УДК 517.95:519.86:539.3

В.А. СТОЯН

О ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ НЕПОЛНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ТРЕХМЕРНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ. I. СЛУЧАЙ НЕПРЕРЫВНО ЗАДАННОГО ЖЕЛАЕМОГО СОСТОЯНИЯ

Аннотация. Решены задачи управления линейно преобразованной вектор-функцией смещений точек трехмерного упругого тела в целях среднеквадратического приближения ее к непрерывно заданным значениям. Задачи решаются без ограничений на геометрию тела и при непрерывно определенных наблюдениях за его начально-краевым состоянием. В качестве управляющих факторов рассматриваются объемно-, поверхностно- и начально-распределенные внешнединамические возмущения. Выполнена оценка точности и однозначности управления.

Ключевые слова: пространственно распределенные динамические системы, пространственные задачи теории упругости, псевдоинверсия, управление.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи исследования динамики трехмерных упругих тел всегда были и остаются сложными и труднорешаемыми классически известными математическими методами. Известны решения только отдельных задач для тел с канонической внешней поверхностью и со специально определенными начально-краевыми условиями их функционирования. Трехмерные упругие тела с произвольной геометрией их поверхности и неполной (что часто бывает на практике) информацией об их начально-краевом состоянии вообще не исследованы ввиду математической некорректности задач, которые при этом должны решаться. В работах [1–3] были построены решения прямых и обратных задач динамики толстых упругих плит произвольной геометрии, которые, точно удовлетворяя классически известным трехмерным уравнениям эластодинамики Ляме, за среднеквадратическим критерием согласуются с наличной информацией об их начально-краевом состоянии независимо от количества и качества (дискретная, непрерывная) последней. Выполнена также оценка точности и однозначности предложенных решений. Тем самым закрыта проблема построения поля динамических смещений точек трехмерного упругого тела, вырожденного по одной из пространственных координат, которое исследуется в условиях неполноты информации о начальном состоянии внутренних точек тела и текущем состоянии его поверхности. Более сложными и, по-видимому, более интересными и практически направленными являются исследования динамики трехмерных упругих тел произвольной геометрии. Особенно это относится к задачам построения управляющих внешнединамических воздействий на трехмерное упругое тело, которые бы в условиях неполноты начально-краевой информации о состоянии тела приближали поле упругих динамических смещений его точек согласно среднеквадратическому критерию к непрерывно заданному желаемому состоянию. Этому вопросу посвящена настоящая статья. В качестве управляющих рассмотрены начально-, пространственно- и поверхностно-распределенные динамические возмущения, взятые по одному, по два и по три. Как и в [1–3], дана оценка точности управления и сформулированы условия его однозначности.

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ ТРЕХМЕРНОГО УПРУГОГО ТЕЛА И ПРОБЛЕМЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Продолжим начатое в работах [1–3] рассмотрение вопросов динамики трехмерного упругого тела, которое в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 поверхностью Г выделено из трехмерной упругой среды, характеризуемой константами Ляме λ и μ.

Будем исходить из того, что динамические (t-временна́я координата) смещения $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$ точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ этого тела в направлении координатных осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 определяются классически известными уравнениями Ляме [4]:

$$\mu\Delta u_1(x, t) + (\lambda+\mu)\partial_{x_1}\theta(x, t) - \rho\partial_t^2 u_1(x, t) = -f_1(x, t),$$

$$\mu\Delta u_2(x, t) + (\lambda+\mu)\partial_{x_2}\theta(x, t) - \rho\partial_t^2 u_2(x, t) = -f_2(x, t), \tag{1}$$

$$\mu\Delta u_3(x, t) + (\lambda+\mu)\partial_{x_3}\theta(x, t) - \rho\partial_t^2 u_3(x, t) = -f_3(x, t),$$

где ρ — удельная плотность материала среды, символами ∂_{x_i} $(i = \overline{1,3})$ и ∂_t обозначены производные по пространственным координатам x_i $(i = \overline{1,3})$ и времени t,

$$\theta(x, t) = \sum_{i=1}^{3}\partial_{x_i} u_i(x, t), \quad \Delta = \sum_{i=1}^{3}\partial_{x_i}^2 .$$

