СИСТЕМНИЙ
АНАЛІЗ

В.Г. ПРИКАЗЧИКОВ, А.Н. ХИМИЧ

УДК 519.6

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА СО СМЕШАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Аннотация. Получены асимпточеские оценки точности собственных чисел (с.ч.) оператора четвертого порядка со смешанными краевыми условиями на границе прямоугольника. Знание главной части погрешности с.ч. позволяет обоснованно уточнять с.ч. на последовательности сеток, получать дискретные аналоги повышенной точности, строить дискретные аналоги, с.ч. которых дают двусторонние приближения к с.ч. исходной задачи.

Ключевые слова: оценки точности, эллиптический оператор, смешанные краевые условия, разностные схемы, главная часть погрешности.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–4] установлены оценки точности собственных функций (с.ф.) и собственных чисел (с.ч.) эллиптических операторов второго и четвертого порядков. Практический интерес представляет асимптотические оценки точности, т.е. главная часть погрешности.

В [5, 6] получены асимптотические оценки точности с.ч. операторов второго порядка с переменными коэффициентами. В [7, 8] установлены главные части погрешности с.ч. бигармонического оператора и более общего оператора четвертого порядка.

Знание главной части погрешности с.ч. позволяет обоснованно уточнять с.ч. на последовательности сеток, получать дискретные аналоги повышенной точности, строить дискретные аналоги, с.ч. которых дают двусторонние приближения к с.ч. исходной задачи. Сказанное выше отражено в [9] для некоторых операторов второго и четвертого порядков с переменными коэффициентами.

В настоящей статье получены ассимпточеские оценки точности с.ч. оператора четвертого порядка со смешанными граничными условиями на границе прямоугольника.

ИСХОДНАЯ ЗАДАЧА

В прямоугольнике $\Omega = \{0 < t_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1,2\}$ рассмотрим задачу [2]

$$Lu = \lambda u,\ (t_1, t_2) \in \Omega,\ Lu = \frac{\partial^2 M_1}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial^2 M_3}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial t_2^2}. \qquad (1)$$

Краевые условия имеют вид

$$u=0,\ \frac{\partial u}{\partial t_1}=0,\ t_1=0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &M_1=0, \quad \frac{\partial M_1}{\partial t_1}+2\frac{\partial M_3}{\partial t_2}=0, \qquad t_1=l_1, \\ &M_2=0, \quad \frac{\partial M_2}{\partial t_2}+2\frac{\partial M_3}{\partial t_1}=0, \quad t_2=0\vee l_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь
$$M_1=p_1\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}+p_0\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2},\ M_2=p_0\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}+p_2\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2},\ M_3=p_3\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}.$$

Предположим, что выполняются условия

$$c_2\ge p_\alpha\ge c_1>0,\ \alpha=1,2,3;\ p_1p_2-p_0^2\ge c_0>0,\ p_\alpha\in C^{(2)}(\Omega),\ \alpha=1,2,3,4. \tag{4}$$

Оператор L симметричен и положительно определен в $L_2(\Omega)$. Существует счетное множество положительных собственных чисел λ_s, $0<\lambda_1\le\ldots\le\lambda_s\le\ldots$, и соответствующих им нормированных с.ф. $u^{(s)}(t_1,t_2)\in W_2^2(\Omega)$.

Задача (1)–(4) формулируется как вариационная:

$$\lambda_k=\min_{u\in W_2^2}\int_\Omega\left[p_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\right)^2+2p_0\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}+p_2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\right)^2+2p_3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right)^2\right]d\Omega$$

при условиях

$$\int_\Omega uu^{(s)}d\Omega=0,\ \int_\Omega (u^{(s)})^2d\Omega=1,\ s=1,2,\ldots,k-1,$$

где с.ф. $u^{(s)}$ удовлетворяют (2).

