УДК 517.9

Э.Р. СМОЛЬЯКОВ

НАИБОЛЕЕ ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ КОНФЛИКТНЫХ ЗАДАЧ С ПОБОЧНЫМИ ИНТЕРЕСАМИ[1]

Аннотация. Предложено обобщенное понятие равновесия для статических и динамических конфликтных задач (описанных дифференциальными уравнениями), которые рассматриваются на частично пересекающихся игровых множествах. Его эффективность для поиска решения бескоалиционных и кооперативных игр как в статической, так и динамической постановках продемонстрирована на примерах.

Ключевые слова: игры на пересекающихся множествах, конфликтные равновесия.

ВВЕДЕНИЕ

В классической теории игр [1–10] не исследовались и не формулировались задачи, в которых участники имеют побочные доходы, не задействованные в рассматриваемом конфликте. Впервые подобные задачи были сформулированы в работах [11–16], в которых получены базовые теоретические результаты, обусловившие определение ряда принципиально новых понятий равновесий, в частности понятия «сильной» угрозы.

В [17–21] сформированы основы неклассической теории игр и конфликтов, видоизменение и дополнение которых новыми понятиями позволило разработать теорию конфликтных задач с побочными интересами (доходами) участников. Эти задачи характеризуются тем, что каждый получает свой суммарный доход на своем индивидуальном игровом множестве (поле деятельности), лишь частично пересекающемся с игровыми множествами других участников. Явные конфликтные ситуации возникают только на пересечениях игровых множеств (коалиций и участников), а на некоторой части игрового множества любой коалиции (или индивидуального участника), не пересекающейся с игровыми множествами других коалиций (или участников), коалиция (или участник) имеет доходы, которые называем побочными.

В данной работе в общей постановке исследуется влияние побочных доходов каждого участника на его суммарный доход, получаемый на всем его игровом поле. Предлагается еще одно равновесие, которое, как демонстрируется на примерах статических и дифференциальных игр, позволяет удовлетворить всех участников и гарантировать решение как бескоалиционных, так и кооперативных игр. Находить решение, устраивающее всех участников, без использования этого равновесия достаточно сложно.

ФОРМУЛИРОВКИ РАВНОВЕСИЙ И ПОИСК РЕШЕНИЯ В СТАТИЧЕСКИХ ИГРАХ

Чтобы не усложнять изложение громоздкими непринципиальными деталями и облегчить понимание и возможности применения нового понятия равновесия, рассмотрим статические задачи с двумя участниками в формулировке работы [16] при ограничениях, не снижающих общности получаемых результатов.

Допущение 1. Пусть Q_i, $i=1,2$, — метрические пространства, $Q=Q_1\times Q_2$; G_i — компактные множества в пространстве Q, причем $G=G_1\cap G_2\neq\varnothing$,

[1] Работа поддержана Программой РФФИ № 15-01-08838-а.

$G' = G_1 \cup G_2$; пусть также на множестве G_i определена непрерывная функция (функционал) $J_i(q)$, $i = 1, 2$, $q = (q_1, q_2)$, q_i — стратегия *i*-го участника конфликта.

Этот участник имеет возможность выбирать свою стратегию q_i из проекции $\Pr_{Q_i} G'$ множества G' на пространство Q_i или сечения $G'(q_k)$ $(k \neq i, i = 1, 2)$ и стремится обеспечить максимум своей платежной функции (функционала) $J_i(q)$, определенной на его индивидуальном игровом множестве $G_i \subseteq Q$, имеющем непустое пересечение G с аналогичным индивидуальным игровым множеством G_k другого игрока, максимизирующего на своем множестве свою платежную функцию J_k. По сути, это означает, что интересы игроков сталкиваются только на множестве G, на котором они вступают в конкурентные отношения, а на множествах $G' \setminus G_i$ и $G' \setminus G_k$ они получают свои побочные доходы, не связанные с бизнесом на множестве G.

Приведем предварительно расширенное понятие *A*-равновесия из работ [11–16, 19, 20] — понятие наиболее слабого равновесия, рассчитанного на любые конфликтные задачи (в том числе задачи с побочными интересами участников) и обобщающего все известные понятия равновесия [1–21].

Определение 1. Точку (ситуацию) $q^* \in G_i$ назовем A_i-экстремальной для *i*-го участника, если при заданной стратегии q_k^* *k*-го участника допустимой для *i*-го участника оказывается только одна стратегия $q_i^* = G_i(q_k^*)$;

• или если любой стратегии $q_i \in G_i(q_k^*) \setminus q_i^*$ *i*-го участника можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\hat{q}_k = \hat{q}_k \langle q_i \rangle \in$ $\in G_i(q_i)$ *k*-го участника такую, чтобы имело место отношение

$$J_i(q_i, \hat{q}_k) \leq J_i(q^*); \tag{1}$$

этот случай назовем задачей 1-го типа;

• или такую стратегию, чтобы имело место отношение

$$J_i(q_i, \hat{q}_k) \leq J_i(q^*), \ \hat{q}_k \in G'(q_i); \tag{2}$$

этот случай назовем задачей 2-го типа, которая отличается от задачи 1-го типа тем, что в ней, помимо угроз $\hat{q}_k$, используемых в (1), допускаются еще («сильные») угрозы на множестве $G'(q_i) \setminus G_i(q_i)$, на котором угрожающий *k*-й игрок получает доход, а *i*-й игрок не получает ничего;

• или если любой стратегии $q_i \in G(q_k^*) \setminus q_i^*$ *i*-го участника можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\hat{q}_k$ другого участника такую, чтобы имело место отношение

$$J_i(q_i, \hat{q}_k) \leq J_i(q^*), \ \hat{q}_k \in G(q_i); \tag{3}$$

этот случай назовем задачей 3-го типа, характеризующейся тем, что вспомогательная игра рассматривается только на пересечении G множеств G_i и G_2.