Для удобства, как и в [5], систему (1) запишем в виде

$$L(\partial_s)\, u(s) = -f(s), \tag{2}$$

где $s = (x, t)$, $\partial_s = (\partial_x, \partial_t) = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}, \partial_t)$,

$$u(s) = \mathrm{col}\,(u_i(s),\ i = \overline{1,3}), \quad f(s) = \mathrm{col}\,(f_i(s),\ i = \overline{1,3}),$$

$$L(\partial_x, \partial_t) =$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)\partial_{x_1}^2 + \mu(\partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2) - \rho\partial_t^2 & (\lambda+\mu)\partial_{x_1}\partial_{x_2} & (\lambda+\mu)\partial_{x_1}\partial_{x_3} \\ (\lambda+\mu)\partial_{x_1}\partial_{x_2} & (\lambda+2\mu)\partial_{x_2}^2 + \mu(\partial_{x_3}^2 + \partial_{x_1}^2) - \rho\partial_t^2 & (\lambda+\mu)\partial_{x_2}\partial_{x_3} \\ (\lambda+\mu)\partial_{x_3}\partial_{x_1} & (\lambda+\mu)\partial_{x_3}\partial_{x_2} & (\lambda+2\mu)\partial_{x_3}^2 + \mu(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) - \rho\partial_t^2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Обозначим

$$G(s - s') = \frac{1}{(2\pi i)^4}\int_{-i\infty}^{+i\infty} L^{-1}(p, q)\, D(p, q, s - s')\, dp dq,$$

где $p = (p_1, p_2, p_3)$, $dp = dp_1 dp_2 dp_3$, i — мнимая единица,

$$D(p, q, s - s') = \mathrm{diag}(e^{p(x - x') + q(t - t')},\ l = \overline{1,3}),$$

передаточную функцию рассматриваемой упругой среды. Тогда математическую модель (2) ее динамики запишем в более удобном виде

$$u(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s - s') f(s')\, ds'.$$

При исследовании динамики упругого тела, занимающего пространственную область S_0, которая ограничена поверхностью Г, на временном интервале $t \in [0, T]$ вектор-функцию $u(s)$ упруго-динамических смещений точек тела представим [5, 6] суммой

$$u(s) = u_\infty(s) + u_0(s) + u_\Gamma(s), \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} u_\infty(s) &= \int\limits_{S_0^T} G(s-s') f(s')\, ds', \\ u_0(s) &= \int\limits_{S^0} G(s-s') f_0(s')\, ds', \\ u_\Gamma(s) &= \int\limits_{S^\Gamma} G(s-s') f_\Gamma(s')\, ds'. \end{aligned} \tag{5}$$

Составляющие суммы при $S_0^T = S_0 \times [0, T]$, $S^0 = S_0 \times (-\infty, 0]$, $S^\Gamma = (R^3 \setminus S_0) \times [0, T]$ соответствуют действию объемных и начально-поверхностных внешнединамических возмущений таких, что

$$L_r^0(\partial_t)\, u(s)\big|_{t=0} = U_r^0(x) \;\; (x \in S_0,\, r = \overline{1, R_0}), \tag{6}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, u(s)\big|_{x=x^\Gamma \in \Gamma} = U_\rho^\Gamma(x^\Gamma, t) \;\; (t \in [0, T],\, \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \tag{7}$$

где $L_r^0(\partial_t)$ $(r = \overline{1, R_0})$, $L_\rho^\Gamma(\partial_x)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ — линейные дифференциальные операторы.

Рассмотрим также дискретный аналог соотношений (5):

$$\begin{aligned} u_\infty(s) &= \sum_{m=1}^{M} G(s-s_m) f_m, \\ u_0(s) &= \sum_{m=1}^{M_0} G(s-s_m^0) f_{0m}, \\ u_\Gamma(s) &= \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s-s_m^\Gamma) f_{\Gamma m}. \end{aligned} \tag{8}$$

Учитывая [6], что представления (4), (5) и (4), (8) вектор-функции $u(s)$ уравнения (2) удовлетворяют при любых моделирующих вектор-функциях $f_0(s)$ $(s \in S^0)$, $f_\Gamma(s)$ $(s \in S^\Gamma)$ и их значениях f_{0m} $(m = \overline{1, M_0})$, $f_{\Gamma m}$ $(m = \overline{1, M_\Gamma})$, определенных в точках $s_m^0 \in S^0$ $(m = \overline{1, M_0})$, $s_m^\Gamma \in S^\Gamma$ $(m = \overline{1, M_\Gamma})$, задачу построения вектор-функции $u(s)$ в прямых задачах динамики упругого тела сведем к построению вектор-функций $f_0(s)$, $f_\Gamma(s)$ и векторов

$$f_0 = \mathrm{col}(f_{0m},\, m = \overline{1, M_0}),$$

$$f_\Gamma = \mathrm{col}(f_{\Gamma m},\, m = \overline{1, M_\Gamma}),$$

которые являются решениями задачи

$$\Phi = \int_{S_0} \sum_{r=1}^{R_0} \| L_r^0(\partial_t)\, u(s)\big|_{t=0} - U_r^0(x) \|^2\, dx +$$

$$+ \int_{\Gamma\times[0,T]} \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \| L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, u(s) - U_\rho^\Gamma(s) \|^2\, ds \to \min_{u(s)} . \qquad (9)$$