Продолжим с.ф. согласно [11, с. 261] в область $\hat\Omega$ $(\Omega\subset\hat\Omega)$ с сохранением гладкости в $W_2^2(\hat\Omega)$. По теореме вложения имеем $W_2^2(\hat\Omega)\subset C(\hat\Omega)$ и, следовательно, $Lu\in C(\hat\Omega)$. Поэтому, принимая во внимание (4), имеем $u(t_1,t_2)\in C^{(4)}(\hat\Omega)$.

РАЗНОСТНАЯ ЗАДАЧА

Введем множество узлов квадратной сетки с шагом h в прямоугольной области Ω с соизмеримыми длинами сторон l_1, l_2:

$$\begin{aligned} &\omega=\{(x_{i_q},x_{i_2}): i_1=1,\ldots,N_1-1;\ i_2=1,\ldots,N_2-1\}, \\ &\overset{+}{\gamma}_2=\{(x_{i_1},l_2): i_1=1,\ldots,N_1-1\}, \\ &\bar\gamma_2=\{(x_{i_1},0): i_1=1,\ldots,N_1-1\}, \\ &\overset{+}{\gamma}_1=\{(l_1,x_{i_2}): i_2=1,\ldots,N_2-1\}, \\ &\bar\gamma_1=\{(0,x_{i_2}): i_2=1,\ldots,N_2\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Для получения дискретного аналога задачи (1) воспользуемся следующими операторами проектирования:

$$T_\alpha(v) = \frac{1}{h}\int\limits_{x_\alpha - h}^{x_\alpha + h}\left(1 - \frac{|t_\alpha - x_\alpha|}{h}\right) v(t_\alpha)\, dt_\alpha,\ \alpha = 1, 2,$$

$$\bar{T}_\alpha(v) = \frac{2}{h}\int\limits_{x_\alpha - h}^{x_\alpha}\left(1 + \frac{t_\alpha - x_\alpha}{h}\right) v(t_\alpha)\, dt_\alpha,$$

$$\overset{+}{T}_\alpha(v) = \frac{2}{h}\int\limits_{x_\alpha}^{x_\alpha + h}\left(1 - \frac{t_\alpha - x_\alpha}{h}\right) v(t_\alpha)\, dt_\alpha, \tag{6}$$

$$T_3(v) = \frac{1}{h^2}\int\limits_{x_1 - h}^{x_1}\int\limits_{x_2 - h}^{x_2} v(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2,$$

$$\overset{-+}{T}_3(v) = \frac{1}{h^2}\int\limits_{x_1 - h}^{x_1}\int\limits_{x_2}^{x_2 + h} v(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2.$$

Здесь и далее индексы координат точек сетки опускаем, а точку сетки обозначаем (x_1, x_2). Для преобразования схемы учитываем следующие свойства операторов:

$$T_1 \frac{\partial^2 M_1}{\partial t_1^2} = (M_1)_{\bar{t}_1 t_1},\ T_2 \frac{\partial^2 M_2}{\partial t_2^2} = (M_2)_{\bar{t}_2 t_2},\ T_1 T_2 \frac{\partial^2 M_3}{\partial t_1 \partial t_2} = (T_3 M_3)_{\bar{t}_1 \bar{t}_2}. \tag{7}$$

Запишем результат проектирования уравнения (1) в окрестности узлов для соответствующих множеств

$$T_1 T_2 Lu = (T_2 M_1)_{\bar{t}_1 t_1} + 2(T_3 M_3)_{t_1 t_2} + (T_1 M_2)_{\bar{t}_2 t_2} = \lambda T_1 T_2 u,\ (x_1, x_2) \in \omega,$$

$$T_1 \bar{T}_2 Lu = (\bar{T}_2 M_1)_{\bar{t}_1 t_1} - \frac{4}{h}(T_3 M_3)_{t_1} - \frac{2}{h}(T_1 M_2)_{\bar{t}_2} = \lambda T_1 \bar{T}_2 u,\ (x_1, x_2) \in \overset{+}{\gamma}_2,$$