Ситуацию q^* назовем ситуацией *A*-равновесия в задачах 1-, 2-, 3-го типов, если соответственно условия (1), (2), (3) удовлетворяются в точке $q^* \in G$ для $i = 1, 2$, т.е. если $q^* \in A_1 \cap A_2 = A$.

Если множество A в задачах с побочными интересами участников в классе наиболее естественных слабых угроз (1) пусто, то его можно заменить приведенным ниже множеством P [16], в формулировке которого используется понятие оптимальности по Парето: ситуацию q^* называют оптимальной по Парето [22], если несовместны неравенства $J_i(q) \geq J_i(q^*)$, $q \in G$, $q \neq q^*$, $i = 1, 2$, среди которых хотя бы одно строгое.

Определение 2. Ситуацию $q^* \in G_i$ назовем P_i-экстремальной, если при каждой попытке $q_i \in G_i(q_k^*) \setminus q_i^*$ i-го участника ($i = 1, 2$, $k \neq i$) увеличить свой выигрыш по отношению к выигрышу в ситуации q^* за счет перехода из нее в более выгодную ситуацию q_i окажется, что ситуация q^* является точкой Парето (т.е. индивидуально-паретовским равновесием [12, с. 145]) по отношению ко всем точкам сечения $G'(q_i)$. Если ситуация $q^* \in G_i$ — максимум функционала J_i в сечении $G_i(q_k^*)$, то она полагается P_i-экстремальной по определению. Ситуацию q^* назовем P-равновесием (или P-оптимальной), если она P_i-экстремальна одновременно для $i = 1, 2$.

Определение 3. Ситуацию $q^* \in P_i$ назовем D_i^{PP}-экстремальной, если она удовлетворяет включению

$$q^* \in \operatorname{Arg\,Par}_{q_i \in P_i(q_k^*)} J(\operatorname{Arg\,Par}_{q_k \in P_i(q_i)} J) = D_i^{PP}(q^*), \ i = 1, 2, \ k \neq i. \qquad (4)$$

Назовем ситуацию q^* D^{PP}-равновесием, если условия (4) удовлетворяются для $i = 1, 2$.

Заметим, что даже незначительное усиление D^{PP}-равновесия, определяемое равенствами

$$\max_{q_i \in P_i(q_k^*)} J_i(\operatorname{Arg\,max}_{q_k \in P_i(q_i)} J_k(q_i, q_k)) = J_i(q^*), \ i = 1, 2,$$

предложенное в [16] и названное D^P-равновесием, нередко оказывается пустым в отличие от предлагаемого D^{PP}-равновесия.

Следующая теорема, по сути, является следствием определений приведенных в ней равновесий.

Теорема 1. Имеют место включения $P \supseteq D^{PP} \supseteq D^P$.

Отметим, что поиск P-, D^{PP}- и D^P-равновесий довольно трудоемок, в связи с чем искать их следует только тогда, когда без их использования решение конфликтной задачи не определяется однозначно.

Для решения приведенных ниже задач потребуются, как минимум, еще два определения равновесия [13, 17–20].

Определение 4. Ситуацию $q^* \in A_i$ назовем B_i-экстремальной, если образующая ее стратегия другого игрока удовлетворяет условию

$$\max_{q_k \in A_i(q_i^*)} J_k(q_i^*, q_k) = J_k(q^*), \ k = 1, 2, \ k \neq i. \qquad (5)$$

Назовем ситуацию $q^* \in G$ B-равновесием, если $q^* \in B_1 \cap B_2$, где B_i — множество всех B_i-экстремальных ситуаций.

Определение 5. Ситуацию $q^* \in B_i$ назовем $\overline{D}_i$-экстремальной, если $\max_{q \in B_i} J_i(q) = J_i(q^*)$, $i = 1, 2$, или, что то же самое, если

$$\max_{q_i \in \mathrm{Pr}_{Q_i} A_i} J_i(\operatorname{Arg\,max}_{q_k \in A_i(q_i)} J_k(q_i, q_k)) = J_i(q^*). \qquad (6)$$

Назовем ситуацию q^* $\overline{D}$-равновесием, если $q^* \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 = \overline{D}$.

В любых конфликтных задачах, в которых существует $\overline{D}$-равновесие, оно оказывается наиболее устойчивым и наивыгоднейшим для всех участников. Однако отметим, что оно существует не всегда.

Для решения прикладных задач с побочными интересами участников полезно следующее предложение [16], дополненное D^{PP}-равновесием.

Предложение 1. В общем случае, если в игровой задаче с несовпадающими и пересекающимися игровыми множествами G_i:

1) сильные угрозы (2) недопустимы (по соглашению между участниками) и множество A в естественном классе слабых угроз (1) (т.е. в задаче 1-го типа) пусто, то наисильнейшие равновесия (и решение задачи в том или ином смысле) всегда могут быть найдены по крайней мере для задачи 3-го типа (т.е. на пересечении G игровых множеств) и с помощью P-, D^{PP}- и D^P-равновесий;

2) сильные угрозы (2) недопустимы и множество A в задаче 1-го типа не пусто, то следует в качестве основного использовать решение задачи 1-го типа (со всеми возможными его итерациями [11–21]), а для оценки влияния побочных интересов на решение исходной игры — решение задачи 3-го типа; причем при несовпадении решений задач 1- и 3-го типов за основу принять решение задачи 1-го типа, а решение задачи 3-го типа и P-, D^{PP}-, D^P-равновесия рассматривать как возможную его коррекцию; совпадение решений задач 1- и 3-го типов свидетельствует об отсутствии (или почти полном отсутствии) влияния побочных доходов на решение игры (что благоприятно для участников);

