УДК 519.85

И.В. ГРЕБЕННИК, О.С. ЧЕРНАЯ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ТРАНСПОЗИЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ ПЕРЕСТАНОВОК И СВОЙСТВА КОМПОЗИЦИИ

Аннотация. Предложена стратегия решения задачи оптимизации линейной функции на множестве циклических перестановок на основе свойств транспозиций специального вида. Исследованы свойства специального класса транспозиций, доказаны утверждения о влиянии композиций таких транспозиций на произвольную перестановку. Для приближенного решения, полученного с помощью описанной стратегии, обоснована оценка.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, линейная функция, перестановки, транспозиции, циклические перестановки.

ВВЕДЕНИЕ

При анализе многих научных и прикладных задач средствами математического моделирования выступают комбинаторные множества [1–7]. Наиболее распространенным среди них являются множество перестановок и его различные подмножества. Дополнительные ограничения на переменные в таких задачах позволяют выделить следующие известные в литературе классы множеств перестановок: перестановки P_n различных элементов, перестановки с повторениями, перестановки P_{nk} из n элементов, k из которых различны, циклические перестановки P_n^C, перестановки PT_{nk}^m кортежей, композиции перестановок PW_n, перестановки, содержащие (не содержащие) шаблон (pattern), полиперестановки и другие [1, 4, 8, 9]. Исследование и использование свойств этих комбинаторных объектов повышает эффективность процессов моделирования и решения задач, имеющих комбинаторную структуру, в частности задач комбинаторной генерации и комбинаторной оптимизации.

Известен способ исследования комбинаторных множеств, основанный на их погружении в евклидово пространство [3, 6]. Тогда выпуклая оболочка образа комбинаторного множества, полученная в результате погружения, представляет собой комбинаторный, в частности перестановочный, многогранник [2]. Для различных подмножеств множества перестановок при погружении в евклидово пространство в настоящее время неизвестны описания соответствующих комбинаторных многогранников. Поэтому при решении задач на этих множествах предлагается использовать перестановочный многогранник, но при этом исследовать те его вершины, которые соответствуют элементам заданного подмножества множества перестановок. Одним из базовых свойств перестановочного многогранника является критерий смежности его вершин [2].

Основой построения перестановок являются транспозиции порождающих элементов. Существует класс транспозиций, представители которого соответствуют критерию смежности в перестановочном многограннике [3] в следующем понимании. При применении к любой перестановке транспозиции данного класса будет получена такая перестановка, что вершины, соответствующие обеим перестановкам в перестановочном многограннике, являются смежными. Использование транспозиций данного класса и соответствующих свойств перестановочного многогранника позволяет решать задачи комбинаторной генерации и комбинаторной оптимизации, применяя переходы по смежным вершинам перестановочного многогранника [2, 3].

Актуальной является задача построения и исследования свойств композиции нескольких транспозиций специального класса и анализа результатов их воздействия на некоторую перестановку. При этом разные порядки следования транспозиций в композиции определяют различные перестановки в результате применения композиции нескольких транспозиций к некоторой перестановке.

Существенными являются следующие два вопроса о применении композиций транспозиций к некоторой перестановке.

1. Сколько различных перестановок можно получить, применяя заданную композицию транспозиций к некоторой перестановке, если транспозиции будут следовать в различных порядках?

2. Сколько различных последовательностей транспозиций и какие именно в заданной композиции при применении к некоторой перестановке приведут к одной результирующей перестановке?

Ответы на эти вопросы позволят использовать известные методы решения задач на многогранниках, применяя для этого не только смежные вершины, но и последовательности смежных вершин, отвечающие композициям транспозиций, соответствующих критерию смежности в перестановочном многограннике. В частности, исследование данных свойств транспозиций применимо для решения задач оптимизации линейных функций на подмножествах множества перестановок [10].

Цель статьи — решение задач оптимизации линейных функций на подмножествах множества перестановок на основе исследования свойств транспозиций, соответствующих критерию смежности в перестановочном многограннике.

БАЗОВЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1 [8]. Линейное упорядочение элементов некоторого порождающего множества $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ называется перестановкой $\pi=\pi(a_1, a_2, \ldots, a_n)=$ $=(\pi(a_1), \pi(a_2), \ldots, \pi(a_n))=(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$ или n-перестановкой, если необходимо отметить тот факт, что она содержит n элементов. Множество перестановок, порожденное элементами $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, обозначим P_n.

Рассмотрим некоторую перестановку $\pi=(\pi(a_1), \pi(a_2), \ldots, \pi(a_n)) \in P_n$ и ее элемент $\pi(a_i)=a_j$ $\forall i, j \in J_n$. Тогда запишем $\pi(a_j)=\pi(\pi(a_i))=\pi^2(a_i)$. Обобщенно эту формулу можно представить в виде $\pi^{k-1}(a_j)=\pi(\pi^{k-1}(a_i))=\pi^k(a_i)$ $\forall i, j \in J_n$, $k \le n$.

Таким образом [5], если для некоторого $l \ge 1$ имеем $\pi^l(a_i)=a_i$, $i \in J_n$, и элементы $a_i, \pi(a_i), \pi^2(a_i), \ldots, \pi^{l-1}(a_i)$ различны, то последовательность $(a_i, \pi(a_i),$ $\pi^2(a_i), \ldots, \pi^{l-1}(a_i))$ называется циклом длины l.