$$\bar{T}_1 \bar{T}_2 Lu = -\frac{2}{h}(\bar{T}_2 M_1)_{\bar{t}_1} + \frac{8}{h^2} T_3 M_3 - \frac{2}{h}(\bar{T}_1 M_2)_{\bar{t}_2} = \lambda \bar{T}_1 \bar{T}_2 u,\ x_1 = l_1,\ x_2 = l_2, \tag{8}$$

$$T_1 \overset{+}{T}_2 Lu = (\overset{+}{T}_2 M_1)_{\bar{t}_1 t_1} + \frac{4}{h}(\overset{-+}{T}_3 M_3)_{t_1} + \frac{2}{h}(T_1 M_2)_{t_2} = \lambda T_1 \overset{+}{T}_2 u,\ (x_1, x_2) \in \bar{\gamma}_2,$$

$$\bar{T}_1 T_2 Lu = -\frac{2}{h}(T_2 M_1)_{\bar{t}_1} - \frac{4}{h}(T_3 M_3)_{t_2} + (\bar{T}_1 M_2)_{\bar{t}_2 t_2} = \lambda \bar{T}_1 T_2 u,\ (x_1, x_2) \in \overset{+}{\gamma}_1,$$

$$\bar{T}_1 \overset{+}{T}_2 Lu = -\frac{2}{h}(\overset{+}{T}_2 M_1)_{\bar{t}_1} - \frac{8}{h^2} \overset{-+}{T}_3 M_3 - \frac{2}{h}(\bar{T}_1 M_2)_{t_2} = \lambda \bar{T}_1 \overset{+}{T}_2 u,\ x_1 = l_1,\ x_2 = 0.$$

Для получения разностных уравнений используем квадратурные формулы прямоугольников и трапеций; аппроксимируем производные разностными выражениями, принимая во внимание краевые условия; преобразуем моменты на границе по формулам

$$M_1 = p_1\left(1-\frac{p_0^2}{p_1 p_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2},\ (x_1, x_2) \in \overset{+}{\gamma}_2 \bigcup \bar{\gamma}_2,\ \text{так как}\ M_2 = 0,$$

$$M_2 = p_2\left(1-\frac{p_0^2}{p_1 p_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2},\ (x_1, x_2) \in \overset{+}{\gamma}_1,\ \text{так как}\ M_1 = 0. \tag{9}$$

В угловых точках $\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} = 0$, так как $p_1 p_2 - p_0^2 > 0$.

В результате получим систему разностных уравнений

$$\Lambda y = \lambda^h y, \tag{10}$$

где

$$\Lambda y = \begin{cases} (m_1)_{\bar{t}_1 t_1} + 2(m_3)_{t_1 t_2} + (m_2)_{\bar{t}_2 t_2}, & (x_1, x_2) \in \omega, \\ (n_1)_{\bar{t}_1 t_1} - \frac{4}{h}(m_3)_{t_1} - \frac{2}{h}(m_2)_{\bar{t}_2}, & (x_1, l_2) \in \overset{+}{\gamma}_2, \\ -\frac{2}{h}(n_1)_{\bar{t}_1} + \frac{8}{h^2} m_3 - \frac{2}{h}(n_2)_{\bar{t}_2}, & x_1 = l_1;\ x_2 = l_2, \\ (n_1)_{\bar{t}_1 t_1} + \frac{4}{h}(\overset{-+}{m}_3)_{t_1} + \frac{2}{h}(m_2)_{t_2}, & (x_1, 0) \in \bar{\gamma}_2, \\ -\frac{2}{h}(m_1)_{\bar{t}_1} - \frac{4}{h}(m_3)_{t_2} + (n_2)_{\bar{t}_2 t_2}, & (l_1, x_2) \in \overset{+}{\gamma}_1, \\ -\frac{2}{h}(n_1)_{\bar{t}_1} - \frac{8}{h^2}\overset{-+}{m}_3 - \frac{2}{h}(n_2)_{t_2}, & x_1 = l_1;\ x_2 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь

$$m_1 = p_1 y_{\bar{t}_1 t_1} + p_0 y_{\bar{t}_2 t_2};\ m_2 = p_0 y_{\bar{t}_1 t_1} + p_2 y_{\bar{t}_2 t_2};\ m_3 = p_3\left(x_1 - \frac{h}{2},\ x_2 - \frac{h}{2}\right) y_{\bar{t}_1 \bar{t}_2};$$

$$\overset{-+}{m}_3 = p_3\left(x_1 - \frac{h}{2},\ x_2 + \frac{h}{2}\right) y_{\bar{t}_1 t_2};\ n_\alpha = q_\alpha y_{\bar{t}_\alpha t_\alpha},\ \alpha = 1, 2;\ q_\alpha = p_\alpha\left(1 - \frac{p_0^2}{p_1 p_2}\right).$$

Краевые условия на левой границе имеют вид

$$y = y_{\bar{t}_1} - \frac{h}{2} y_{\bar{t}_1 t_1} = 0 \ \text{или}\ y_{\underset{t_1}{0}} = 0\ (x_1 = 0). \tag{12}$$

Следует отметить важное обстоятельство. Разностные уравнения (11) получены проектированием уравнения с помощью «шапочек» Куранта. При этом не используется информация продолженного решения. При продолжении решения вне области Ω в точках естественных граничных условий, как следует ниже, можно записывать разностное уравнение так же, как и внутри области Ω. Затем, используя граничные условия и характер продолжения, получаем те же разностные уравнения. Таким образом, продолжение решения имеет обоснование.

Рассмотрим другое построение уравнения в угловой точке (l_1, l_2). Запишем разностное уравнение, которое имеет такой же вид, как и внутри области,

$$\frac{m_1(l_1 + h, l_2) - 2m_1(l_1, l_2) + m_1(l_1 - h, l_2)}{h^2} +$$

$$+\frac{2}{h}\left(\frac{m_3\left(l_1 + \frac{h}{2},\ l_2 + \frac{h}{2}\right) - m_3\left(l_1 - \frac{h}{2},\ l_2 + \frac{h}{2}\right)}{h} -\right.$$

$$
-\frac{m_3\left(l_1+\frac{h}{2},\ l_2-\frac{h}{2}\right)-m_3\left(l_1-\frac{h}{2},\ l_2-\frac{h}{2}\right)}{h}\Bigg)+ \tag{13}
$$

$$
+\frac{m_2(l_1, l_2+h)-2m_2(l_1, l_2)+m_2(l_1, l_2-h)}{h^2}=\lambda y.
$$

Используя разностные аналоги краевых условий и характер продолжения решения (симметрия четных и антисимметрия нечетных производных), получаем

$$
m_1(l_1, x_2)=m_2(x_1, l_2)=m_2(x_1, 0)=0,
$$

$$
m_1(l_1+h, l_2)=m_1(l_1-h, l_2);\ \ m_2(l_1, l_2+h)=m_2(l_1, l_2-h),
$$

$$
m_3\left(l_1+\frac{h}{2}, l_2+\frac{h}{2}\right)=m_3\left(l_1-\frac{h}{2}, l_2-\frac{h}{2}\right),
$$

$$
m_3\left(l_1-\frac{h}{2}, l_2+\frac{h}{2}\right)=m_3\left(l_1+\frac{h}{2}, l_2-\frac{h}{2}\right)=-m_3\left(l_1-\frac{h}{2}, l_2-\frac{h}{2}\right).
$$

Следовательно, уравнение (13) имеет вид

$$
\frac{2}{h^2}m_1(l_1-h, l_2)+\frac{8}{h_2^2}m_3\left(l_1-\frac{h}{2}, l_2-\frac{h}{2}\right)+\frac{2}{h^2}m_2(l_1, l_2-h)=\lambda y.
$$

В результате использования разностных аналогов для (9) получим

$$
\frac{2}{h^2}n_1(l_1-h, l_2)+\frac{8}{h^2}m_3\left(l_1-\frac{h}{2}, l_2-\frac{h}{2}\right)+\frac{2}{h^2}n_2(l_1, l_2-h)=\lambda y.
$$

Принимая во внимание нулевые значения моментов на границе, получаем как и в (11) разностное уравнение в точке (l_1, l_2). Следовательно, продолжение решения дает возможность написать однородную разностную схему как внутри области, так и на границе, где заданы естественные краевые условия. Однако для реализации разностной схемы (10) значения решения вне области исключены.