3) сильные угрозы (2) допустимы и при этом множество A в задаче (1) пусто, то в качестве основного решения исходной задачи следует рассматривать решение задачи 2-го типа (2), а решение задачи 3-го типа (3), если оно отличается от решения задачи (2), а также P-, D^{PP}- и D^P-равновесия рассматривать только как возможность корректировки с их помощью решения задачи 2-го типа; если во всех случаях сильнейшие равновесия одинаковы, то это означает, что побочные доходы участников не влияют на решение игры;

4) сильные угрозы (2) допустимы и множество A в задаче 1-го типа не пусто, то следует найти решения задач 1-, 2- и 3-го типов; если окажется, что в них наисильнейшие равновесия одни и те же, то это означает, что на решение исходной задачи не влияют никакие типы угроз, ни побочные интересы участников, что наиболее благоприятно для них; в случае различающихся равновесий следует рассматривать в качестве основного решение задачи 2-го типа, а решения задач 1-, 3-го типов и P-, D^{PP}-, D^P-равновесия использовать в качестве корректировочных.

Пример 1. Рассмотрим конфликтную (игровую) задачу с двумя участниками, в которой каждый игрок максимизирует свою (матричную) платежную функцию на индивидуальном для него игровом множестве, частично пересекающемся с игровым множеством другого участника, т.е. игру с побочными интересами участников:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 14 & \cdot & 12 & 10 \\ 11 & \cdot & 9 & 8 \\ 7 & 6 & \cdot & 5 \\ 4 & 3 & \cdot & 2 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} \cdot & 3 & \cdot & 2 \\ 4 & 10 & 11 & 6 \\ 9 & \cdot & 5 & 13 \\ 8 & 12 & 7 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Оба игрока располагают стратегиями q_1 и q_2, каждая из которых принимает в этой игре четыре значения. Стратегия q_1 — выбор 1-м игроком любой из четырех строк, а стратегия q_2 — выбор 2-м игроком любого из четырех столбцов.

В данной задаче игровое множество G_i i-го участника задается теми элементами матрицы J_i, в которых приведены возможные значения его выигры-

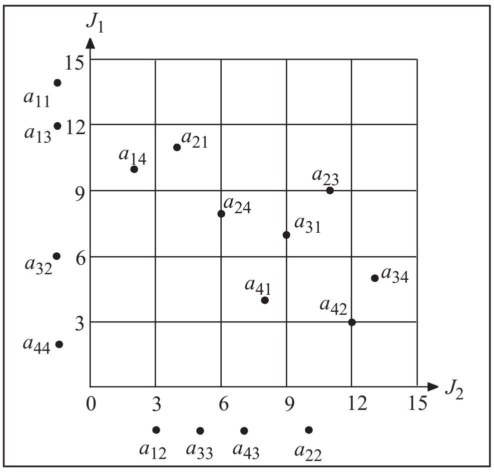

Рис. 1

ша. Множество $G' = G_1 \cup G_2$ включает все 16 элементов матриц, а множество G — только восемь: $G = G_1 \cap G_2 = (a_{14}, a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{34}, a_{41}, a_{42})$.

Исследуем, в какой мере побочные интересы участников и возможности использования ими разных типов угроз влияют на их доходы и решение игры, рассматриваемой как кооперативная или некооперативная.

Сначала найдем наислабейшие равновесия в классе слабых угроз, т.е. A-равновесия (1):

$$A_1 = \begin{pmatrix} + & \cdot & + & + \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & + & + \\ + & \cdot & + & + \\ + & + & + & \cdot \end{pmatrix}.$$

Поскольку множество $A = A_1 \cap A_2$ пустое, следовательно, не существует любых более сильных равновесий, определяемых на нем. Найдем P-равновесие, которым можно заменить в данном случае A-равновесие в определении 1, и новое D^{PP}-равновесие. Существенно упростить поиск этих равновесий помогает отображение матриц J_1 и J_2 на плоскость (J_1, J_2), приведенное на рис. 1, где по вертикали отложены значения матричной платежной функции J_1, а по горизонтали — значения J_2.

Не изучавшиеся до настоящего времени задачи с побочными интересами обусловливают использование не применяемой ранее в математике формы отображений множеств G_1 и G_2 на плоскость (J_1, J_2) (см. рис. 1). В первом квадранте приводится отображение $J(G) = (J_1(G), J_2(G))$ только множества G, на котором определены обе функции: J_1 и J_2. Отображение множества $G' \setminus G_2$ условно приводится левее оси J_1, отображение множества $G' \setminus G_1$ — ниже оси J_2.

Поскольку в ситуациях $(a_{12}, a_{33}, a_{43}, a_{22})$ определена платежная функция J_2 только 2-го участника, то ее значения в этих элементах располагаются вне первого квадранта, ниже оси J_2, и помечены элементами, размещенными в местах, соответствующих численному значению функции J_2 в этих элементах. Аналогично объясняется расположение левее оси J_1 тех элементов матрицы J_1, в которых не определена платежная матрица J_2.

Множества равновесий, задаваемые определением 2 и матрицами P_1, P_2 и P, имеют следующий вид:

$$P_1 = \begin{pmatrix} + & \cdot & + & + \\ + & \cdot & + & + \\ \cdot & + & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} \cdot & + & \cdot & + \\ + & \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & + \\ + & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + \\ + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Продемонстрируем процедуру поиска этих равновесий на примере одного равновесия. Ситуация $a_{23} \in P_1$ является P_1-экстремальной, поскольку при попытке 1-го игрока улучшить ситуацию за счет перехода из нее в доступную для перехода и более выгодную ситуацию a_{13} оказывается, что ситуация a_{23} оптимальна по Парето по отношению к множеству всех четырех элементов первой строки (что видно из рис. 1), и даже по отношению ко всем остальным 15 элементам. Ситуация $a_{23} \in P_2$, так как 2-й игрок не может ее улучшить, поскольку именно в ней во второй строке его матрицы J_2 достигается максимум (равный 11), является также и P_2-экстремальной, т.е. P-равновесием.