В задачах управления динамикой рассматриваемого тела начально-краевые наблюдения (6), (7) за его состоянием дополним одним из следующих соотношений:

$$L_{iT}(\partial_s)\, y(s)\big|_{t=t_i} = U_{Ti}(x)\ (x \in S_0,\ i = \overline{1, I}), \qquad (10)$$

$$L_{iX}(\partial_s)\, y(s)\big|_{x=x_i} = U_{Xi}(t)\ (t \in [0, T],\ i = \overline{1, I}), \qquad (11)$$

$$L_i(\partial_s)\, y(s) = U_i(s)\ (s \in S_0^T,\ i = \overline{1, I}). \qquad (12)$$

Здесь, как и выше, $L_{iT}(\partial_s)$, $L_{iX}(\partial_s)$, $L_i(\partial_s)$ $(i = \overline{1, I})$ — линейные дифференциальные операторы, $U_{Ti}(x), U_{Xi}(t), U_i(s)$ $(i = \overline{1, I})$ — заданные функции, которые определяют желаемые состояния тела для $x \in S_0$, $t \in [0, T]$, $s \in S_0^T$.

Будем исходить из того, что управляющими внешнединамическими факторами, посредством которых достигаются состояния $U_{Ti}(x), U_{Xi}(t)$, $U_i(s)$, могут быть функции $f(s), U_r^0(x)\ (r = \overline{1, R_0}), U_\rho^\Gamma(s)\ (\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ объемно-, начально- и поверхностно-распределенных внешнединамических воздействий, взятых по одному, по два и по три. Решение задач управления рассматриваемым упругим телом для условия (12), как наиболее общего, и для наблюдаемого согласно (6), (7) трехмерного упругого тела рассмотрим ниже, где будут определены критерии решения конкретных задач.

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ ТРЕХМЕРНОГО УПРУГОГО ТЕЛА С УЧАСТИЕМ ОБЪЕМНО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВНЕШНЕДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Рассмотрим постановки и варианты решения задач управления рассматриваемым упругим телом, исходя из наблюдений (6), (7) за его начально-краевым состоянием для случая, когда желаемое его состояние описывается соотношением (12), а управление выполняется вектором $f = \mathrm{col}(f_m = f(s_m),\ m = \overline{1, M})$ объемных внешнединамических факторов при возможном участии начально-краевых возмущений $U_r^0(x)$ $(r = \overline{1, R_0})$, $U_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$.

Управление вектором объемно-распределенных внешнединамических воздействий. Рассмотрим случай, когда функции $U_r^0(x)$ $(r = \overline{1, R_0})$, $U_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ известны, а управление выполняется вектором f при условии

$$\Phi_* = \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} \| L_r^0(\partial_t)\, u(s)|_{t=0} - U_r^0(x) \|^2 dx + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma\times[0,T]} \| L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, u(s) - U_\rho^\Gamma(s) \|^2\, ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^{I} \int_{S_0^T} \| L_i(\partial_s)\, u(s) - U_i(s) \|^2\, ds \to \min_{u(s)} . \qquad (13)$$

При вектор-функции $u(s)$, определенной согласно (4), (8), задача (13) эквивалентна построению управляюще-моделирующего вектора $\bar{f} = \mathrm{col}(f_0, f_\Gamma, f)$ такого, что

$$\Phi_* \to \min_{\bar{f}}. \tag{14}$$

Решение (14) получим среднеквадратическим обращением системы линейных функциональных уравнений [6]

$$B(s)\bar{f} = \bar{U}(s), \tag{15}$$

в которой

$$\bar{U}(s) = \mathrm{col}(U_0(x)\ (x \in S_0), U_\Gamma(s)\ \ (s \in \Gamma \times [0, T]),\ U(s)\ (s \in S_0^T)),$$

$$B(s) = \begin{pmatrix} B_{11}(x)\ (x \in S_0) & B_{12}(x)\ (x \in S_0) & B_{13}(x)\ (x \in S_0) \\ B_{21}(s)\ (s \in \Gamma \times [0, T]) & B_{22}(s)\ (s \in \Gamma \times [0, T]) & B_{23}(s)\ (s \in \Gamma \times [0, T]) \\ B_{31}(s)\ (s \in S_0^T) & B_{32}(s)\ (s \in S_0^T) & B_{33}(s)\ (s \in S_0^T) \end{pmatrix}$$