Введем скалярное произведение

$$
(u, v)=\sum_{\omega}uvh^2+\frac{1}{2}\sum_{\overset{+}{\gamma}_2}uvh^2+\frac{1}{2}\sum_{\overset{-}{\gamma}_2}uvh^2+\frac{1}{2}\sum_{\overset{+}{\gamma}_1}uvh^2+
$$

$$
+\frac{1}{4}(uv)_{(l_1,l_2)}h^2+\frac{1}{4}(uv)_{(l_1,0)}h^2. \tag{14}
$$

Разностный аналог минимизируемого квадратичного функционала с помощью формул суммирования по частям приводится к виду

$$
(\Lambda y, y)=\sum_{\omega}(m_1 y_{\bar{t}_1 t_1}+m_2 y_{\bar{t}_2 t_2})h^2+2\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}m_3 y_{\bar{t}_1\bar{t}_2}h^2+
$$

$$
+\frac{1}{2}\left\{\sum_{\overset{+}{\gamma}_2}q_1 y_{\bar{t}_1 t_1}^2 h^2+\sum_{\overset{-}{\gamma}_2}q_1 y_{\bar{t}_1 t_1}^2 h^2+\sum_{\overset{+}{\gamma}_1}q_2 y_{\bar{t}_2 t_2}^2 h^2+\sum_{\overset{-}{\gamma}_1}p_1 y_{\bar{t}_1 t_1}^2 h^2\right\}.
$$

Разностный аналог нормировочного функционала имеет вид

$$(y, y)=\sum_{\omega} y^2 h^2+\frac{1}{2}\left\{\sum_{\overset{+}{\gamma}_2} y^2 h^2+\sum_{\overset{-}{\gamma}_2} y^2 h^2+\sum_{\overset{+}{\gamma}_1} y^2 h^2\right\}+$$

$$+\frac{1}{4}\{y^2_{(l_1,l_2)} h^2+y^2_{(l_1,0)} h^2\}. \tag{15}$$

Собственные числа определяются следующим образом:

$$\lambda_k^h=\min_y(\Lambda y, y)$$

при условиях $(y, y)=1$, $(y, y^{(s)})=0$, $s=1,2,\ldots,k-1$, где $y^{(s)}$ — собственные функции, соответствующие λ_k^h.

Для погрешности собственных функций $z^{(k)}=y^{(k)}-u^{(k)}$ имеем задачу (индекс k опускаем) $\Lambda z-\lambda^{(h)} z=\Psi$. Здесь $\Psi=\lambda^{(h)} z-\Lambda z=\psi+\theta+(\lambda^{(h)}-\lambda) u$, $\psi=T\Lambda u-\Lambda u$, $\theta=\lambda(u-Tu)$.

Оператор T действует согласно (8), а оператор Λ действует на собственную функцию по формулам (11). Погрешность на границе с главными краевыми условиями в силу продолжения решения имеет вид $z=0$, $z_{\overset{\circ}{t}_1}=-u_{\overset{\circ}{t}_1}=0$, $(0, x_2)\in\overset{-}{\gamma}_1$.