Аналогично определяют остальные P-равновесные ситуации. Причем из четырех непустых элементов матрицы P только три элемента (a_{21}, a_{23}, a_{34}) являются D^{PP}-равновесиями. Приведем для примера процедуру определения элемента a_{21}:

$$a_{21} \in D_1^{PP}(a_{21}) = \text{Arg Par}_{q_1 \in P_1(q_2^*)} J(\text{Arg Par}_{q_2 \in P_1(q_1)} J) =$$

$$= \text{Arg Par}\, J(a_{11}, a_{14}; a_{21}, a_{23}) = (a_{11}, a_{21}, a_{23}),$$

$$a_{21} \in D_2^{PP}(a_{21}) = \text{Arg Par}_{q_2 \in P_2(q_1^*)} J(a_{21}, a_{31}; a_{23}) = (a_{21}, a_{23}).$$

Рассмотрим далее исходную задачу в классе сильных угроз (s), т.е. как вспомогательную задачу типа (2). В ней множество A^s уже не пусто, поэтому нет необходимости вычислять сложные множества P, D^{PP} и D^P в классе сильных угроз:

$$A_1^s = \begin{pmatrix} + & \cdot & + & + \\ + & \cdot & + & + \\ + & + & \cdot & + \\ + & + & \cdot & + \end{pmatrix}, \quad A_2^s = \begin{pmatrix} \cdot & + & \cdot & + \\ + & + & + & + \\ + & \cdot & + & + \\ + & + & + & \cdot \end{pmatrix}, \quad A^s = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + \\ + & \cdot & + & + \\ + & \cdot & \cdot & + \\ + & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Множество равновесий B^s, определяемое формулами (5), значительно усиливающее множество A^s-равновесий, включает три ситуации (a_{14}, a_{23}, a_{42}), а более сильное $\overline{D}^s$-равновесие, определяемое формулами (6), оказывается пустым:

$$B_1^s = (a_{14}, a_{23}, a_{34}, a_{42}), \; B_2^s = (a_{14}, a_{23}, a_{21}, a_{42}), \; B^s = (a_{14}, a_{23}, a_{42});$$

$$\overline{D}_1^s = a_{14}, \; \overline{D}_2^s = a_{42}, \; \overline{D}^s = \varnothing.$$

Остается рассмотреть важную задачу 3-го типа, так как она ставится на пересечении игровых множеств участников, т.е. именно на том множестве, на котором участники напрямую конфликтуют.

Во вспомогательной игре на множестве $G = G_1 \cap G_2$ платежные матрицы игроков имеют следующий вид:

$$J_1^G = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 10 \\ 11 & \cdot & 9 & 8 \\ 7 & \cdot & \cdot & 5 \\ 4 & 3 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad J_2^G = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 2 \\ 4 & \cdot & 11 & 6 \\ 9 & \cdot & \cdot & 13 \\ 8 & 12 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

В данной игре не существует понятия сильных угроз и решение ищется в естественном классе слабых угроз, т.е. решается задача 1-го типа на множестве G, для которой получаем

$$A_1^G = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + \\ + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \; A_2^G = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \; A^G = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Усилениями A^G-равновесия являются следующие равновесия:

$$B_1^G = (a_{14}, a_{23}, a_{42}), \; B_2^G = (a_{14}, a_{23}, a_{31}, a_{42}), \; B^G = (a_{14}, a_{23}, a_{42}),$$

$$\overline{D}_1^G = a_{14}, \; \overline{D}_2^G = a_{42}, \; \overline{D}^G = \varnothing.$$

Таким образом, во вспомогательных задачах на пересечении G и в случае учета сильных угроз наисильнейшие равновесия одни и те же (a_{14}, a_{23}, a_{42}), а во вспомогательной игре, основанной на использовании равновесий P и D^{PP}, равновесия частично отличаются, т.е. в исходной игре побочные доходы оказывают некоторое влияние на ее решение. Далее выясним, в какой степени это имеет место.

Отметим, что одно из равновесий оказывается наисильнейшим одновременно в трех вспомогательных задачах: $a_{23} \in D^{PP} \cap B^G \cap B^s$. Формально на этом основании можно принять ситуацию a_{23} в качестве единственного наисильнейшего равновесия в исходной игре (когда она рассматривается как бескоалиционная) и взять его за основу при определении справедливого дележа (когда игра рассматривается как кооперативная) кооперативного дохода, равного 20 и достигаемого (случайно) именно в ситуации a_{23}, причем в этом случае дележ принимает следующие значения [13, с. 51; 19, с. 174, 175; 20, с. 92, 93]:

$$y_1 = 20\frac{9}{20} = 9, \; y_2 = 20\frac{11}{20} = 11,$$

т.е. доля y_i i-го игрока задается произведением кооперативного дохода, равного 20, на дробь, числитель которой равен выигрышу i-го игрока в наисильнейшей равновесной ситуации, а знаменатель — выигрышу обоих игроков в этой ситуации.

Необходимо учесть, что ситуация a_{23} является незначительно более сильным равновесием, чем другие равновесные ситуации, поэтому вряд ли оба участника согласятся с таким дележом. Они будут оценивать и другие возможности, учитывающие разные группы равновесий. Например, во вспомогательных задачах (на G и с сильными угрозами) наисильнейшими могут быть три эквивалентные по устойчивости ситуации (a_{14}, a_{23}, a_{42}), которые с учетом п. 3 предложения 1 будут рассматриваться как наиболее важные равновесия с указанными в предложении преимуществами. В этом случае дележ примет следующий вид:

$$y_1^s = y_1^G = 20\frac{10+9+3}{(10+9+3)+(2+11+12)} = \frac{20 \cdot 22}{47} \approx 9{,}35, \; y_2^s = y_2^G = \frac{20 \cdot 25}{47} = 10{,}65.$$

Полезно оценить также дележ, получаемый для трех D^{PP}-равновесных ситуаций (a_{21}, a_{23}, a_{34}): $y_1^{PP} \approx 9{,}4$, $y_2^{PP} \approx 10{,}6$.