при

$$U_0(x) = \mathrm{col}\,(U_r^0(x),\ r = \overline{1, R_0}),$$

$$U_\Gamma(s) = \mathrm{col}\,(U_\rho^\Gamma(s),\ \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$U(s) = \mathrm{col}\,(U_i(s),\ i = \overline{1, I}),$$

$$B_{11}(x) = \mathrm{col}(\mathrm{str}\,(L_r^0(\partial_t)\,G(s - s_m^0)\Big|_{t=0},\ m = \overline{1, M_0}),\ r = \overline{1, R_0});$$

$$B_{12}(x) = \mathrm{col}(\mathrm{str}\,(L_r^0(\partial_t)\,G(s - s_m^\Gamma)\Big|_{t=0},\ m = \overline{1, M_\Gamma}),\ r = \overline{1, R_0});$$

$$B_{13}(x) = \mathrm{col}(\mathrm{str}\,(L_r^0(\partial_t)\,G(s - s_m)\Big|_{t=0},\ m = \overline{1, M}),\ r = \overline{1, R_0});$$

$$B_{21}(s) = \mathrm{col}\,(\mathrm{str}\,(L_\rho^\Gamma(\partial_x)\,G(s - s_m^0),\ m = \overline{1, M_0}),\ \rho = \overline{1, R_\Gamma});$$

$$B_{22}(s) = \mathrm{col}\,(\mathrm{str}\,(L_\rho^\Gamma(\partial_x)\,G(s - s_m^\Gamma),\ m = \overline{1, M_\Gamma}),\ \rho = \overline{1, R_\Gamma});$$

$$B_{23}(s) = \mathrm{col}\,(\mathrm{str}\,(L_\rho^\Gamma(\partial_x)\,G(s - s_m),\ m = \overline{1, M}),\ \rho = \overline{1, R_\Gamma});$$

$$B_{31}(s) = \mathrm{col}\,(\mathrm{str}\,(L_i(\partial_s)\,G(s - s_m^0),\ m = \overline{1, M_0}),\ i = \overline{1, I});$$

$$B_{32}(s) = \mathrm{col}\,(\mathrm{str}\,(L_i(\partial_s)\,G(s - s_m^\Gamma),\ m = \overline{1, M_\Gamma}),\ i = \overline{1, I});$$

$$B_{33}(s) = \mathrm{col}\,(\mathrm{str}\,(L_i(\partial_s)\,G(s - s_m),\ m = \overline{1, M}),\ i = \overline{1, I}).$$

При этом

$$\Omega_f = \left\{ \bar{f}:\ \int_{(\bullet)} \| B(s)\bar{f} - \bar{U}(s) \| ds \to \min_{\bar{f}} \right\} = \{ \bar{f}:\ \bar{f} = P^+ B_u + \bar{v} - P^+ P \bar{v} \}, \tag{16}$$

где при прозвольном $\bar{v} = \mathrm{col}(v_0, v_\Gamma, v)$ имеем

$$P = [P_{ij}]_{i,\,j=1}^{i,\,j=3},\ \ B_u = \mathrm{col}\,(B_{ui},\ i = \overline{1, 3}),$$

$$P_{ij} = \int_{S_0} B_{1i}^{\mathrm{T}}(x) B_{1j}(x)\,dx + \int_{\Gamma \times [0, T]} B_{2i}^{\mathrm{T}}(s) B_{2j}(s)\,ds + \int_{S_0^T} B_{3i}^{\mathrm{T}}(s) B_{3j}(s)\,ds;$$

$$B_{ui}=\int\limits_{S_0}B_{1i}^{\mathrm{T}}(x)U_0(x)\,dx+\int\limits_{\Gamma\times[0,T]}B_{2i}^{\mathrm{T}}(s)U_\Gamma(s)\,ds+\int\limits_{S_0^T}B_{3i}^{\mathrm{T}}(s)U(s)\,ds.$$

Здесь и далее символом (•) обозначено интегрирование по области изменения аргумента подынтегральной функции, а символом + обозначено псевдообращение матрицы.

Полагая, что

$$P^+=\mathrm{col}(Q_1,Q_2,Q_3),$$

из (16) находим

$$f_0=Q_1(B_u-P\bar{v})+v_0,\ f_\Gamma=Q_2(B_u-P\bar{v})+v_\Gamma,\ f=Q_3(B_u-P\bar{v})+v. \quad (17)$$

При найденных согласно (17) управляюще-моделирующих векторах f, f_0, f_Γ имеем

$$\min_{\bar f\in\Omega_f}\Phi_*=\int\limits_{S_0}(U_0(x))^{\mathrm{T}}U_0(x)\,dx+\int\limits_{\Gamma\times[0,T]}(U_\Gamma(s))^{\mathrm{T}}U_\Gamma(s)\,ds+$$

$$+\int\limits_{S_0^T}(U(s))^{\mathrm{T}}U(s)\,ds-B_u^{\mathrm{T}}P^+B_u.$$

При этом $v_0=v_\Gamma=v\equiv 0$, если $\det P>0$.