Запишем ψ во всех точках сеточных множеств:

$$\psi=\begin{cases}(\eta_1)_{\bar{t}_1 t_1}+2(\eta_3)_{\bar{t}_1 t_2}+(\eta_2)_{\bar{t}_2 t_2}, & (x_1, x_2)\in\omega,\\ (\eta_1)_{\bar{t}_1 t_1}-\dfrac{4}{h}(\eta_3)_{t_1}-\dfrac{2}{h}(\eta_2)_{\bar{t}_2}, & (x_1, l_2)\in\overset{+}{\gamma}_2,\\ -\dfrac{2}{h}(\eta_1)_{\bar{t}_1}+\dfrac{8}{h^2}\eta_3-\dfrac{2}{h}(\eta_2)_{\bar{t}_2}, & x_1=l_1,\ x_2=l_2,\\ (\eta_1)_{\bar{t}_1 t_1}+\dfrac{4}{h}(\overset{+}{\bar{\eta}}_3)_{t_1}+\dfrac{2}{h}(\eta_2)_{t_2}, & (x_1, 0)\in\bar{\gamma}_2,\\ -\dfrac{2}{h}(\eta_1)_{\bar{t}_1}-\dfrac{4}{h}(\eta_3)_{t_1}+(\eta_2)_{\bar{t}_2 t_2}, & (l_1, x_2)\in\overset{+}{\gamma}_1,\\ -\dfrac{2}{h}(\eta_1)_{\bar{t}_1}-\dfrac{8}{h^2}(\overset{-+}{\eta}_3)_{t_1}-\dfrac{2}{h}(\eta_2)_{t_2}, & x_1=l_1,\ x_2=0.\end{cases} \tag{16}$$

Здесь $\eta_1=T_2 M_1(u)-m_1(u)$, $\eta_2=T_1 M_2(u)-m_2(u)$, $\eta_3=T_3 M_3(u)-m_3(u)$.

Поскольку на свободной границе уравнение работает так же, как и внутри области, а решение продолжено, то η_1, η_2 имеют такой же вид, как и внутри ω.

Как и в работах [1, 2], для погрешности простых собственных чисел справедлива формула

$$(\lambda-\lambda^u)(u, v)=(\psi, y)+(\theta, y). \tag{17}$$

В результате применения формул суммирования по частям получим

$$(\psi, y)=\sum_{\omega}(\eta_1 y_{\bar{t}_1 t_1}+\eta_2 y_{\bar{t}_2 t_2}) h^2+2\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\eta_3 y_{\bar{t}_1\bar{t}_2} h^2+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\sum_{\overset{+}{\gamma}_2}\eta_1 y_{\bar{t}_1 t_1} h^2+\sum_{\overset{-}{\gamma}_2}\eta_1 y_{\bar{t}_1 t_1} h^2+\sum_{\overset{+}{\gamma}_1}\eta_2 y_{\bar{t}_2 t_2} h^2+\sum_{\overset{-}{\gamma}_1}\eta_1 y_{\bar{t}_1 t_1} h^2\right].$$

Принимая во внимание формулу Тейлора для $u \in C^{(4)}(\hat{\Omega})$, как и в [7] получим

$$\eta_1 = \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial t_2^2} - p_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t_1^2} - p_0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t_2^2}\right)(\xi_1, \xi_2),$$

$$\eta_2 = \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^2 M_2}{\partial t_1^2} - p_0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t_1^2} - p_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t_2^2}\right)(\xi_1, \xi_2),$$

$$\eta_3 = \frac{h^2}{12}(\Delta M_3 - p_3 \Delta w_3)(\xi_1, \xi_2),$$

$$\theta = -\lambda \frac{h^2}{12} \Delta u(\xi_1, \xi_2);$$

(ξ_1, ξ_2) — некоторые промежуточные точки, Δ — оператор Лапласа, $w_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}$, $w_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}$, $w_3 = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}$.