Поскольку все найденные дележи различаются незначительно, побочные доходы слабо влияют на решение и игроки в кооперативной игре могут согласиться на некое среднее между полученными дележами.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С ПОБОЧНЫМИ ИНТЕРЕСАМИ УЧАСТНИКОВ

Оценим возможности использования нового D^{PP}-равновесия для поиска решения динамических задач, описываемых дифференциальными уравнениями. Для их решения более эффективным, чем понятие A-равновесия, является понятие A^c-равновесия ($A^c \subseteq A$) [11–16], для которого можно найти необходимые условия равновесности, аналогичные условиям оптимальности для вариационных задач. На их основе возможно сведение исходной дифференциальной игры к некоторой совокупности статических «локальных» игровых задач, в которых платежные функции — гамильтонианы. Решение таких задач гораздо проще, чем решение исходной дифференциальной игры.

Рассмотрим конфликтующие динамические системы (в постановке работы [15]), описываемые дифференциальными уравнениями, в которых i-й участник ($i=1,\dots,N$), используя чистые $u_i(t)$ или смешанные стратегии $q_i(u_i,t)$, стремится обеспечить максимум своего платежного функционала (критерия):

$$J_i(q)=\int_T dt \int_{W_i(t)_i} f_0^i(u,x,t)\,dq,\ \ i=1,\dots,N, \tag{7}$$

при ограничениях

$$\dot{x}=\int_{W'(t)} f(u,x,t)\,dq,\ \ t\in T=[t_0,t_1]\subseteq E^1, \tag{8}$$

$$(u,t)\in W'\times T, \tag{9}$$

$$x_j(t_0)=x_j^0,\ \ j=1,\dots,n,\ \ x_k(t_1)=x_k^1,\ \ k\in K\subseteq 1,\dots,n, \tag{10}$$

где $x(x_1,\dots,x_n)\in E^n$ — евклидово n-мерное пространство; $U=\bigcup_{k=1}^{N}U_k$; U_k — конечномерное пространство, $u(t)=(u_1(t),\dots,u_N(t))$; $W'=\bigcup_{k=1}^{N}W_k$, W_k — компактные множества в U; $W(t)$ и $W'(t)$ — сечения множеств W и W' в момент $t\in T$; $\hat{U}_i=\mathrm{Pr}_{U_i}W'$ — проекция множества W' на U_i; $q_i(u_i,t)$ — смешанная стратегия i-го участника, $q=q_1\dots q_N$; $q^i=q_1\dots q_{i-1}q_{i+1}\dots q_N$; Q_i — множество всех смешанных стратегий $q_i(u_i,\cdot)$ i-го игрока в задаче (7), (8) с начальным условием $x(t_0)=x^0$ и заменой множества W' множеством $\hat{U}=\hat{U}_1\times\dots\times\hat{U}_N$. Однако в задаче (7)–(10) уравнению (8) при ограничениях (9), (10) удовлетворяют не все указанные выше возможные стратегии $q_i\in Q_i$, $i=1,\dots,N$, а только те из них, которые обеспечивают удовлетворение ограничений (9), (10); они образуют некоторое компактное подмножество G' в пространстве $Q_1\times\dots\times Q_N$.

Допущение 2. Пусть $T=(t_0,t_1)$ — ограниченный фиксированный отрезок вещественной оси E^1, множество W — компакт в $U\times T$; отображение $\hat{f}=(f_0^1,\dots,f_0^N,f_1,\dots,f_n):U\times E^n\times T\to E^{n+N}$ таково, что функция $\hat{f}(u,x,\cdot)$ измерима (по Лебегу) при всех $u\in U$, $x\in E^n$, а функция $\hat{f}(\cdot,\cdot,t)$ при каждом

$t \in T$ непрерывна; функция $\hat{f}$ мажорируется на T функцией $s(t)(|x|+1)$, где $s(t)$ — некоторая интегрируемая функция; $x(t)$: $T \to E^n$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (8); кроме того, функция $\hat{f}$ удовлетворяет с интегрируемой функцией $b(t)$ условию Липшица $|\hat{f}(u, \bar{x}, t) - \hat{f}(u, x, t)| \le$ $\le b(t)|\bar{x} - x|$ для всех $u \in U$; $x, \bar{x} \in E^n$, $t \in T$.

Пусть G' — подмножество множества $Q = Q_1 \times \ldots \times Q_N$, образованное стратегиями $q(u, t)$, позволяющими обеспечить удовлетворение всех ограничений задачи, из которых ограничения (10) вводят в задачу (7)–(10) неявную зависимость между стратегиями участников, а ограничения (9) — явную, в связи с чем множество G' включает почти (в смысле меры Лебега) в каждый момент $t \in T$ только такие меры $q(\cdot, t)$, носители которых лежат в W'. Аналогично определяются множества G_i и G.

Следует отметить, что найти необходимые условия существования A-равновесий в дифференциальных играх в форме, аналогичной известной для вариационных задач, невозможно принципиально. Если A-равновесие несколько усилить, назвав его усиленный аналог A^c-равновесием, то определить удобные для приложений необходимые условия реально.