Управление с участием начально-краевых возмущающих факторов. Рассмотрим случай, когда управление исследуемым упругим телом выполняется вектором f объемно-распределенных внешнединамических воздействий с участием начально-краевых возмущающих факторов. Функции $U_r^0(x)$ $(r=\overline{1,R_0})$, $U_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ возмущений получим из (6), (7) после подстановки туда вектор-функции $u(s)$, построенной согласно (4), (8), (13). Вектор $\bar f$ управляюще-моделирующих воздействий при этом, как и выше, получим после среднеквадратического обращения системы (15) при условии отсутствия в ней:

1) вектор-функции $U_0(x)$ и первой строки блоков матричной функции $B(s)$ при управлении вектором f и вектор-функцией $U_r^0(x)$ $(r=\overline{1,R_0})$ (задача 1) ;

2) вектор-функции $U_\Gamma(s)$ и второй строки блоков матричной функции $B(s)$ при управлении вектором f и вектор-функцией $U_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ (задача 2) ;

3) вектор-функций $U_0(x)$, $U_\Gamma(s)$ и первых двух строк блоков матричной функции $B(s)$ при управлении вектором f и вектор-функциями $U_r^0(x)$ $(r=\overline{1,R_0})$, $U_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ (задача 3).

Как и выше, управляюще-моделирующие векторы f, f_0, f_Γ будут определяться соотношениями (17), в которых

1) $$P_{ij}=\int\limits_{\Gamma\times[0;T]}B_{2i}^{\mathrm{T}}(s)B_{2j}(s)\,ds+\int\limits_{S_0^T}B_{3i}^{\mathrm{T}}(s)B_{3j}(s)\,ds;$$

$$B_{ui}=\int\limits_{\Gamma\times[0;T]}B_{2i}^{\mathrm{T}}(s)U_\Gamma(s)\,ds+\int\limits_{S_0^T}B_{3i}^{\mathrm{T}}(s)U(s)\,ds,\ i,j=\overline{1,3}$$

(задача 1);

2) $P_{ij} = \int\limits_{S_0} B_{1i}^{\mathrm{T}}(s) B_{1j}(s)\, ds + \int\limits_{S_0^T} B_{3i}^{\mathrm{T}}(s) B_{3j}(s)\, ds;$

$$B_{ui} = \int\limits_{S_0} B_{1i}^{\mathrm{T}}(x)\, U_0(x)\, dx + \int\limits_{S_0^T} B_{3i}^{\mathrm{T}}(s)\, U(s)\, ds,\ \ i, j = \overline{1,3}$$

(задача 2);

3) $P_{ij} = \int\limits_{S_0^T} B_{3i}^{\mathrm{T}}(s) B_{3j}(s)\, ds;$

$$B_{ui} = \int\limits_{S_0^T} B_{3i}^{\mathrm{T}}(s)\, U(s)\, ds,\ \ i, j = \overline{1,3}$$

(задача 3).

Среднеквадратическая точность решений каждой рассмотренной задачи при этом будет определяться соответственно величинами

$$\varepsilon_1^2 =$$

$$= \min_{f, f_0, f_\Gamma} \left[\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int\limits_{\Gamma \times [0;\, T]} \| L_\rho^\Gamma(\partial_x) u(s) - U_\rho^\Gamma(s) \|^2\, ds + \sum_{i=1}^{I} \int\limits_{S_0^T} \| L_i(\partial_s)\, u(s) - U_i(s) \|^2\, ds \right] =$$

$$= \int\limits_{\Gamma \times [0;\, T]} (U_\Gamma(s))^{\mathrm{T}} U_\Gamma(s)\, ds + \int\limits_{S_0^T} (U(s))^{\mathrm{T}} U(s)\, ds - B_u^{\mathrm{T}} P^+ B_u;$$

$$\varepsilon_2^2 = \min_{f, f_0, f_\Gamma} \left[\sum_{r=1}^{R_0} \int\limits_{S_0} || L_r^0(\partial_t)\, u(s) \big|_{t=0} - U_r^0(x) \|^2\, dx + \sum_{i=1}^{I} \int\limits_{S_0^T} \| L_i(\partial_s)\, u(s) - U_i(s) \|^2\, ds \right] =$$

$$= \int\limits_{S_0} (U_0(x))^{\mathrm{T}} U_0(x)\, ds + \int\limits_{S_0^T} (U(s))^{\mathrm{T}} U(s)\, ds - B_u^{\mathrm{T}} P^+ B_u;$$

$$\varepsilon_3^2 = \min_{f, f_0, f_\Gamma} \sum_{i=1}^{I} \int\limits_{S_0^T} \| L_i(\partial_s) u(s) - U_i(s) \|^2\, ds = \int\limits_{S_0^T} (U(s))^{\mathrm{T}} U(s)\, ds - B_u^{\mathrm{T}} P^+ B_u.$$

Управление в установившемся пространственно-временном режиме. Полученное выше решение рассматриваемых задач упрощается, если влиянием начальных (6), поверхностных (7) и начально-поверхностных (6), (7) динамических возмущений на вектор-функцию $u(s)$ состояния тела можно пренебречь, а упруго-динамическое поле смещенных точек тела исследовать в неограниченной временной, пространственной и пространственно-временной областях. При этом в (4) будут отсутствовать составляющие $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$, ($u_0(s)$ и $u_\Gamma(s)$), а в (15) — векторы f_0, f_Γ, (f_0 и f_Γ).

