

$$\tilde{q}_{k11}=\frac{q_{k11}}{p_0},\ \tilde{q}_{k12}=\frac{q_{k12}}{p_0},\ \tilde{q}_{k22}=\frac{q_{k22}}{p_0},\ \ h_1+1\le k\le m+2;\ \tilde{q}_{h_1+1,22}=\tilde{q},$$

с помощью уравнений (29) приходим к равенствам (7), а из уравнений (30) получаем рекуррентные соотношения

$$\begin{gathered}\tilde{p}_{k22}=f_{22}(\tilde{p}_{k-1,22},\tilde{p}_{k-2,11},\ \tilde{p}_{k-2,12},\tilde{p}_{k-1,12}),\ 3\le k\le h_1,\ h_1+2\le k\le h_2-2;\\ \tilde{p}_{k12}=f_{12}(\tilde{p}_{k22},\tilde{p}_{k-1,22}),\ 3\le k\le h_2-1;\\ \tilde{p}_{k11}=f_{11}(\tilde{p}_{k12},\tilde{p}_{k-1,12},\tilde{p}_{k+1,22}),\ 2\le k\le h_1-1,\ h_1+1\le k\le h_2-2.\end{gathered} \tag{39}$$

Используя уравнения (30) при $k=h_1+1$, уравнения (31), (32) и последнее из уравнений (34), находим

$$\begin{gathered}\tilde{p}_{h_1 11}=\frac{1}{2(\alpha_1+\alpha_2\eta+2\eta+2)}\times\\ \times((\alpha_1+2\eta)((\alpha_2\eta+\eta+1)\,\tilde{p}_{h_1 12}-\alpha_2\eta\,\tilde{p}_{h_1-1,12})+2\eta\,(\alpha_2\tilde{p}_{h_1-1,11}-\alpha_1\tilde{p}_{h_1 22})+\\ +2\eta\,(\tilde{\alpha}_1-\alpha_1)\,\tilde{q}\,);\\ \tilde{p}_{h_1+1,22}=\frac{\alpha_2\eta+\eta+1}{2\eta}\,\tilde{p}_{h_1 12}-\frac{\alpha_2}{2}\,\tilde{p}_{h_1-1,12}-\eta^{-1}\tilde{p}_{h_1 11}-\tilde{q};\\ \tilde{q}_{h_1+1,12}=(\tilde{\alpha}_1+2\eta)\,\tilde{q},\\ \tilde{p}_{h_2-1,11}=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+2}\,\tilde{p}_{h_2-2,11}.\end{gathered} \tag{40}$$

Соотношения (39) для $\tilde{p}_{h_2-2,11}$ и для $\tilde{p}_{h_2-1,12}$ приводят к равенству

$$\begin{gathered}\tilde{p}_{h_2-1,22}=\\ =\frac{2\alpha_1\tilde{p}_{h_2-2,22}-2\alpha_2\tilde{p}_{h_2-3,11}-(\alpha_2+2\eta^{-1})(\alpha_1\tilde{p}_{h_2-3,12}-(\alpha_1+\eta+1)\tilde{p}_{h_2-2,12})}{2(\alpha_1+\alpha_2\eta+2\eta+2)}.\end{gathered} \tag{41}$$

Два первых уравнения из (34) и последнее уравнение из (36), полученное при $k=h_1+2$, позволяют найти

$$\tilde q_{h_1+1,11}=\frac{(\tilde\alpha_1+2\eta)^2(\tilde\alpha_2\eta+\eta+1)-2\tilde\alpha_1\eta}{2(\tilde\alpha_1+\tilde\alpha_2\eta+2\eta+2)}\tilde q,$$

$$\tilde q_{h_1+2,12}=(\tilde\alpha_2+2\eta^{-1})\tilde q_{h_1+1,11},\ \tilde q_{h_1+2,22}=\frac{\tilde q_{h_1+2,12}+\tilde\alpha_1\tilde q}{\tilde\alpha_1+2\eta}. \qquad (42)$$