Для поиска решения дифференциальных игр воспользуемся понятием A^c-равновесия, которое получается из определения 1 A-равновесия для игровых задач на пересекающихся множествах добавлением в последнее после перечисления требований (1)–(3) некоторого дополнительного требования, содержащегося в следующем определении.

Определение 6. Ситуация q^* в дифференциальной игре (7)–(10) A^c-экстремальна, если каждое из отношений (1)–(3) выполняется при условии, что ненулевое (в смысле меры Лебега) множество в T, на котором $\hat{q}^i(t) \ne q^{i*}(t)$, является подмножеством множества из T, где $q_i(t) \ne q_i^*(t)$. Ситуацию q^* назовем A^c-равновесием в задачах 1-, 2-, 3-го типов, если соответственно требования (1), (2), (3) удовлетворяются в точке q^* для всех $i = 1, \ldots, N$, т.е. если $A^c = A_1^c \cap \ldots \cap A_N^c$.

По аналогии с A^c-равновесием введем понятие P^c-равновесия.

Если в формулировку задачи не входят произведения фазовых координат и управлений и задача линейна по фазовым координатам, то полагаем $A^c = A$. С помощью приведенных ниже необходимых условий A^c-равновесия можно свести решение исходной дифференциальной игры к решению некоторых вспомогательных («локальных») статических игр, в которых платежными функциями являются гамильтонианы игроков исходной дифференциальной игры [9–15]. Заметим, что если $A^c \ne A$, то всегда остается возможность проверить найденное решение на его оптимальность (равновесность).

Для поиска решений дифференциальных игр с побочными интересами участников воспользуемся соответствующими модификациями необходимых условий существования равновесий, полученных в [11–16], в частности следующей теоремой [15, 16].

Теорема 2. Пусть q^* — A^c-равновесие в задаче с N участниками. Тогда найдется N ненулевых абсолютно непрерывных вектор-функций $p^i(t) = (p_0^i, p_1^i(t), \ldots$ $\ldots, p_n^i(t))$, $p_0^i \ge 0$, $i = 1, \ldots, N$, удовлетворяющих почти всюду в T уравнениям

$$p_k^i = -\int\limits_{W_i(t)} p^i \frac{\partial f^i}{\partial x_k} dq^*, \ k = 1, \ldots, n, \ i = 1, \ldots, N, \ p_j^i(t_1) = 0, \ j \in K, \qquad (11)$$

где $f^i = (f_0^i, f_1, \ldots, f_n)$; гамильтонианы

$$H^i = \int\limits_{W_i(t)} p^i f^i dq^*$$

непрерывны в T; A^c-равновесная ситуация q^* удовлетворяет отношениям

$$H^i(\hat{q}^i, q_i) \le H^i(q^*), \ i = 1, \ldots, N.$$

Пример 2. Рассмотрим конфликтную задачу с двумя участниками в классе чистых стратегий. Игроки выбором стратегий соответственно $u_1(t)$ и $u_2(t)$ стремятся обеспечить максимумы своих платежных функционалов

$$J_1 = \int_0^1 x_1 dt, \ J_2 = \int_0^1 x_2 dt \qquad (12)$$

при ограничениях

$$\dot{x}_1 = f_1(u_1, u_2) = u_2 + 2u_1 + 1, \qquad (13)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(u_1, u_2) = u_2 - 2u_1 - 1, \qquad (14)$$

$$x_1(0) = 0, \ x_2(0) = 0, \ u_1 \in [0, 6], \ u_2 \in [0, 6], \qquad (15)$$

где замкнутый треугольник $[EFH]$ — игровое множество W_1 1-го игрока на рис. 2, замкнутый треугольник $[OEH]$ — игровое множество W_2 2-го игрока, отрезок $[OH]$ — множество, на котором оба участника конкурируют при получении своих доходов. На рис. 2 приведены также некоторые характерные уровни значений функций $f_1 = \text{const}$ и $f_2 = \text{const}$ участников игры.

Сначала покажем, что рассматриваемую дифференциальную игру можно свести к решению всего одной вспомогательной («локальной») статической игры, в которой платежными функциями являются гамильтонианы игроков.

Найдем решение уравнений (11) и приведем на его основе гамильтонианы игры к удобной (для формулировки вспомогательной «локальной» игровой задачи) форме. С учетом того, что гамильтонианы имеют вид

$$H_1 = p_0^1 x_1 + p_1^1(u_2 + 2u_1 + 1) + p_2^1(u_2 - 2u_1 - 1),$$

$$H_2 = p_0^2 x_2 + p_1^2(u_2 + 2u_1 + 1) + p_2^2(u_2 - 2u_1 - 1),$$

уравнения (11) сводятся к уравнениям

$$\dot{p}_1^1 = -p_0^1, \ p_1^1(1) = 0, \ \dot{p}_2^1 = 0, \ p_2^1(1) = 0,$$

$$\dot{p}_2^2 = -p_0^2, \ p_2^2(1) = 0, \ \dot{p}_1^2 = 0, \ p_1^2(1) = 0,$$

которые имеют следующие очевидные решения:

$$p_1^1 = p_0^1(1-t) = (1-t), \ p_2^1 = 0, \ p_2^2 = p_0^2(1-t) = (1-t), \ p_1^2 = 0.$$