Рассмотрим структуру разрешающих уравнений для этих случаев.

Задача 1. Упругое тело S_0 исследуется в установившемся режиме ($t \in (-\infty; T]$) при заданных $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($s \in S_0^\infty = \Gamma \times (-\infty; 0]$, $\rho = \overline{1, R_\Gamma}$). Желаемое состояние (12) достигается так, чтобы

$$\Phi_\Gamma = \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int\limits_{\Gamma \times [0;\, T]} \| L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, u(s) - U_\rho^\Gamma(s) \|^2\, ds + \sum_{i=1}^{I} \int\limits_{S_0^T} \| L_i(\partial_s)\, u(s) - U_i(s) \|^2\, ds \to \min_{\bar{f}}.$$

Вектор $\bar{f} = \mathrm{col}(f_\Gamma, f)$ управляюще-моделирующих факторов получим согласно (17) после среднеквадратического обращения системы (15), в которой в данном случае

$$B(s) = \begin{pmatrix} B_{22}(s) & B_{23}(s) \\ B_{32}(s) & B_{33}(s) \end{pmatrix}, \quad \overline{U}(s) = \begin{pmatrix} U_\Gamma(s) \\ U(s) \end{pmatrix}.$$

При этом

$$P = \begin{pmatrix} P_{22} & P_{23} \\ P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}, \; B_u = \begin{pmatrix} B_{u2} \\ B_{u3} \end{pmatrix}, \; P^+ = \begin{pmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix},$$

$$P_{ij} = \int\limits_{\Gamma\times[0;T]} B_{2i}^{\mathrm{T}}(s) B_{2j}(s)\, ds + \int\limits_{S_0^T} B_{3i}^{\mathrm{T}}(s) B_{3j}(s)\, ds,$$

$$B_{ui} = \int\limits_{\Gamma\times[0;T]} B_{2i}^{\mathrm{T}}(s) U_\Gamma(s)\, ds + \int\limits_{S_0^T} B_{3i}^{\mathrm{T}}(s) U(s)\, ds.$$

Точность решений задачи будет определяться величиной

$$\min_{\bar{f}} \Phi_\Gamma = \int\limits_{\Gamma\times[0;T]} U_\Gamma^{\mathrm{T}}(s) U_\Gamma(s)\, ds + \int\limits_{S_0^T} U(s) U(s)\, ds - B_u^{\mathrm{T}} P^+ B_u.$$

Задача 2. Рассмотрим вариант управления установившейся динамикой тела S_0 для случая, когда управляющий вектор f объемно-распределенных возмущений дополняется поверхностным управлением $U_\rho^\Gamma(s)$ $(s \in \Gamma \times [-\infty; T])$, т.е. когда

$$\Phi = \sum_{i=1}^{I} \int\limits_{S_0^T} \| L_i(\partial_s) u(s) - U_i(s) \|^2 \, ds \to \min_{f,\, U_\rho^\Gamma(s)\, (\rho = \overline{1, R_\Gamma})}.$$

Как и выше, управляюще-моделирующий вектор $\bar{f} = \mathrm{col}(f_\Gamma, f)$ получим согласно (17), как результат псевдообращения системы (15), в которой теперь $B(s) = (B_{32}(s), B_{33}(s))$, $\overline{U}(s) = U(s)$ при

$$P_{ij} = \int\limits_{S_0^T} B_{3i}^{\mathrm{T}}(s) B_{3j}(s)\, ds,$$

$$B_{ui} = \int\limits_{S_0^T} B_{3i}^{\mathrm{T}}(s) U(s)\, ds \;\; (i, j = \overline{2, 3}).$$

Поверхностное управление $U_\rho^\Gamma(s)$, соответствующее (19), определим из (7). При этом

$$\min_{f,\, U_\rho^\Gamma\, (\rho = \overline{1, R_\Gamma})} \Phi = \int\limits_{S_0^T} U^{\mathrm{T}}(s) U(s)\, ds - B_u^{\mathrm{T}} P^+ B_u.$$

Задача 3. Исследуем динамику упругого тела S_0 для случая, когда поверхностным возмущением можно пренебречь. При заданных функциях $U_r^0(x)$ $(x \in S_0,\, r = \overline{1, R_0})$ управляющее-моделирующий вектор $\bar{f} = \mathrm{col}(f_0, f)$ определим из условия

$$\Phi_0 = \sum_{r=1}^{R_0} \int\limits_{S_0} \| L_r^0(\partial_t)\, u(s)\big|_{t=0} - U_r^0(x) \|^2 \, dx + \sum_{i=1}^{I} \int\limits_{S_0^T} \| L_i(\partial_s) u(s) - U_i(s) \|^2 \, ds \to \min_{\bar{f}},$$