С помощью уравнений (36) получаем

$$\tilde q_{k22}=g_{22}(\tilde q_{k-1,22},\tilde q_{k-2,11},\tilde q_{k-2,12},\tilde q_{k-1,12}),\ h_1+3\le k\le h_2-1,\ h_2+2\le k\le m+1;$$
$$\tilde q_{k12}=g_{12}(\tilde q_{k22},\tilde q_{k-1,22}),\ h_1+3\le k\le h_2-1,\ h_2+1\le k\le m+1; \qquad (43)$$
$$\tilde q_{k11}=g_{11}(\tilde q_{k12},\tilde q_{k-1,12},\tilde q_{k+1,22}),\ h_1+2\le k\le h_2-1,\ h_2+1\le k\le m+1.$$

Используя первое и второе уравнения из (36) при $k=h_2-1$ и уравнения (35), находим

$$\tilde q_{h_2 22}=$$
$$=\frac{2(\alpha_1\tilde p_{h_2-1,22}+\tilde\alpha_1\tilde q_{h_2-1,22})-2\tilde\alpha_2\tilde q_{h_2-2,11}+(\tilde\alpha_2+2\eta^{-1})((\tilde\alpha_1+\eta+1)\tilde q_{h_2-1,12}-\tilde\alpha_1\tilde q_{h_2-2,12})}{2(\tilde\alpha_1+\tilde\alpha_2\eta+2\eta+2)},$$

$$\tilde q_{h_2 12}=(\tilde\alpha_1+2\eta)\tilde q_{h_2 22}-\alpha_1\tilde p_{h_2-1,22}-\tilde\alpha_1\tilde q_{h_2-1,22},$$

$$q_{h_2+1,22}=$$
$$=\frac{2(\tilde\alpha_1\tilde q_{h_2 22}-\alpha_2\tilde p_{h_2-1,11}-\tilde\alpha_2\tilde q_{h_2-1,11})+(\tilde\alpha_2+2\eta^{-1})((\tilde\alpha_1+\eta+1)\tilde q_{h_2 12}-\alpha_1\tilde p_{h_2-1,12}-\tilde\alpha_1\tilde q_{h_2-1,12})}{2(\tilde\alpha_1+\tilde\alpha_2\eta+2\eta+2)},$$

$$\tilde q_{h_2 11}=\frac{\tilde\alpha_1+\eta+1}{2}\tilde q_{h_2 12}-\frac{1}{2}(\alpha_1\tilde p_{h_2-1,12}+\tilde\alpha_1\tilde q_{h_2-1,12})-\eta\tilde q_{h_2+1,22}. \qquad (44)$$

Второе уравнение из (36) при $k=m+1$ и уравнения (37) приводят к равенствам

$$\tilde p_{m+2,12}=\frac{\tilde\alpha_1}{\tilde\alpha_1+2\eta+2}((\eta\tilde\alpha_2+\eta+3)\tilde p_{m+1,12}-\eta\tilde\alpha_2(\tilde p_{m12}+\tilde p_{m+1,22})),$$

$$\tilde p_{m+2,22}=\frac{\tilde\alpha_2}{2}\tilde p_{m+1,22}+\frac{1}{2\eta}\tilde p_{m+2,12},\ \tilde p_{m+2,11}=\frac{\tilde\alpha_1}{2}\tilde p_{m+1,11}. \qquad (45)$$