Циклы $(a_i, \pi(a_i), \ldots, \pi^{l-1}(a_i))$ и $(\pi^j(a_i), \pi^{j+1}(a_i), \ldots, \pi^{l-1}(a_i), a_i, \ldots$ $\ldots, \pi^{j-1}(a_i))$ считаются эквивалентными. Каждый элемент множества $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ находится в единственном цикле перестановки π, и возможно рассматривать π как произведение различных циклов $C_1, \ldots, C_k : \pi=$ $=C_1 C_2 \ldots C_k$ [5]. Например, если перестановка π определена равенствами $\pi(1)=4$, $\pi(2)=2$, $\pi(3)=7$, $\pi(4)=1$, $\pi(5)=3$, $\pi(6)=6$, $\pi(7)=5$, то $\pi=(14)(2)(375)(6)$. Возможны различные обозначения такого представления π, например $\pi=(753)(14)(6)(2)$. Можно определить стандартное представление, при этом в каждом цикле записывается первым его наибольший элемент и циклы записываются в порядке возрастания их максимальных элементов. Таким образом, стандартная форма рассмотренной выше перестановки π есть $(2)(41)(6)(753)$ [5].

Определение 2 [5]. Циклической перестановкой называется такая перестановка π из n элементов, которая содержит единственный цикл длины n, т.е. $\pi^n(a_i)=a_i$ $\forall i \in J_n$.

Такие перестановки будем обозначать π_C. В этом случае P_n^C — множество циклических перестановок π_C [5, 8]. Обозначим $E_n^C = f(P_n^C)$ образ множества циклических перестановок P_n^C при погружении в евклидово пространство [3, 6]. После погружения множества $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ будет порожден перестановочный многогранник Π_n, где $\operatorname{vert} \Pi_n = E_n$ — множество его вершин.

Поскольку между множеством порождающих элементов $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, и множеством их индексов $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ существует взаимно-однозначное соответствие, далее без потери общности будем рассматривать множество перестановок P_n, порожденное элементами $\{1, 2, \ldots, n\}$, т.е. $A = J_n$.

Обозначим $\pi_{ab}(1, 2, \ldots, n)$ такую перестановку из элементов $A = J_n$, что при отображении $\pi_{ab}(1, 2, \ldots, n) = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ элементы $i_k = \pi(a)$ и $i_l = \pi(b)$ имеют $k < l$. Множеством таких перестановок соответственно будет $P_{ab} \subset P_n$.

Рассмотрим функцию σ_i на множестве порождающих элементов, $\sigma_i : A \to A$, определенную следующим образом:

$$\sigma(1) = 1, \; \sigma(2) = 2, \ldots, \; \sigma(i) = i+1, \; \sigma(i+1) = i, \ldots, \; \sigma(n) = n, \qquad (1)$$

где $i \in J_{n-1}$. Функция, определенная таким образом, является биективной и представляет транспозицию элементов $\{i, i+1\} \subset A$ [9].

Согласно свойству функция σ_i, заданная в виде (1), соответствует критерию смежности перестановочного многогранника Π_n. В результате применения функции $\sigma_i(p)$ к произвольной перестановке $p \in P_n$ получена перестановка p_k такая, что соответствующие перестановкам p и p_k вершины перестановочного многогранника являются смежными.

Для любой вершины $v \in \operatorname{vert} \Pi_n$ транспозицию $\sigma_i(v)$ вида (1) элементов $\{i, i+1\}$, принадлежащих одному циклу длины k соответствующей перестановки $p \in P_n$, назовем транспозицией разрыва. При применении такой транспозиции к $p \in P_n$ будет получена смежная с исходной вершина $\sigma_i(v) = v_i \in \operatorname{vert} \Pi_n$ такая, что соответствующая ей перестановка $p_i \in P_n$ имеет два цикла, которые состоят из элементов цикла длины k, содержащего длины k_1 и k_2, т.е. $k_1 + k_2 = k$.

Для любой вершины $v \in \operatorname{vert} \Pi_n$ транспозицию $\sigma_i(v)$ вида (1) элементов $\{i, i+1\}$, принадлежащих двум разным циклам длины k_1 и k_2 соответствующей перестановки $p \in P_n$, назовем транспозицией соединения. При применении такой транспозиции к $p \in P_n$ получена смежная с исходной вершина $\sigma_i(v) = v_i \in \operatorname{vert} \Pi_n$. Соответствующая ей перестановка $p_i \in P_n$ содержит цикл длины k, состоящий из элементов циклов длин k_1 и k_2, $k = k_1 + k_2$. Следовательно, для вершин $v \in \operatorname{vert} \Pi_n$ одна транспозиция $\sigma_i(v)$ вида (1) элементов $\{i, i+1\}$, $i \in J_{n-1}$, может быть либо разрывом, либо соединением циклов, которым эти элементы принадлежат. В случае, если исходная перестановка принадлежит множеству циклических перестановок $p \in P_n^C$ и имеет единственный цикл длины n, любая транспозиция вида (1) будет разрывом [11–13].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу комбинаторной оптимизации в следующей постановке:

$$L(p) = \sum_{i=1}^{n} c_i p_i \to \min; \qquad (2)$$

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \overline{P} \subset P_n, \qquad (3)$$

где $c_j \in R$, $p_i \in J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \in J_n$ $\forall i, j$, $p_i \neq p_j$, $\overline{P} \in \{P_n, P_{nk}, P_n^C, PW_n, PT_{nk}^m\}$. Здесь P_n — множество перестановок из n различных элементов,

P_{nk} — множество перестановок из n элементов, k из которых различны, P_n^C — множество циклических перестановок, PW_n — композиция перестановок, PT_{nk}^m — перестановки кортежей. В данной статье далее в качестве примера из множества $\{P_n, P_{nk}, P_n^C, PW_n, PT_{nk}^m\}$ выберем множество циклических перестановок, т.е. $\overline{P} = P_n^C$.

В результате погружения множества $\overline{P}$ в арифметическое евклидово пространство может быть сформулирована эквивалентная задаче (2), (3) задача оптимизации линейной функции в пространстве R^n:

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min; \tag{4}$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \overline{E} \subset \{E_n, E_{nk}, E_n^C, EW_n, ET_{nk}^m\}, \tag{5}$$

где $c_j \in R$, $j \in J_n$, а элементы множества $\{E_n, E_{nk}, E_n^C, EW_n, ET_{nk}^m\}$ представляют образы соответствующих множеств $\{P_n, P_{nk}, P_n^C, PW_n, PT_{nk}^m\}$ в R^n. Далее полагаем $\overline{E} = E_n^C = f(P_n^C)$.