Как и в [3] переходим к пределу интегральных сумм в (17) при $h \to 0$. С учетом факта сходимости с.ч. и с.ф. [10] получим

$$\lim_{h\to 0} \frac{\lambda - \lambda^h}{h^2} = \frac{1}{12}\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial t_2^2} - p_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t_1^2} - p_0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t_2^2}\right) w_1 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 M_2}{\partial t_1^2} - p_0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t_1^2} - p_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t_2^2}\right) w_2 + 2(w_3 \Delta M_3 - M_3 \Delta w_3) - \lambda u \Delta u\right] dt_1 dt_2 = \tag{18}$$

$$= \frac{1}{12}\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial^2 M_1}{\partial t_2^2} w_1 - M_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial t_1^2} w_2 - \right.$$

$$\left. - M_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t_2^2} + 2(w_3 \Delta M_3 - M_3 \Delta w_3) - \lambda u \Delta u\right] dt_1 dt_2.$$

Принимая во внимание условие $\frac{\partial p_3}{\partial n} = 0$, из формул Грина следует

$$\int_{\Delta} (w_3 \Delta M_3 - M_3 \Delta w_3) dx = \oint_{\Gamma}\left(w_3 \frac{\partial M_3}{\partial n} - M_3 \frac{w_3}{\partial n}\right) d\gamma = \oint_{\Gamma} w_3 \frac{\partial p_3}{\partial n} d\gamma = 0.$$

С использованием соотношенияия

$$\lambda u(w_1 + w_2) = (w_1 + w_2)\left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial^2 M_3}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial t_2^2}\right)$$

интеграл (18) преобразуется к виду

$$\int_\Omega \left[w_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(M_1 - M_2) + w_2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}(M_2 - M_1) - M_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t_1^2} - w_1 \frac{\partial^2 M_1}{\partial t_1^2} - \right.$$

$$\left. - M_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t_2^2} - w_2 \frac{\partial^2 M_2}{\partial t_2^2} - 2\left(w_1 \frac{\partial^2 M_3}{\partial t_1 d t_2} + w_2 \frac{\partial^2 M_3}{\partial t_1 \partial t_2} \right) \right] d\Omega.$$

После интегрирования по частям с учетом четного продолжения вторых производных через границу получим

$$\int_\Omega \left[w_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(M_1 - M_2) + w_2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}(M_2 - M_1) \right] d\Omega = 0,$$

$$-\int_\Omega \left[M_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t_1^2} - w_1 \frac{\partial^2 M_1}{\partial t_1^2} \right] d\Omega = 2\int_\Omega \frac{\partial M_1}{\partial t_1} \frac{\partial w_1}{\partial t_1} d\Omega\ ,$$

$$-\int_\Omega \left[M_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t_2^2} - w_2 \frac{\partial^2 M_2}{\partial t_2^2} \right] d\Omega = 2\int_\Omega \frac{\partial M_2}{\partial t_2} \frac{\partial w_2}{\partial t_2} d\Omega\ ,$$

$$-2\int_\Omega \left(w_1 \frac{\partial^2 M_3}{\partial t_1 \partial t_2} + w_2 \frac{\partial^2 M_3}{\partial t_1 \partial t_2} \right) d\Omega = 2\int_\Omega \left(\frac{\partial M_3}{\partial t_1} \frac{\partial w_3}{\partial t_1} + \frac{\partial M_3}{\partial t_2} \frac{\partial w_3}{\partial t_2} \right) d\Omega.$$

Таким образом, как и для задачи с главными условиями на границе [7, 8], имеем одинаковые по форме асимптотические выражения

$$\lim_{h \to 0} \frac{\lambda - \lambda^h}{h^2} = \frac{1}{6}\int_\Omega \left(\frac{\partial M_1}{\partial t_1} \frac{\partial w_1}{\partial t_1} + \frac{\partial M_2}{\partial t_2} \frac{\partial w_2}{\partial t_2} + \frac{\partial M_3}{\partial t_1} \frac{\partial w_3}{\partial t_1} + \frac{\partial M_3}{\partial t_2} \frac{\partial w_3}{\partial t_2} \right) d\Omega =$$