Для решения системы (29)–(38) используются рекуррентные соотношения (7), (39)–(45), уравнения (33) и (38). Выразив $\tilde p_{h_2-1,12}$, $\tilde p_{h_2-2,12}$ и $\tilde p_{h_2-1,11}$ через $\tilde q$, из уравнения (33), которое не использовалось для получения рекуррентных соотношений (39)–(45), найдем $\tilde q$, что позволит последовательно вычислить $\tilde p_{k11}$, $\tilde p_{k12}$, $1\le k\le h_2-1$; $\tilde p_{k22}$, $2\le k\le h_2-1$ и $\tilde q_{k11}$, $\tilde q_{k12}$, $\tilde q_{k122}$ для $h_1+1\le k\le m+2$. Затем, используя условие нормировки (38), определяем стационарные вероятности по формулам

$$p_0=\left(1+\tilde p_{111}+\tilde p_{112}+\sum_{k=2}^{h_2-1}(\tilde p_{k11}+\tilde p_{k12}+\tilde p_{k22})+\sum_{k=h_1+1}^{m+2}(\tilde q_{k11}+\tilde q_{k12}+\tilde q_{k22})\right)^{-1};$$

$$p_{k11}=p_0\tilde p_{k11},\ p_{k12}=p_0\tilde p_{k12},\ 1\le k\le h_2-1;\ p_{k22}=p_0\tilde p_{k22},\ 2\le k\le h_2-1;$$

$$q_{k11}=p_0\tilde q_{k11},\ q_{k12}=p_0\tilde q_{k12},\ q_{k22}=p_0\tilde q_{k22},\ h_1+1\le k\le m+2;$$

$$p_1=p_{111}+p_{112};\ p_k=p_{k11}+p_{k12}+p_{k22},\ 2\le k\le h_1;$$

$$p_k=p_{k11}+p_{k12}+p_{k22}+q_{k11}+q_{k12}+q_{k22},\ h_1+1\le k\le h_2-1;$$

$$p_k=q_{k11}+q_{k12}+q_{k22},\ h_2\le k\le m+2,$$

а стационарные характеристики — с помощью соотношений (11) и (26).

Для системы M/E$_2$/2/∞, в которой применяется гистерезисная стратегия случайного отбрасывания заявок, система уравнений для стационарных вероятностей p_0, p_{111}, p_{112}, p_{k11}, p_{k12}, p_{k22} $(2 \le k \le h_2 - 1)$ и q_{k11}, q_{k12}, q_{k22} $(k \ge h_1 + 1)$ состоит из бесконечного числа уравнений. Для ее решения используются равенства (7), (39)–(44) и уравнения (33). Соотношения (43) необходимо использовать с верхним ограничением $k \le N$. Для существования стационарных вероятностей должно выполняться условие $\tilde{\lambda}\mathbf{E}(T_{sv}) < 2$. Вычислив приближенные значения стационарных вероятностей с помощью равенств

$$p_{0(N)} = \left(1 + \tilde{p}_{111} + \tilde{p}_{112} + \sum_{k=2}^{h_2-1}(\tilde{p}_{k11} + \tilde{p}_{k12} + \tilde{p}_{k22}) + \sum_{k=h_1+1}^{N}(\tilde{q}_{k11} + \tilde{q}_{k12} + \tilde{q}_{k22})\right)^{-1};$$

$$p_{k11(N)} = p_{0(N)}\tilde{p}_{k11}, \; p_{k12(N)} = p_{0(N)}\tilde{p}_{k12}, \; 1 \le k \le h_2 - 1;$$

$$p_{k22(N)} = p_{0(N)}\tilde{p}_{k22}, \; 2 \le k \le h_2 - 1;$$

$$q_{k11(N)} = p_{0(N)}\tilde{q}_{k11}, \; q_{k12(N)} = p_{0(N)}\tilde{q}_{k12},$$

$$q_{k22(N)} = p_{0(N)}\tilde{q}_{k22}, \; h_1 + 1 \le k \le N;$$

$$p_{1(N)} = p_{111(N)} + p_{112(N)}; \; p_{k(N)} = p_{k11(N)} + p_{k12(N)} + p_{k22(N)}, \; 2 \le k \le h_1;$$

$$p_{k(N)} = p_{k11(N)} + p_{k12(N)} + p_{k22(N)} + q_{k11(N)} + q_{k12(N)} + q_{k22(N)},$$
$$h_1 + 1 \le k \le h_2 - 1;$$

$$p_{k(N)} = q_{k11(N)} + q_{k12(N)} + q_{k22(N)}, \; h_2 \le k \le N,$$

по формулам (28) находим приближенные значения стационарных характеристик.