Множество E_n^C обладает всеми комбинаторными свойствами множества P_n^C. Следовательно, дальнейшие выкладки справедливы как для задачи (2), (3) при $\overline{P} = P_n^C$, так и для задачи (4), (5) при $\overline{E} = E_n^C$.

Отметим, что задача поиска минимумов линейных функций на евклидовых комбинаторных множествах перестановок и размещений без дополнительных ограничений решена, например, в [6, 14]. Решение задачи (2), (3) на множестве перестановок P_{nk}, порожденном элементами $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, имеет вид [6, 14]

$$p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*) = \arg\min_{p \in P_{nk}} \sum_{j=1}^{n} c_j p_j, \; c_j \in R^1 \;\; \forall j \in J_n,$$

где $p_{m_j}^* = a_j \;\; \forall j \in J_n$, а последовательность $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ такова, что $c_{m_1} \ge c_{m_2} \ge \ldots \ge c_{m_n}$.

Отметим, что комбинаторные свойства множества циклических перестановок P_n^C не позволяют решить задачу (4), (5) простым упорядочиванием.

СВОЙСТВА ТРАНСПОЗИЦИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Один из подходов к решению задачи (4), (5) состоит в исследовании свойств циклических перестановок и свойств транспозиций вида (1). Необходимо отметить, что все рассматриваемые далее транспозиции по умолчанию считаются транспозициями вида (1). Введем следующие понятия.

Назовем две транспозиции σ_i и σ_j непересекающимися, если подмножества элементов $\{i, i+1\}$ и $\{j, j+1\}$, соответствующие каждой транспозиции, не пересекаются. Если подмножества $\{i, i+1\}$ и $\{j, j+1\}$, соответствующие двум транспозициям σ_i и σ_j, пересекаются и $i+1 = j$ или $i = j+1$, то такие транспозиции будем называть пересекающимися.

Если в некотором множестве транспозиций $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}\}$ две транспозиции σ_i и σ_j равны, т.е. $i = j$, то такие транспозиции назовем кратными. Кратность m транспозиции определяется количеством одинаковых транспозиций в некоторой последовательности транспозиций. Две транспозиции σ_i и σ_j являются коммутативными, если для любой перестановки $p \in P_n$ выполняется равенство $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_i(\sigma_j(p)) = \sigma_j(\sigma_i(p)) = \sigma_j \circ \sigma_i$ [15].

Суперпозицию k транспозиций $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}\}$ будем обозначать $\Sigma_k = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \ldots \circ \sigma_{i_k}$. Суперпозиции транспозиций $\Sigma_k = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \ldots \circ \sigma_{i_k}$ поставим в соответствие подмножество порождающих элементов $\bigcup_{j=1}^{k} \{i_j, i_j + 1\} = \{i_1, i_1 + 1, i_2, i_2 + 1, \ldots i_k, i_k + 1\} \subset A$.

Назовем суперпозицию транспозиций $\Sigma_k = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \ldots \circ \sigma_{i_k}$ и транспозицию σ_j непересекающимися, если подмножества $\bigcup_{j=1}^{k} \{i_j, i_j + 1\} = \{i_1, i_1 + 1, i_2, i_2 + 1, \ldots, i_k, i_k + 1\}$ и $\{j, j+1\}$, соответствующие им, не пересекаются. Если подмножества $\bigcup_{j=1}^{k} \{i_j, i_j + 1\}$ и $\{j, j+1\}$ пересекаются и $j \subset \bigcup_{j=1}^{k} \{i_j, i_j + 1\}$ или $j+1 \subset \bigcup_{j=1}^{k} \{i_j, i_j + 1\}$, то Σ_k и σ_j назовем пересекающимися. Если оба элемента транспозиции σ_j принадлежат подмножеству суперпозиции $\Sigma_k = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \ldots \circ \sigma_{i_k}$, т.е. $\{j, j+1\} \subset \bigcup_{j=1}^{k} \{i_j, i_j + 1\}$, но ни одна из транспозиций $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}$ не равна транспозиции σ_j, то транспозицию σ_j назовем вложенной по отношению к суперпозиции Σ_k.

Если оба элемента транспозиции σ_j принадлежат подмножеству суперпозиции $\Sigma_k = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \ldots \circ \sigma_{i_k}$, т.е. $\{j, j+1\} \subset \bigcup_{j=1}^{k} \{i_j, i_j + 1\}$, и σ_j равна одной из транспозиций $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}\}$, участвующих в композиции Σ_k, то транспозицию σ_j назовем кратной по отношению к композиции Σ_k.

Обозначим композицию $\Sigma_k(P_n) = \{p_i \in P_n | \, p_i = \Sigma_k(p), \, p \in P_n\}$, $i \in J_{k!}$, как результат применения к некоторой перестановке $p \in P_n$ композиции $\Sigma_k = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \ldots \circ \sigma_{i_k}$ транспозиций $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}\}$. Из множества $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}\}$ можно составить $P_k = k!$ различных последовательностей транспозиций, которые могут быть применены к исходной перестановке. Рассмотрим результат воздействия композиции Σ_k на некоторую перестановку $p \in P_n$ в зависимости от свойств заданных транспозиций $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}\}$ и их порядка в композиции. С этой целью докажем ряд утверждений.

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПОЗИЦИЙ ТРАНСПОЗИЦИЙ К ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЕРЕСТАНОВКЕ

Лемма 1. Суперпозиция $\Sigma_n = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \ldots \circ \sigma_{i_n}$ непересекающихся транспозиций $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_n}\}$ такова, что для любых двух транспозиций $\sigma_{i_x}, \sigma_{i_y} \in \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_n}\}$ выполняется правило коммутативности

$$\sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \ldots \circ \sigma_{i_y} \circ \ldots \circ \sigma_{i_z} \circ \ldots \circ \sigma_{i_n} = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \ldots \circ \sigma_{i_z} \circ \ldots \circ \sigma_{i_y} \circ \ldots \circ \sigma_{i_n}.$$

Доказательство проведем по индукции.