которое, как и выше, приведет к системе (15) при

$$B(s)=\begin{pmatrix} B_{11}(x) & B_{13}(x) \\ B_{31}(s) & B_{33}(s) \end{pmatrix},\ \bar{U}(s)=\begin{pmatrix} U_0(x) \\ U(s) \end{pmatrix}.$$

В результате псевдообращения (15) имеем управляющий и моделирующий векторы f и f_0, аналитические выражения которых получим из (17), полагая

$$P=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{13} \\ P_{31} & P_{33} \end{pmatrix},\ B_u=\begin{pmatrix} B_{u1} \\ B_{u3} \end{pmatrix},\ P^+=\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_3 \end{pmatrix},$$

$$P_{ij}=\int_{S_0} B_{1i}^{\mathrm{T}}(x)B_{1j}(x)\,dx+\int_{S_0^T} B_{3i}^{\mathrm{T}}(s)B_{3j}(s)\,ds,$$

$$B_{ui}=\int_{S_0} B_{1i}^{\mathrm{T}}(s)U_0(s)\,ds+\int_{S_0^T} B_{3i}^{\mathrm{T}}(s)U(s)\,ds.$$

При этом

$$\min_{\bar{f}}\Phi_0=\int_{S_0} U_0^{\mathrm{T}}(x)U_0(x)\,dx+\int_{S_0^T} U^{\mathrm{T}}(s)U(s)\,ds-B_u^{\mathrm{T}}P^+B_u.$$

Задача 4. Рассмотрим вариант решения предыдущей задачи для случая, когда в управлении принимают участие начальные возмущающие факторы $U_r^0(x)$ $(r=\overline{1,R_0})$, а $\Phi\to\min\limits_{f,U_r^0\ (r=\overline{1,R_0})}$.

Управляющие функции $U_r^0(x)$ $(r=\overline{1,R_0})$ определим из (6) при условии, что функция $u(s)$ соотношением (4) представлена через управляюще-моделирующий вектор $\bar{f}=\mathrm{col}(f_0,f)$, для которого имеют место формулы (17) при

$$B(s)=(B_{31}(s),\ B_{33}(s)),\ \bar{U}(s)=U(s).$$

Как и выше,

$$\min_{f,U_r^0\ (r=\overline{1,R_0})}\Phi=\int_{S_0^T} U^{\mathrm{T}}(s)U(s)\,ds-B_u^{\mathrm{T}}P^+B_u.$$

Задача 5. Решение задачи управления телом S_0 будет более простым для случая, когда начально-поверхностными возмущениями можно пренебречь.

Решение задачи $\Phi\to\min\limits_f$ получим, среднеквадратически обращая уравнение $B_{33}(s)f=U(s)$.

В результате находим

$$f=P^+(B_u-Pv)+v\quad\forall v\in R^{3M}$$

при

$$P=\int_{S_0^T} B_{33}^{\mathrm{T}}(s)B_{33}(s)\,ds,\ B_{ui}=\int_{S_0^T} B_{33}^{\mathrm{T}}(s)U(s)\,ds$$

такое, что

$$\min_f\Phi=\int_{S_0^T} U^{\mathrm{T}}(s)U(s)\,ds-B_u^{\mathrm{T}}P^+B_u.$$

Заметим, что однозначность решений рассмотренных задач 1–5 задается условием $\det P > 0$, записанным с учетом определения матрицы P для каждой отдельной задачи.

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ ТРЕХМЕРНОГО УПРУГОГО ТЕЛА ПРИ ИЗВЕСТНЫХ ОБЪЕМНО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВНЕШНЕДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Продолжим рассмотрение задачи управления трехмерным упругим телом S_0 по среднеквадратическому приближению вектор-функции $u(s)$ его состояния к значениям, определенным согласно (12) функциями $U_i(s)$ $(s \in S_0^T,\ i = \overline{1, I})$. В отличие от рассмотренного выше будем считать, что объемно-распределенные возмущения $f(s)$ $(s \in S_0^T)$ известны, а допустимыми для управления телом, которое здесь рассматривается, есть функции $U_r^0(x)$ $(x \in S_0,\ i = \overline{1, R_0})$ и $U_\rho^\Gamma(s)$ $(s \in \Gamma \times [0; T],\ \rho = \overline{1, R_\Gamma})$ начально- и поверхностно-распределенных возмущающих факторов, которые построим при

$$\Phi_\Gamma \to \min_{U_r^0(x)\ (r=\overline{1, R_0})}, \tag{18}$$

$$\Phi_0 \to \min_{U_\rho^\Gamma(s)\ (\rho=\overline{1, R_\Gamma})}, \tag{19}$$

$$\Phi \to \min_{\substack{U_r^0(x)\ (r=\overline{1, R_0}) \\ U_\rho^\Gamma(s)\ (\rho=\overline{1, R_\Gamma})}}. \tag{20}$$