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Введем обозначения для изучаемых систем обслуживания: M/E$_2$/2/m — система 1.1, M/E$_2$/2/∞ — система 1.2, M/E$_2$/2/m и M/E$_2$/2/∞ с пороговой стратегией отбрасывания заявок — системы 2.1 и 2.2 соответственно, M/E$_2$/2/m и M/E$_2$/2/∞ с гистерезисной стратегией отбрасывания заявок — системы 3.1 и 3.2 соответственно.

Для всех систем положим $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$. Пусть $\beta = 0{,}8$ для систем с отбрасыванием заявок, $m = 30$ для систем 1.1, 2.1 и 3.1; $\lambda = \frac{22}{15}$ для систем 1.1, 2.1, 2.2, 3.1 и 3.2; $\lambda = 1{,}2$ для системы 1.2; $h = 10$ для систем 2.1 и 2.2; $h_1 = 5$, $h_2 = 10$ для систем 3.1 и 3.2.

Значения стационарных вероятностей p_k систем 1.1, 2.1, 3.1, найденные с использованием рекуррентных соотношений, которые получены в настоящей статье, представлены в табл. 1, а для систем 1.2, 2.2, 3.2 — в табл. 2. Стационарные характеристики всех этих систем представлены в табл. 3. В целях проверки найденных значений в таблицах приведены также результаты вычислений с помощью имитационных моделей изучаемых систем обслуживания, построенных с привлечением инструментальных средств GPSS World [9, 10] (время моделирования $t = 10^7$). При сравнении значений характеристик рассматриваемых систем, полученных с помощью GPSS World для различных значений времени моделирования t, видим, что значение $t = 10^7$ соответствует практически достигнутому стационарному режиму функционирования системы. Для моделирования показательных распределений использованы библиотечные генераторы случайных чисел № 10 для систем 1.1, 2.1, 3.1, 3.2, № 55 для системы 2.2 и № 1 для системы 1.2.

Таблица 1

k	Значения стационарных вероятностей p_k					
	Система 1.1		Система 2.1		Система 3.1	
	Аналитический метод	GPSS World	Аналитический метод	GPSS World	Аналитический метод	GPSS World
0	0,0009300	0,000946	0,0101155	0,0100616	0,0141343	0,0142214
1	0,0021872	0,0022069	0,0237884	0,0238823	0,0332394	0,0334794
2	0,0028645	0,0028759	0,0311554	0,0313071	0,0435332	0,0439130
3	0,0033727	0,0034042	0,0366824	0,0368552	0,0512561	0,0516008
4	0,0038596	0,0038955	0,0419783	0,0422169	0,0586560	0,0591164
5	0,0043807	0,0044179	0,0476465	0,0477676	0,0664817	0,0671150
6	0,0049603	0,0050346	0,0539506	0,0540902	0,0745353	0,0750002
7	0,0056127	0,0056327	0,0610457	0,0610652	0,0784564	0,0788939
8	0,0063495	0,0063410	0,0690597	0,0690171	0,0782230	0,0783471
9	0,0071826	0,0072155	0,0774907	0,0774173	0,0738882	0,0740333
10	0,0081249	0,0081073	0,0837928	0,0838273	0,0659040	0,0660061
11	0,0091908	0,0092157	0,0716159	0,0718011	0,0560277	0,0559550
12	0,0103965	0,0104739	0,0609623	0,0609818	0,0476081	0,0474383
13	0,0117603	0,0118676	0,0518235	0,0518949	0,0404471	0,0399921
14	0,0133031	0,0134141	0,0440349	0,0439287	0,0343614	0,0339559
15	0,0150482	0,0151382	0,0374111	0,0372967	0,0291908	0,0288090
16	0,0170223	0,0170831	0,0317821	0,0316454	0,0247981	0,0243629
17	0,0192553	0,0192424	0,0269997	0,0267520	0,0210664	0,0207840
18	0,0217813	0,0219243	0,0229367	0,0228421	0,0178963	0,0176559
19	0,0246386	0,0247195	0,0194851	0,0194715	0,0152032	0,0149472
20	0,0278708	0,0280518	0,0165529	0,0165405	0,0129154	0,0127030
21	0,0315270	0,0316818	0,0140620	0,0140557	0,0109718	0,0108226
22	0,0356628	0,0357994	0,0119459	0,0118964	0,0093207	0,0092313
23	0,0403411	0,0403918	0,0101482	0,0101245	0,0079181	0,0079038
24	0,0456332	0,0455707	0,0086211	0,0085972	0,0067266	0,0066950
25	0,0516195	0,0515688	0,0073237	0,0072860	0,0057143	0,0056517
26	0,0583911	0,0582911	0,0062216	0,0061922	0,0048544	0,0048079
27	0,0660510	0,0658940	0,0052854	0,0052885	0,0041239	0,0040774
28	0,0747157	0,0744259	0,0044900	0,0044530	0,0035033	0,0034956
29	0,0845172	0,0843321	0,0038143	0,0038015	0,0029761	0,0029349
30	0,0956044	0,0954382	0,0032403	0,0031778	0,0025283	0,0025182
31	0,1030965	0,1028200	0,0026615	0,0025819	0,0020766	0,0020684
32	0,0927487	0,0925780	0,0018757	0,0018827	0,0014635	0.0014632