Для $n = 1$ это тривиальный случай с одной транспозицией.

Для $n = 2$ рассмотрим композицию из двух непересекающихся транспозиций $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}\}$ и покажем, что для такого частного случая коммутативность выполняется.

Рассмотрим применение композиции $\sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} = \sigma_{i_1}(\sigma_{i_2}(p))$:

$$\sigma_{i_1}(\sigma_{i_2}(1)) = \sigma_{i_1}(1) = 1, \; \sigma_{i_1}(\sigma_{i_2}(2)) = \sigma_{i_1}(2) = 2, \; \ldots, \; \sigma_{i_1}(\sigma_{i_2}(i_1)) = \sigma_{i_1}(i_1) = i_1 + 1,$$
$$\sigma_{i_1}(\sigma_{i_2}(i_1 + 1)) = \sigma_{i_1}(i_1 + 1) = i_1, \; \ldots, \; \sigma_{i_1}(\sigma_{i_2}(i_2)) = \sigma_{i_1}(i_2 + 1) = i_2 + 1,$$
$$\sigma_{i_1}(\sigma_{i_2}(i_2 + 1)) = \sigma_{i_1}(i_2) = i_2, \; \ldots, \; \sigma_{i_1}(\sigma_{i_2}(n)) = \sigma_{i_1}(n) = n.$$

Применение композиции $\sigma_{i_2} \circ \sigma_{i_1} = \sigma_{i_2}(\sigma_{i_1}(p))$:

$$\sigma_{i_2}(\sigma_{i_1}(1)) = \sigma_{i_2}(1) = 1,\ \sigma_{i_2}(\sigma_{i_1}(2)) = \sigma_{i_2}(2) = 2,\ \ldots$$

$$\ldots,\ \sigma_{i_2}(\sigma_{i_1}(i_1)) = \sigma_{i_2}(i_1+1) = i_1+1,\ \sigma_{i_2}(\sigma_{i_1}(i_1+1)) = \sigma_{i_2}(i_1) = i_1,\ \ldots$$

$$\ldots,\ \sigma_{i_2}(\sigma_{i_1}(i_2)) = \sigma_{i_2}(i_2) = i_2+1,\ \sigma_{i_2}(\sigma_{i_1}(i_2+1)) = \sigma_{i_2}(i_2+1) = i_2,\ \ldots$$

$$\ldots,\ \sigma_{i_2}(\sigma_{i_1}(n)) = \sigma_{i_2}(n) = n.$$

Исходя из результатов применения транспозиций $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}\}$ в различном порядке, можно сделать вывод, что $\sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} = \sigma_{i_2} \circ \sigma_{i_1}$.

Предположим, что для $n = k$ непересекающихся транспозиций $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}\}$ лемма 1 выполняется, и докажем, что тогда она выполняется и для $n = k+1$. Для этого рассмотрим суперпозицию $\Sigma_{k+1} = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \ldots \circ \sigma_{i_k} \circ \sigma_{i_{k+1}}$ и докажем, что $\Sigma_{k+1} = \Sigma_k \circ \sigma_{i_{k+1}} = \sigma_{i_{k+1}} \circ \Sigma_k = \Sigma_s \circ \sigma_{i_{k+1}} \circ \Sigma_l \ \ \forall s,\ l\colon s+l=k$.

Композиция Σ_k из k транспозиций $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}\}$ является биективной функцией, и для нее выполняется условие коммутативности, что следует из индуктивного предположения. Так как все транспозиции $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}, \sigma_{i_{k+1}}\}$ непересекающиеся, следовательно, подмножества элементов $A = J_n$, соответствующие Σ_k и $\sigma_{i_{k+1}}$, не пересекаются. Таким образом, композицию функции $\sigma_{i_{k+1}}$ и суперпозиции Σ_k можно рассматривать как композицию двух биекций. А для двух элементов доказано, что $\sigma_{i_{k+1}} \circ \Sigma_k = \Sigma_k \circ \sigma_{i_{k+1}}$.

Далее рассмотрим $\Sigma_{k+1} = \Sigma_s \circ \sigma_{i_{k+1}} \circ \Sigma_l \ \forall s, l\colon s+l=k$. Так как s и l меньше k, следовательно, исходя из индуктивного предположения Σ_s и Σ_l коммутативны. Учтем, что Σ_s и Σ_l являются биекциями, так как они — композиции биекций. Исходя из того, что все транспозиции $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}, \sigma_{i_{k+1}}\}$ непересекающиеся, подмножества, соответствующие Σ_s, Σ_l и $\sigma_{i_{k+1}}$, не пересекаются. Таким образом, $\Sigma_{k+1} = \Sigma_k \circ \sigma_{i_{k+1}} \circ \Sigma_l$ является композицией трех непересекающихся биекций, для которых лемма 1 верна, исходя из индуктивного предположения.

Поскольку лемма 1 доказана для $n = k+1$, следовательно, согласно принципу математической индукции она верна и для любого количества непересекающихся транспозиций n, что и требовалось доказать.

Композиция биективных функций ассоциативна и, как было доказано в лемме 1, композиция непересекающихся транспозиций коммутативна для любых элементов композиции. Исходя из этого количество композиций из непересекающихся транспозиций $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}\}$ равно количеству перестановок из k элементов; результат применения всех композиций к произвольной перестановке одинаковый.

Следствие 1. Если к некоторой перестановке $p \in P_n$ применить композицию непересекающихся транспозиций $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}\}$, $0 \le k < n/2$, то вне зависимости от порядка применения транспозиций будет получена одна и та же перестановка $\Sigma_k(P_n) = \{p_i \in P_n \mid p_i = \Sigma_k(p),\ p \in P_n\}$, $i = 1$.