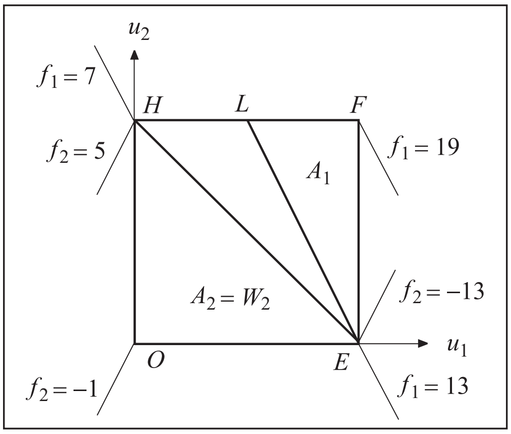

Рис. 2

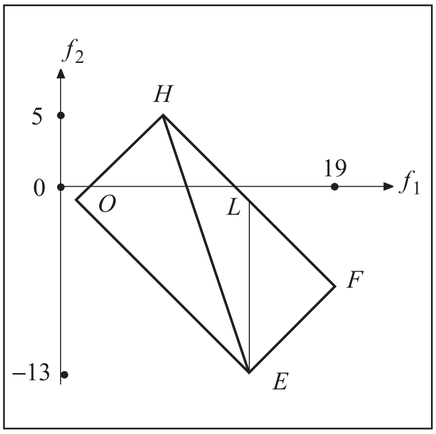

Рис. 3

Подставляя эти решения в гамильтонианы, приводим последние к виду

$$H^1 = x_1 + (1-t)(u_2 + 2u_1 + 1), \; H^2 = x_2 + (1-t)(u_2 - 2u_1 - 1).$$

Поскольку $(1-t) > 0$ на всей траектории (кроме несущественной точки $t = 1$), исходная дифференциальная игра сводится к статической «локальной» (т.е. к статической игре в каждый момент t) с платежными функциями

$$f_1 = (u_2 + 2u_1 + 1), \; f_2 = (u_2 - 2u_1 - 1). \tag{16}$$

Из рис. 2 для «локальной» задачи (16) нетрудно найти множество A_1 — замкнутый треугольник $[EFL]$, множество A_2 — отрезок прямой $[EH]$ и множество A, сводящееся к единственной точке E, которая является слабым равновесием, невыгодным для 2-го игрока. Во вспомогательной «локальной» задаче на общем для игроков множестве $W = [EH]$ и во вспомогательной задаче с использованием сильных угроз получается одно и то же слабое равновесие $A^W = A^s = E$. Таким образом, во всех трех вспомогательных задачах имеется всего одно очень слабое равновесие E. Для поиска нового D^{PP}-равновесия, позволяющего найти еще одно равновесие, необходимо предварительно построить отображение множеств W_1 и W_2 на плоскость (f_1, f_2), что выполнено на рис. 3. Новое D^{PP}-равновесие выделяет на множестве P, состоящем из пары точек H и E, наисильнейшую равновесную ситуацию H, которая не может быть слабее любых равновесий класса A (в частности, равновесий A, A^W, A^s), а следовательно, H не может быть слабее равновесия E.

С использованием рис. 2 и 3 вычисляются множества P_1, P_2 и P, а затем их усиление — множество $D^{PP} = H$. Продемонстрируем процедуру поиска P- и D^{PP}-равновесий.

Исходя из указанных рисунков несложно найти множества P_i-экстремальных ситуаций. Согласно определению 2, например, точка $u^* = (u_1^*, u_2^*)$, отображаемая в некоторую точку f^* на рис. 3, называется P_1-экстремальной, если в ней достигается максимум функции f_1 в сечении $W_1(u_2^*)$ на рис. 2 (отсюда и из рис. 2 следует, что отрезок $EF \in P_1$). При попытке 1-го игрока улучшить свой выигрыш переходом из точки $u^* = (u_1^*, u_2^*)$, принадлежащей сечению $W_1(u_2^*)$, в некоторую более выгодную для него точку $(\bar{u}_1, u_2^*)$ из того же сечения, окажется, что исходная точка u^* является паретовской по отношению ко всем точкам сечения $W'(\bar{u}_1)$ (причем этому требованию должны удовлетворять все аналогичные точки $(\bar{u}_1, u_2^*)$ из сечения $W_1(u_2^*)$). Если учесть, что на рис. 3 все линии $u_1 = \text{const}$ параллельны линии EF и все линии $u_2 = \text{const}$ параллельны линии FH, то $P_1 = [EFH]$, $P_2 = [EH]$, а множество P сводится к паре точек $P = \{H, E\}$, из которых только H является D^{PP}-равновесием.

Таким образом, в этой «локальной» игре в качестве наисильнейших равновесий выделим только две ситуации: ситуация H в классе индивидуально-паретовских равновесий и ситуация E, являющаяся весьма слабым A-, A^s- и A^W-равновесием.

Заметим, что ситуация H невыгодна для 1-го игрока, поскольку в ней выигрыши участников $(f_1(H); f_2(H)) = (7; 5)$, в то время как этот игрок гарантирует себе выигрыш не менее $\upsilon(1) = \max_{u_1} \min_{u_2} f_1(u_1, u_2) = 13$. Ситуация E невыгодна для 2-го игрока, так как в рассматриваемых «локальных» играх он способен гарантировать себе выигрыш (а точнее, финансовые потери) не хуже лишь $\upsilon(2) = \max_{u_2} \min_{u_1} f_2(u_1, u_2) = -13$. В этой игре 2-й игрок может понести крупный убыток. Заметим, что в играх с побочными интересами гарантированный выигрыш определяется не так, как в классических играх на едином для участников игровом множестве, поскольку каждый игрок может наказывать конкурента переводом его в состояние вне игры, а сам при этом получать выигрыш.

Очевидно, что эта игра выгодна для 1-го игрока и убыточна для 2-го. В общем случае игрокам в любой игре (в этой также) наиболее выгодно кооперироваться и искать справедливый дележ их совместного кооперативного дохода, достигаемого в данной игре в ситуации F на рис. 2 и равного $f_1 = 19$. Если считать равносильными равновесные ситуации H и E, то следует воспользоваться формулами (4.1) и (4.3) из [19, с. 174, 175] или формулами (3.1) и (3.6) из [13, с. 50, 51], приводящими к следующему дележу их совместного кооперативного дохода (равного 19):

$$y_1 = \frac{7+13}{(7+13)+(5-13)} 19 \approx 31{,}7, \quad y_2 = \frac{5-13}{(7+13)+(5-13)} 19 \approx -12{,}7, \qquad (17)$$

где доля y_i i-го игрока задается произведением кооперативного дохода (равного 19) на дробь, числитель которой равен сумме выигрышей i-го игрока в двух наисильнейших эквивалентных равновесных ситуациях H и E, а знаменатель — сумме выигрышей обоих игроков.