При вычислении приближенных значений стационарных вероятностей p_k для систем 1.2, 2.2 и 3.2 значение N выбиралось настолько большим, чтобы выполнялись условия

$$p_{0(N)} < 10^{-11}, \; p_{N(N)} < 10^{-9}, \; \mathbf{E}(Q)_{(N)} - \mathbf{E}(Q)_{(N-1)} < 10^{-7}, \qquad (46)$$

задающие точность определения стационарных вероятностей. Полученные минимальные значения N, при которых выполняются условия (46), равны 152, 123 и 123 для систем 1.2, 2.2 и 3.2 соответственно.

Таблица 2

k	Значения стационарных вероятностей p_k					
	Система 1.2		Система 2.2		Система 3.2	
	Аналитический метод, $N = 152$	GPSS World	Аналитический метод, $N = 123$	GPSS World	Аналитический метод, $N = 123$	GPSS World
0	0,0514139	0,0512784	0,0099783	0,0100044	0,0139842	0,0138902
1	0,0971722	0,0971923	0,0234657	0,0234032	0,0328865	0,0328791
2	0,1006493	0,1004640	0,0307326	0,0306741	0,0430709	0,0431240
3	0,0926267	0,0926591	0,0361847	0,0361177	0,0507119	0,0507814
4	0,0823247	0,0822767	0,0414087	0,0413478	0,0580331	0,0580780
5	0,0723535	0,0722643	0,0470000	0,0469572	0,0657758	0,0658815
6	0,0633564	0,0632930	0,0532185	0,0532928	0,0737439	0,0736836
7	0,0554107	0,0553595	0,0602174	0,0603027	0,0776233	0,0776014
8	0,0484421	0,0484452	0,0681227	0,0679162	0,0773924	0,0772344
9	0,0423443	0,0423039	0,0764392	0,0764784	0,0731036	0,0730745
10	0,0370125	0,0370168	0,0826559	0,0826032	0,0652042	0,0652047
11	0,0323516	0,0324136	0,0706441	0,0705123	0,0554328	0,0555391
12	0,0282775	0,0283796	0,0601351	0,0599295	0,0471026	0,0472743
13	0,0247164	0,0247105	0,0511203	0,0509326	0,0400176	0,0400810
14	0,0216038	0,0216340	0,0434374	0,0432736	0,0339965	0,0339804
15	0,0188831	0,0188242	0,0369035	0,0367341	0,0288809	0,0289761
16	0,0165051	0,0164784	0,0313509	0,0313783	0,0245348	0,0244844
17	0,0144265	0,0144358	0,0266333	0,0266765	0,0208428	0,0207715
18	0,0126097	0,0125177	0,0226255	0,0227697	0,0177063	0,0176188