Рассмотрим композицию двух пересекающихся транспозиций.

Лемма 2. Две пересекающиеся транспозициии $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}\}$ не коммутативны, т.е. $\sigma_i \circ \sigma_{i+1} \ne \sigma_{i+1} \circ \sigma_i$.

Доказательство. Рассмотрим композицию из двух пересекающихся транспозиций $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}\}$ и покажем, что коммутативность не выполняется.

Рассмотрим применение композиции $\sigma_i \circ \sigma_{i+1} = \sigma_i(\sigma_{i+1}(p))$:

$$\sigma_i(\sigma_{i+1}(1)) = \sigma_i(1) = 1,\ \sigma_i(\sigma_{i+1}(2)) = \sigma_i(2) = 2, \ldots,\ \sigma_i(\sigma_{i+1}(i)) = \sigma_i(i) = i+1,$$

$$\sigma_i(\sigma_{i+1}(i+1)) = \sigma_i(i+2) = i+2,\ \sigma_i(\sigma_{i+1}(i+2)) = \sigma_i(i+1) = i,\ \ldots$$

$$\ldots,\ \sigma_i(\sigma_{i+1}(n)) = \sigma_i(n) = n.$$

Изменим порядок композиций $\sigma_{i+1} \circ \sigma_i = \sigma_{i+1}(\sigma_i(p))$:

$$\sigma_{i+1}(\sigma_i(1)) = \sigma_{i+1}(1) = 1\,,\ \sigma_{i+1}(\sigma_i(2)) = \sigma_{i+1}(2) = 2\,,\ldots$$

$$\ldots,\ \sigma_{i+1}(\sigma_i(i)) = \sigma_{i+1}(i+1) = i+2\,,\ \sigma_{i+1}(\sigma_i(i+1)) = \sigma_{i+1}(i) = i,$$

$$\sigma_{i+1}(\sigma_i(i+2)) = \sigma_{i+1}(i+2) = i+1\,,\ldots,\ \sigma_{i+1}(\sigma_i(n)) = \sigma_{i+1}(n) = n.$$

Исходя из результатов применения транспозиций $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}\}$ в различном порядке, можно сделать вывод, что $\sigma_i \circ \sigma_{i+1} \neq \sigma_{i+1} \circ \sigma_i$.

Следствие 2. Если к некоторой перестановке $p \in P_n$ применить композицию двух пересекающихся транспозиций $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}\}$, то в результате применения данных транспозиций в различных порядках будет получено множество $\Sigma_2(P_n) = \{p_i \in P_n | \, p_i = \Sigma_2(p),\ p \in P_n\}$, $i = 2$, из двух перестановок таких, что $p_1 \neq p_2$. Обозначим композиции с различным порядком следования транспозиций $\Sigma_2'(p) \neq \Sigma_2''(p)$, где $\Sigma_2'(p) = \sigma_i \circ \sigma_{i+1}$ и $\Sigma_2''(p) = \sigma_{i+1} \circ \sigma_i$.

Далее рассмотрим комбинацию пересекающихся и непересекающихся транспозиций и их суперпозиции.

Лемма 3. Пусть имеем две непересекающиеся транспозиции $\{\sigma_i, \sigma_j\}$ и одну транспозицию σ_{i+1} такие, что $\{j, j+1\} \cap \{i, i+1, i+2\} = \varnothing$. Тогда при применении композиции $\Sigma_3(p)$ трех транспозиций $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}, \sigma_j\}$ количество порождаемых перестановок возрастет в два раза по сравнению с количеством перестановок, порождаемых композицией $\Sigma_2(p)$ двух транспозиций $\{\sigma_i, \sigma_j\}$.

Справедливость утверждения вытекает из лемм 1 и 2.

Утверждение 1. Пусть имеется композиция Σ_n n произвольных транспозиций $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_n}$. Данная композиция Σ_n порождает S перестановок $\Sigma_n(p)$: $|\Sigma_n(p)| = S$. Пусть также существует одна транспозиция $\sigma_j \notin \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_n}\}$ такая, что $|\{j, j+1\} \cap \{i_m, i_m+1\}| = 1$. Тогда применение композиции Σ_{n+1} транспозиций $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_n}, \sigma_j\}$ увеличит количество порождаемых перестановок в два раза: $\Sigma_{n+1}(p)$, $|\Sigma_{n+1}(p)| = 2S$.

Доказательство. Для $n = 1$ и $n = 2$ справедливость утверждения следует из лемм 2 и 3. Дальнейшее доказательство можно провести по аналогии с леммой 1 по индукции.

Следствие 3. Пусть имеем две непересекающиеся транспозиции $\{\sigma_i, \sigma_{i+2}\}$ и одну транспозицию σ_{i+1} . Тогда при применении композиции Σ_3 трех транспозиций $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}\}$ количество порождаемых перестановок возрастет в четыре раза по сравнению с количеством перестановок, порождаемых композицией Σ_2 двух транспозиций $\{\sigma_i, \sigma_{i+2}\}$.

Доказательство. Доказательство может быть проведено на основании леммы 1, следствия 2 и утверждения 1.

Следствие 4. Из транспозиций $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}\}$ получаем следующие композиции:

$$\Sigma_3' = \sigma_i \circ \sigma_{i+1} \circ \sigma_{i+2}\,,\ \Sigma_3'' = \sigma_i \circ \sigma_{i+2} \circ \sigma_{i+1} = \sigma_{i+2} \circ \sigma_i \circ \sigma_{i+1},$$

$$\Sigma_3''' = \sigma_{i+1} \circ \sigma_i \circ \sigma_{i+2} = \sigma_{i+1} \circ \sigma_{i+2} \circ \sigma_i\,,\ \Sigma_3^{IV} = \sigma_{i+2} \circ \sigma_{i+1} \circ \sigma_i,$$

где $\Sigma_3'(p) \neq \Sigma_3''(p) \neq \Sigma_3'''(p) \neq \Sigma_3^{IV}(p)$.