Несмотря на то что такой дележ справедлив, причем каждый получает больше того, что он может себе гарантировать ($y_1 > \upsilon_1 = 13$, $y_2 > \upsilon_2 = -13$), 1-му игроку следовало бы поделиться со 2-м участником частью своего чрезмерно большого выигрыша, с учетом того, что сам он не согласится с выигрышем, меньшим гарантированного.

Таким образом, с помощью предложенного нового понятия D^{PP}-равновесия в рассмотренной дифференциальной игре удалось найти все возможные существенные наисильнейшие равновесия, позволяющие игрокам прийти к решению, устраивающему обоих.

Поскольку в исходной дифференциальной игре (12)–(15) оптимальные стратегии $u(t)$ постоянны, интегрирование уравнений (13) и (14) не представляет трудностей, так же как и расчет функционалов J_1 и J_2. Справедливый дележ (17) приводит к следующему дележу в игре (12)–(15): $J_1 = \frac{31{,}7}{2}$, $J_2 = \frac{-12{,}7}{2}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенное в работе новое понятие D^{PP}-равновесия является существенным дополнением общей теории игр и конфликтов. Как продемонстрировано на примерах статических и дифференциальных игр, без его использования находить решение, устраивающее всех участников в бескоалиционных и кооперативных играх, затруднительно. Причем, как показано на примере дифференциальной игры, новое равновесие позволило выделить из системы всех равновесий наиболее существенные наисильнейшие равновесия, что помогло определить справедливый дележ в кооперативной игре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. Москва: Мир, 1967. 472 с.
2. Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр. Москва: Физматлит, 1960. 420 с.
3. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. Москва: Наука, 1970. 708 с.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. 412 с.
5. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. Москва: Наука, 1977. 350 с.
6. Петров Н.Н. Теория игр. Ижевск: Удмуртский университет, 1977. 160 с.
7. Вайсборд Э.М., Жуковский В.И. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. Москва: Советское радио. 1980. 304 с.
8. Воробьев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. Москва: Наука, 1984. 495 с.
9. Петросян Л.А., Кузьмина Т.И. Бескоалиционные дифференциальные игры. Иркутск: Иркутский государственный университет, 1989. 202 с.
10. Чикрий А.А. Конфликтно-управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 381 с.
11. Смольяков Э.Р. Конфликтные равновесия на множествах с непустым пересечением. *Доклады АН РАН*. 2003. Т. 391, № 2. С. 172–176.
12. Смольяков Э.Р. Теория динамических конфликтных задач на пересекающихся множествах. *Дифференциальные уравнения*. 2003. Т. 39, № 12. С. 1637–1644.
13. Смольяков Э.Р. Управление конфликтами с побочными интересами участников. Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 154 с.
14. Смольяков Э.Р. Теория решения дифференциальных игр с побочными интересами участников. *Дифференциальные уравнения*. 2014. Т. 50, № 12. С. 1647–1659.
15. Смольяков Э.Р. Индивидуально-паретовские равновесия для игровых задач с побочными интересами участников. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. Т. 51, № 2. С. 29–42.
16. Смольяков Э.Р. Новые равновесия для игр с побочными интересами участников. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 4. С. 29–42.
17. Смольяков Э.Р. Теория антагонизмов и дифференциальные игры. Москва: Эдиториал УРСС, 2000. 160 с.
18. Смольяков Э.Р. Теория конфликтных равновесий. Москва: Едиториал УРСС, 2005. 304 с.
19. Смольяков Э.Р. Методы решения конфликтных задач. Москва: МГУ, 2010. 242 с.

20. Смольяков Э.Р. Обобщенное оптимальное управление и динамические конфликтные задачи. Москва: МГУ, 2010. 232 с.

21. Смольяков Э.Р. Равновесные модели при несовпадающих интересах участников. Москва: Наука, 1986. 224 с.

22. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения мгогокритериальных задач. Москва: Наука, 1982. 256 с.

Надійшла до редакції 18.04.2016

Е.Р. Смольяков

НАЙБІЛЬШ ЗАГАЛЬНЕ ПОНЯТТЯ РІВНОВАГИ ДЛЯ КОНФЛІКТНИХ ЗАДАЧ З ПОБІЧНИМИ ІНТЕРЕСАМИ

Анотація. Запропоновано узагальнене поняття рівноваги для статичних і динамічних конфліктних задач (описаних диференціальними рівняннями), що розглядаються на частково перетинних ігрових множинах. Його ефективність для пошуку розв'язку безкоаліційних і кооперативних ігор як в статичній, так і динамічній постановках продемонстровано на прикладах.

Ключові слова: ігри на перетинних множинах, конфліктні рівноваги.

E.R. Smol'yakov

THE MOST COMMON NOTION OF EQUILIBRIUM FOR CONFLICT PROBLEMS WITH LATERAL INTERESTS

Abstract. The author proposes the generalized concept of equilibrium for the static and dynamic conflict problems described by differential equations. The problems are considered on partially intersecting game sets. The efficiency of the equilibrium is demonstrated on the examples of solving noncooperative and cooperative static and dynamic games.

Keywords: games on intersecting sets, conflict equilibria.

Смольяков Эдуард Римович,
доктор физ.-мат. наук, профессор Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Россия, e-mail: ser-math@rambler.ru.