19	0,0110217	0,0109799	0,0192207	0,0193094	0,0150418	0,0149254
20	0,0096337	0,0095413	0,0163283	0,0163989	0,0127782	0,0126677
30	0,0025075	0,0025528	0,0031964	0,0032514	0,0025014	0,0024844
40	0,0006526	0,0006478	0,0006257	0,0006408	0,0004897	0,0004888
50	0,0001699	0,0001556	0,0001225	0,0001153	0,0000959	0,0001173
60	0,0000442	0,0000470	0,0000240	0,0000255	0,0000188	0,0000249
70	0,0000115	0,0000099	0,0000047	0,0000088	0,0000037	0,0000045
80	0,0000030	0,0000032	0,0000009	0,0000011	0,0000007	0,0000006
90	0,0000008	0,0000012	0,0000002	0,0000008	0,0000001	0,0000000
100	0,0000002	0,0000000	$0{,}352 \cdot 10^{-7}$	0,0000003	$0{,}276 \cdot 10^{-7}$	0,0000000
110	$0{,}528 \cdot 10^{-7}$	0,0000000	$0{,}689 \cdot 10^{-8}$	0,0000000	$0{,}539 \cdot 10^{-8}$	0,0000000
120	$0{,}137 \cdot 10^{-7}$	0,0000000	$0{,}135 \cdot 10^{-8}$	0,0000000	$0{,}107 \cdot 10^{-8}$	0,0000000

Анализируя результаты, представленные в табл. 3, видим, что управление интенсивностью входящего потока случайным отбрасыванием заявок позволяет значительно уменьшить среднюю длину очереди при незначительном снижении пропускной способности системы. Уменьшение средней длины очереди в системах 2.1 и 3.1 по сравнению с системой 1.1 составляет 60,9% и 66,5% соответственно при снижении относительной пропускной способности на 2,0% и 2,9%.

Т а б л и ц а 3

Номер системы	Метод	Значения стационарных характеристик		
		E(Q)	E(W)	P_{sv}
1.1	Аналитический метод GPSS World	22,7700211 22,751	17,1121443 17,098	0,9072513 0,907
2.1	Аналитический метод GPSS World	8,8995468 8,884	6,8248737 6,814	0,8890821 0,889
3.1	Аналитический метод GPSS World	7,6362681 7,595	5,9089245 5,877	0,8811327 0,882
1.2	Аналитический метод GPSS World	5,9830336 5,998	4,9858614 4,998	1 1
2.2	Аналитический метод GPSS World	9,2722947 9,287	7,1085555 7,122	0,8893536 0,889
3.2	Аналитический метод GPSS World	7,9413870 7,948	6,1429549 6,149	0,8814295 0,881