ВЛИЯНИЕ ТРАНСПОЗИЦИЙ ЗНАЧЕНИЙ ПЕРЕМЕННЫХ НА ЗНАЧЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим некоторую перестановку $p \in P_n$ и значение функции $L(p) = \sum_{i=1}^{n} c_i p_i$ для данной перестановки в задаче (2), (3). Из утверждений и свойств, доказанных выше, известно, как применение транспозиций вида (1) влияет на перестановку $p \in P_n$. Исследуем изменение значения функции $L(p)$ в результате применения транспозиций вида (1) к перестановке $p \in P_n$.

Любая транспозиция вида (1) изменяет значение целевой функции следующим образом. Если будет совершена произвольная транспозиция σ_j элементов $(j, j+1) = (i_r, i_m)$, то значение целевой функции изменится на некоторую величину $\delta_{rm} = |c_r - c_m|$, $r, m \in J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Любая транспозиция δ_{rm} может либо увеличить, либо уменьшить значение функции цели. Обозначим Δ множество всех δ_{rm} и отметим, что мощность данного множества равна C_n^2.

Лемма 4. Если к некоторой перестановке $p \in P_n$ применяется композиция Σ_k транспозиций $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}\}$ такая, что $\sigma_{i_j} \neq \sigma_{i_r}$ $\forall j, r \in \{1, \ldots, k\}$, то любая δ_{rm}, $r, m \in J_n$, изменит значение целевой функции один и только один раз.

Доказательство. Рассмотрим исходную перестановку $p = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in P_n$. Выберем из элементов перестановки произвольную пару $(j, j+1) = (i_r, i_m)$ и совершим их транспозицию. Тогда значение целевой функции изменится на $\delta_{rm} = c_r - c_m$. Для того чтобы в дальнейшем значение целевой функции вновь изменилось на такую же величину $\delta_{rm} = c_r - c_m$, необходимо, чтобы на месте порождающего элемента $i_m = j$ путем транспозиций вида (1) оказался элемент $j+2$. Это невозможно, поскольку если транспозиции не повторяются, элемент j может быть задействован в транспозиции только с элементом $j-1$.

Лемма 5. Если к перестановке $p^* \in P_n$, $p^* = \arg\min_{p \in P_n} \sum_{j=1}^{n} c_j p_j$, применить композицию Σ_k транспозиций $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}\}$ такую, что $\sigma_{i_z} \neq \sigma_{i_y}$ $\forall z, y \in \{1, \ldots, k\}$, то $\forall \delta_{rm} \in \Delta$, $r, m \in J_n$, соответствующая применяемой транспозиции из множества $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}\}$ будет увеличивать значение целевой функции.

Доказательство. Исходная перестановка $p^* \in P_n$ является точкой минимума функции $L(p)$. Следовательно [6, 10], элементы перестановки $p^* \in P_n$ имеют вид

$$p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*) = \arg\min_{p \in P_{nk}} \sum_{j=1}^{n} c_j p_j, \ c_j \in R^1, \ p_{m_j}^* = j,$$

а последовательность $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ такова, что $c_{m_1} \geq c_{m_2} \geq \ldots \geq c_{m_n}$.

Проведем доказательство от противного. Предположим, что в результате применения некоторых транспозиций из множества $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}\}$ была получена промежуточная перестановка $p \in P_n$. Предположим также, что при применении еще одной транспозиции $\sigma_j \in \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}\}$, не используемой ранее, будет получена такая перестановка $p_j = \sigma_j(p)$, что $L(p_j) - L(p) < 0$.

Рассмотрим $p_j = \sigma_j(p)$ и учтем, что ранее к перестановке p были применены произвольные транспозиции из множества $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}\}$. Следовательно, в перестановке p порождающие элементы $\{j, j+1\}$, участвующие в транспозиции σ_j, соответствуют произвольным коэффициентам c_a, c_b. Рассмотрим разность

$$L(p_j) - L(p) = ((j+1) \cdot c_a + j \cdot c_b) - (j \cdot c_a + (j+1) \cdot c_b) =$$
$$= ((j+1) \cdot c_a - j \cdot c_a) + (j \cdot c_b - (j+1) \cdot c_b) = c_a - c_b.$$

Исходя из предположения, что $L(p_j) - L(p) < 0$, разность коэффициентов подчиняется следующему неравенству: $c_a - c_b < 0$. Тогда $c_a < c_b$.

Учтем, что элементы $\{j, j+1\}$ в перестановке $p^* \in P_n$ были расположены таким образом, что элементу j соответствовал коэффициент c_j, а $j+1$ — коэффициент c_{j+1}, причем исходя из правила построения $p^* \in P_n$ имеем $c_j \geq c_{j+1}$. Но в перестановке $p \in P_n$ элементы $\{j, j+1\}$ были расположены таким образом, что элементу j соответствовал коэффициент c_a, а элементу $j+1$ — коэффициент c_b, причем $c_a < c_b$.

Соотношение коэффициентов $c_a < c_b$ невозможно, так как элемент j при генерации перестановки p мог быть задействован в транспозициях только с порождающими элементами, которые меньше его; следовательно, он мог соответствовать только коэффициенту c_{j-w} такому, что $c_{j-w} \geq c_j$, где $w \in \{1, 2, \ldots, j\}$.

Аналогично элемент $j+1$ мог быть задействован в транспозициях только с порождающими элементами, которые больше его, и соответствовать коэффициенту c_{j+u} такому, что $c_{j+1} \geq c_{j+u}$, где $u \in \{1, 2, \ldots, n-j\}$. Тогда для всех рассмотренных выше коэффициентов справедливо соотношение $c_a = c_{j-w} \geq c_j \geq$ $\geq c_{j+1} \geq c_{j+u} = c_b$, что противоречит исходному предположению $c_a < c_b$ и доказывает утверждение.