$$= \frac{1}{6}\int_\Omega \left(M_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial^2 t_1} + M_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial^2 t_2} + M_3 \Delta w_3 \right) d\Omega.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная в настоящей статье точная формула главной части погрешности с.ч. совпадает с известной точной формулой для такого же оператора, когда на границе заданы только главные краевые условия. Это очередной раз доказывает эквивалентность естественных краевых условий уравнению в точках границы как и внутри области с учетом гладкого продолжения уравнения через границу прямоугольника. Работа представляет теоретический и практический интерес.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приказчиков В.Г. Разностная задача на собственные значения для эллиптического оператора четвертого порядка. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1977. № 6. С. 1432–1442.
2. Приказчиков В.Г., Химич А.Н. Разностная задача на собственные значения для эллиптического оператора четвертого порядка со смешанными краевыми условиями. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1985. № 10. С. 1486–1495.
3. Приказчиков В.Г., Майко Н.В. Точность разностной аппроксимации задачи на собственные значения. *Кибернетика и системный анализ*. 2003. № 3. С. 159–168.

4. Майко Н.В., Приказчиков В.Г., Рябичев В.Л. Точность разностной схемы решения задачи на собственные значения для оператора Лапласа. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. № 5. С. 183–190.
5. Приказчиков В.Г. Главный член разложения погрешности собственных чисел дискретного аналога эллиптического оператора. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1992. № 10. С. 1501–1505.
6. Приказчиков В.Г. Точность дискретного аналога спектральной задачи для оператора линейной теории упругости. *Дифференциальные уравнения*. 1999. № 2. С. 273–279.
7. Приказчиков В.Г. Асимптотическая оценка точности дискретной спектральной задачи оператора четвертого порядка *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1991. № 3. С. 26–32.
8. Приказчиков В.Г. Главный член разложения погрешности собственных чисел дискретного аналога эллиптического оператора четвертого порядка. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1992. № 7. С. 897–905.
9. Приказчиков В.Г. Двусторонняя аппроксимация собственных чисел некоторых эллиптических операторов. *Дифференциальные уравнения*. 2004. №7. С. 1–5.
10. Химич А.Н. О сходимости конечно-разностного метода в задаче на собственные значения. Оптимизация вычислений и численный анализ. Киев: ИК АН УССР, 1980. С. 60–65.
11. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. Москва: Высшая школа, 1987. 201 с.

Надійшла до редакції 03.08.2016

В.Г. Приказчиков, О.М. Хіміч

АСИМПТОТИЧНА ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ВЛАСНИХ ЧИСЕЛ ЕЛІПТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗМІШАНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Анотація. Отримано асимптотичні оцінки точності власних значень (в.з.) оператора четвертого порядку зі змішаними крайовими умовами на границі прямокутника. Знання головної частини похибки в.з. дозволяє обґрунтовано уточнювати в.з. на послідовності сіток, отримувати дискретні аналоги підвищеної точності, будувати дискретні аналоги, в.з. яких дають двосторонні наближення до в.з. вихідної задачі.

Ключові слова: оцінки точності, еліптичний оператор, змішані крайові умови, різницеві схеми, головна частина похибки.

V.G. Prikazchikov, A.N. Khimich

ASYMPTOTIC ESTIMATES OF THE ACCURACY OF EIGENVALUES OF FOURTH ORDER OPERATOR WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS

Abstract. We obtain the asymptotic estimates of the accuracy of the eigenvalues of the fourth order operator with mixed boundary conditions on the boundary of the rectangle. Knowledge of the main part of eigenvalues error allows us to reasonably specify eigenvalues on a sequence of grids, receive discrete analogs of high accuracy, construct discrete analogs whose eigenvalues give the bilateral approximation to eigenvalues of the original problem.

Keywords: accuracy estimate, elliptic operator, mixed boundary conditions, difference scheme, the principal term of error.

Приказчиков Виктор Георгиевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: viktorprikazchikov@gmail.com.

Химич Александр Николаевич,
чл.-кор. НАН Украины, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий отделом Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: khimich505@gmail.com.