Использование гистерезисной стратегии в целях уменьшения длины очереди (системы 3.1, 3.2) более эффективно по сравнению с пороговой стратегией (системы 2.1, 2.2). Например, уменьшение средней длины очереди в системе 3.2 по сравнению со средней длиной в системе 2.2 составляет 14,4% при снижении относительной пропускной способности всего на 0,9%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в настоящей работе алгоритм численного решения системы линейных алгебраических уравнений для стационарных вероятностей построен с учетом особенностей структуры этой системы, в частности наличия трех или четырех неизвестных в большинстве ее уравнений. Полученные здесь рекуррентные соотношения служат для прямого вычисления решений системы, что позволяет сократить объем вычислений по сравнению с прямым или итерационным классическим методом. Прямые методы предполагают осуществление преобразований подготовительного характера над матрицей системы, и только на втором этапе вычислений последовательно определяются решения. При использовании итерационных методов также выполняются предварительные преобразования и вычисления проводятся многократно до тех пор, пока не будет найдено решение с заданной точностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. Москва: РУДН, 1995. 529 с.
2. Brockmeyer E., Halstrøm H.L., Jensen A. The life and works of A.K. Erlang. Copenhagen: Danish Academy of Technical Sciences, 1948. 275 p.
3. Chydziński A. Nowe modele kolejkowe dla wezłów sieci pakietowych. Gliwice: Pracownia Komputerowa Jacka Skalmierskiego, 2013. 286 s.
4. Tikhonenko O., Kempa W. M. Queue-size distribution in M/G/1-type system with bounded capacity and packet dropping. *Communications in Computer and Information Science.* 2013. Vol. 356. P. 177–186.
5. Kempa W. M. A direct approach to transient queue-size distribution in a finite-buffer queue with AQM. *Applied Mathematics and Information Sciences.* 2013. Vol. 7, N 3. P. 909–915.
6. Zhernovyi Yu., Kopytko B., Zhernovyi K. On characteristics of the $M^{\theta}/G/1/m$ and $M^{\theta}/G/1$ queues with queue-size based packet dropping. *J. of Applied Mathematics and Computational Mechanics.* 2014. Vol. 13, N 4. P. 163–175.
7. Жерновый Ю.В., Жерновый К.Ю. Метод потенциалов для систем типа M/G/1/m с пороговыми стратегиями функционирования. *Кибернетика и системный анализ.* 2016. Т. 52, № 3. С. 170–181.

8. Zhernovyi Yu., Kopytko B. The potentials method for the M/G/1/m queue with customer dropping and hysteretic strategy of the service time change. *J. of Applied Mathematics and Computational Mechanics.* 2016. Vol. 15, N 1. P. 197–210.
9. Боев В. Д. Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World. С.-Петербург: БХВ-Петербург, 2004. 368 с.
10. Zhernovyi Yu. Creating models of queueing systems using GPSS World: Programs, detailed explanations and analysis of results. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. 220 p.

Надійшла до редакції 10.05.2016

К.Ю. Жерновий

ВИЗНАЧЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВОКАНАЛЬНИХ СИСТЕМ З ЕРЛАНГІВСЬКИМ РОЗПОДІЛОМ ЧАСУ ОБСЛУГОВУВАННЯ

Анотація. Запропоновано метод дослідження систем обслуговування $M/E_2/2/m$ і $M/E_2/2/\infty$ — стандартних систем та систем з пороговою і гістерезисною стратегіями випадкового відкидання замовлень з метою управління вхідним потоком. Отримано рекурентні співвідношення для обчислення стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі та стаціонарних характеристик. Побудовані алгоритми перевірено на прикладах з використанням імітаційних моделей, створених за допомогою інструментальних засобів GPSS World.

Ключові слова: двоканальна система обслуговування, найпростіший вхідний потік, ерлангівський розподіл часу обслуговування, випадкове відкидання замовлень, метод фіктивних фаз, рекурентні співвідношення.

K.Yu. Zhernovyi

DETERMINING THE STEADY-STATE CHARACTERISTICS OF DUAL-CHANNEL QUEUEING SYSTEMS WITH ERLANGIAN SERVICE TIMES

Abstract. We propose a method to study $M/E_2/2/m$ and $M/E_2/2/\infty$ queueing systems: standard systems and systems with the threshold and hysteretic strategies of random dropping of customers in order to control the input flow. Recurrence relations are obtained to compute the stationary distribution of the number of customers and the steady-state stationary characteristics. The constructed algorithms are tested on examples using simulation models constructed with the assistance of the GPSS World tools.

Keywords: dual-channel queueing system, Poisson input, Erlangian service times, random dropping of customers, fictitious phase method, recurrence relations.

Жерновый Константин Юрьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Львовского учебно-научного института ДВНЗ «Університет банківської справи», e-mail: k.zhernovyi@yahoo.com.