Основываясь на леммах 4 и 5, можно сформулировать следующее утверждение об оценке минимума линейной функции на циклических перестановках.

Пусть известна точка минимума функции $L(p)$ на множестве перестановок P_n: $p^* \in P_n$, $p^* = \arg\min_{p \in P_n} \sum_{j=1}^{n} c_j p_j$, и его циклическая структура состоит из k циклов. Пусть Δ — множество всех $\delta_{rm} = |c_r - c_m|$, $r, m \in J_n$. Упорядочим элементы множества Δ по возрастанию: $\delta^1 \leq \delta^2 \leq \ldots \delta^N$, где $N = C_n^2$, и обозначим $\sum_{i=1}^{k} \delta^i$ сумму k первых элементов из упорядоченных элементов $\delta^1 \leq \delta^2 \leq \ldots \leq \delta^N$. Пусть также $p^{*C} \in P_n^C$ — точка минимума функции $L(p)$ на множестве циклических перестановок: $p^{*C} = \arg\min_{p \in P_n^C} \sum_{j=1}^{n} c_j p_j$.

Утверждение 2. Для минимума линейной функции $L(p)$ вида (2) на множестве циклических перестановок P_n^C справедлива следующая оценка:

$$\min_{p \in P_n^C} L(p) \geq L(p^*) + \sum_{i=1}^{k} \delta^i.$$

Доказательство. Если перестановка $p^* \in P_n$, $p^* = \arg\min_{p \in P_n} \sum_{i=1}^{n} c_i p_i$, состоит из k циклов, то для того чтобы из p^* получить циклическую перестановку, необходимо применить минимум k транспозиций соединения вида (1).

Согласно леммам 4 и 5 все k транспозиций будут увеличивать значение целевой функции, но любая $\delta_{rm} = |c_r - c_m|$, $r, m \in J_n$, участвует в увеличении только один раз. Следовательно, если будут выбраны k минимальных значений из всего множества Δ, то их сумма будет минимальным значением, на которое необходимо будет увеличить $p^* \in P_n$. Это доказывает справедливость оценки.

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПОЗИЦИИ ТРАНСПОЗИЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПЕРЕСТАНОВОК

Доказанные утверждения составляют основу следующей стратегии решения задач вида (2), (3) и (4), (5).

1. Нахождение $p^* \in P_n$ такого, что $p^* = \arg\min_{p \in P_n} \sum_{i=1}^{n} c_i p_i$.

Таблица 1

Число переменных, n	Число совпадающих решений	Чило циклов, k	Мощность, M	T, сек
3	20	1,9	0,9	0,00175
4	19	2,2	1,1	0,00490
5	19	2,1	0,95	0,00945
6	19	2,2	1	0,01855
7	17	2,35	1,05	0,02945
8	20	2,85	1,3	0,05075

2. Если $p^* \in P_n^C$, то решение задачи (2), (3) найдено. Иначе разбиение перестановки $p^* \in P_n$ на произведение циклов. Подсчет k — количества циклов, из которых состоит исходная перестановка.

3. Выбор из всех возможных $n-1$ транспозиции вида (1) $k-1$ транспозицию соединения таких, чтобы с их помощью можно было объединить все k циклов.

4. Подсчет количества $M = |\Sigma_{k+1}(p^*)|$ различных перестановок, которые можно создать с помощью композиции Σ_{k-1}, соединяющей $k-1$ транспозицию согласно утверждению 1.

5. Генерация перестановок путем применения к перестановке $p^* \in P_n$ композиции Σ_{k-1}, учитывая соотношение пересекающихся и непересекающихся транспозиций в композиции согласно утверждению 1.

6. Подсчет значений функции цели согласно леммам 4 и 5 на всех порожденных в п. 5 перестановках. Перестановка с минимальным значением целевой функции принимается как приближенное решение исходной задачи.

7. Оценка полученного решения, основанная на утверждении 2.

Изложенная стратегия оптимизации линейных функций на циклических перестановках без ограничений реализована программно, проведены вычислительные эксперименты. Случайным образом в интервале [–200; 200] генерировались коэффициенты функции цели задач. Эксперименты проводились за два этапа. На первом этапе решались задачи размерности n до 8 переменных, их решения сравнивались с решениями, полученными полным перебором. В рамках каждой размерности были рассчитаны средние значения количества циклов k в перестановке $p^* \in P_n$ и средняя мощность M множества порождаемых циклических перестановок. Среднее время решения задач в рамках каждой размерности обозначим T. Полученные результаты представлены в табл. 1.

На втором этапе решались задачи большей размерности. Для каждой размерности было решено 20 задач со случайными исходными данными.

На основании утверждения 2 полученные приближенные решения задачи (2), (3) были оценены следующим образом. Для каждой задачи в рамках одной размерности элементы множества Δ были упорядочены по возрастанию: $\delta^1 \le \delta^2 \le \ldots \le \delta^N$ и получено значение $\sum_{i=1}^{k} \delta^i$, после чего в рамках одной размерности было вычислено среднее значение этих сумм: $AVG\left(\sum_{i=1}^{k} \delta^i\right) = \Delta_A$. Вычислялась разность между минимумом функции на перестановках и полученным приближенным решением задачи (2), (3) $L(p^{*C}) - L(p^*)$ для каждой задачи и было посчитано среднее от всех этих значений в рамках каждой размерности: $AVG(L(p^{*C}) - L(p^*)) = L_A$. Величины Δ_A и L_A подчиняются следующему неравенству: $\Delta_A \le L_A$, что подтверждается приведенными данными. Полученные результаты представлены в табл. 2.

Таблица 2

Число задач, n	Δ_A	L_A	Число циклов, k	Мощность, M	T, сек
20	4,9	5,1	3,5	1,4	0.91
30	2,6	2,7	3,4	1	2.31
40	2,5	2,5	4,3	1	9.98
50	1,6	1,6	3,9	1	11.54
60	0,7	0,7	3,9	1	20.74
70	1,2	1,2	5,6	1,3	90.75
80	2	2,05	5,05	1,1	105.42
100	2,8	2,8	5,8	1,1	235.77

Результаты экспериментов сравнивались с результатами решения задачи (2), (3) методом ветвей и границ [10]. Вычислительные эксперименты показали меньший рост времени работы алгоритма при значительном росте размерности задач по сравнению с решением данной задачи методом ветвей и границ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье предложена стратегия решения задачи оптимизации линейной функции на множестве циклических перестановок на основе свойств транспозиций специального вида.

Исследованы свойства класса транспозиций, согласно которым данные транспозиции соответствуют критерию смежности в перестановочном многограннике. Исследование этих свойств позволило сформулировать и доказать ряд утверждений относительно влияния данных транспозиций на произвольную перестановку.

Доказаны следующие утверждения:

— количество различных перестановок, которые можно получить, применяя заданную композицию транспозиций к некоторой перестановке, если транспозиции могут следовать в различном порядке;

— разные последовательности транспозиций, которые в заданной композиции при применении к некоторой перестановке приводят к одной результирующей перестановке.

Для приближенного решения, полученного с помощью описанной стратегии, обоснована оценка, которая строится на основании минимума заданной линейной функции на множестве перестановок и упорядоченных разностей коэффициентов данной функции. Предложенная стратегия реализована программно и протестирована на задачах различной размерности с исходными данными, генерируемыми случайным образом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гребенник И.В., Юрченко Л.Ю. Упорядочение перестановок при решении задач комбинаторной оптимизации с линейной целевой функцией. *Системи обробки інформації.* 2007. Вип. 8 (66). С. 139–142.
2. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. Москва: Наука, 1981. 344 с.
3. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев: Наук. думка, 1986. 268 с.
4. Гребенник И.В., Панкратов А.В., Чугай А.М., Баранов А.В. Упаковка n-мерных параллелепипедов с возможностью изменения их ортогональной ориентации в n-мерном параллелепипеде. *Кибернетика и системный анализ.* 2010. № 5. С. 122–131.
5. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Пер. с англ. Москва: Мир, 1990. 440 с.

6. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ: Ін-т системних досліджень освіти, 1993. 188 с.
7. Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання. Київ: Наук. думка, 2009. 266 с.
8. Bóna M. Combinatorics of permutations. Boca Raton; London; New York: Chapman & Hall/CRC, 2004. 337 с.
9. Stoyan Yu.G., Grebennik I.V. Description and generation of combinatorial sets having special characteristics. *International Journal of Biomedical Soft Computing and Human Sciences,* Special volume "Bilevel Programming, Optimization Methods, and Applications to Economics." 2013. Vol. 18, N 1. P. 83–88.
10. Гребенник И.В., Литвиненко А.С., Титова О.С. Оптимизация линейной функции на множестве циклических перестановок. *Бионика интеллекта.* 2012. № 2 (79). С. 8–12.
11. Исаченко Ю.А. Применение полиэдрального подхода к задаче на циклических перестановках. *Современные компьютерные информационные технологии*. Т. 2. Гродно: ГрГУ, 2008. С. 203–206.
12. Гребенник И.В., Черная О.С. Влияние некоторых транспозиций на циклическую структуру перестановок. *Кибернетика и системный анализ.* 2015. № 6. С. 128–136.
13. Grebennik I., Chorna O. Elements transpositions and their impact on the cyclic structure of permutations. *ECONTECHMOD: An International Quarterly Journal on Economics of Technology and Modelling Processes.* 2015. Vol. 4, N 3. 33–38.
14. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике. *ДАН УССР.* Сер. А. 1988. № 3. С. 238–240.
15. Верещагин Н. К., Шень А. Начала теории множеств. Ч. 1. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. 2-е изд. Москва: МЦНМО, 2002. 128 с.

Надійшла до редакції 07.07.2016

І.В. Гребеннік, О.С. Чорна

СПЕЦІАЛЬНІ ТРАНСПОЗИЦІЇ ЕЛЕМЕНТІВ ПЕРЕСТАНОВОК І ВЛАСТИВОСТІ КОМПОЗИЦІЇ

Анотація. Запропоновано стратегію розв'язання задачі оптимізації лінійної функції на множині циклічних перестановок на основі властивостей транспозицій спеціального виду. Досліджено властивості спеціального класу транспозицій, доведено твердження про вплив композицій таких транспозицій на довільну перестановку. Для наближеного розв'язку, отриманого за допомогою описаної стратегії, обгрунтовано оцінку.

Ключові слова: комбінаторна оптимізація, лінійна функція, перестановки, транспозиції, циклічні перестановки.

I.V. Grebennik, O.S. Chorna

SPECIAL TRANSPOSITIONS OF PERMUTATIONS ELEMENTS AND PROPERTIES OF THEIR COMPOSITION

Abstract. In this paper, we propose a strategy for solving the problem of optimization of a linear function on the set of cyclic permutations. The strategy is based on the properties of the transpositions of a special kind. The properties of this class of transpositions are investigated. Assertions about the impact of compositions of such transpositions on an arbitrary permutation are proved. For the approximate solutions obtained using the above strategy, estimation is substantiated.

Keywords: combinatorial optimization, linear function, permutations, transpositions, cyclic permutations.

Гребенник Игорь Валериевич, доктор техн. наук, профессор, заведующий кафедрой Харьковского национального университета радиоэлектроники, e-mail: igorgrebennik@gmail.com.

Черная Ольга Сергеевна, ассистент кафедры Харьковского национального университета радиоэлектроники, e-mail: titovaolga90@gmail.com.