Выражения для управляющих функций $U_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$), $U_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) в задачах (18)–(20) получим из (6), (7) с учетом того, что в (4) составляющая функция $u_\infty(s)$ известна, а моделирующий вектор $\bar{f} = \mathrm{col}(f_0, f_\Gamma)$ в $u_0(s)$ и $u_\Gamma(s)$ определяется среднеквадратическим обращением системы

$$B(s)\bar{f} = \widetilde{U}(s),$$

в которой для задачи (18)

$$B(s) = \begin{pmatrix} B_{21}(s) & B_{22}(s) \\ B_{31}(s) & B_{32}(s) \end{pmatrix},\ \widetilde{U}(s) = \begin{pmatrix} \overline{U}_\Gamma(s) \\ \overline{U}(s) \end{pmatrix},$$

для задачи (19)

$$B(s) = \begin{pmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{31}(s) & B_{32}(s) \end{pmatrix},\ \widetilde{U}(s) = \begin{pmatrix} \overline{U}_0(x) \\ \overline{U}(s) \end{pmatrix},$$

для задачи (20)

$$B(s) = (B_{31}(s),\ B_{32}(s)),\ \widetilde{U}(s) = \overline{U}(s)$$

при

$$\overline{U}_0(x) = U_0(x) - \mathrm{col}\,(L_r^0(\partial_t)\,u_\infty(s)\big|_{t=0},\ r = \overline{1, R_0}),$$

$$\overline{U}_\Gamma(s) = U_\Gamma(s) - \mathrm{col}\,(L_\rho^\Gamma(\partial_x)u_\infty(s),\ \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$\overline{U}(s) = U(s) - \mathrm{col}\,(L_i(\partial_s)u_\infty(s),\ i = \overline{1, I}).$$

Отсюда находим

$$f_0 = Q_1(B_u - Pv) + v_0,\ f_\Gamma = Q_2(B_u - Pv) + v_\Gamma,$$

где при произвольных $3M_0$-мерных и $3M_\Gamma$-мерных векторах v_0, v_Γ, тождественно равных нулю, если $\det P > 0$, имеем

$$v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_\Gamma \end{pmatrix}, \ P = [P_{ij}]_{i,\,j=1}^{i,\,j=2}, \ B_u = \begin{pmatrix} B_{u1} \\ B_{u2} \end{pmatrix}, \ P^+ = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь для задачи (18)

$$P_{ij} = \int\limits_{\Gamma\times[0;T]} B_{2i}^{\mathrm{T}}(s) B_{2j}(s)\, ds + \int\limits_{S_0^T} B_{3i}^{\mathrm{T}}(s) B_{3j}(s)\, ds,$$

$$B_{ui} = \int\limits_{\Gamma\times[0;T]} B_{2i}^{\mathrm{T}}(s) \overline{U}_\Gamma(s)\, ds + \int\limits_{S_0^T} B_{3i}^{\mathrm{T}}(s) \overline{U}(s)\, ds;$$

для задачи (19)

$$P_{ij} = \int\limits_{S_0} B_{1i}^{\mathrm{T}}(x) B_{1j}(x)\, dx + \int\limits_{S_0^T} B_{3i}^{\mathrm{T}}(s) B_{3j}(s)\, ds,$$

$$B_{ui} = \int\limits_{S_0} B_{1i}^{\mathrm{T}}(x) \overline{U}_0(x)\, dx + \int\limits_{S_0^T} B_{3i}^{\mathrm{T}}(s) \overline{U}(s)\, ds;$$

для задачи (20)

$$P_{ij} = \int\limits_{S_0^T} B_{3i}^{\mathrm{T}}(s) B_{3j}(s)\, ds, \ B_{ui} = \int\limits_{S_0^T} B_{3i}^{\mathrm{T}}(s) \overline{U}(s)\, ds.$$

При этом

$$\min_{f_0,\, f_\Gamma} \Phi_\Gamma = \int\limits_{\Gamma\times[0;T]} \overline{U}_\Gamma^{\mathrm{T}}(s) \overline{U}_\Gamma(s)\, ds + \int\limits_{S_0^T} \overline{U}^{\mathrm{T}}(s) \overline{U}(s)\, ds - B_u^{\mathrm{T}} P^+ B_u,$$

$$\min_{f_0,\, f_\Gamma} \Phi_0 = \int\limits_{S_0} \overline{U}_0^{\mathrm{T}}(x) \overline{U}_0(x)\, dx + \int\limits_{S_0^T} \overline{U}^{\mathrm{T}}(s) \overline{U}(s)\, ds - B_u^{\mathrm{T}} P^+ B_u,$$

$$\min_{f_0,\, f_\Gamma} \Phi = \int\limits_{S_0^T} \overline{U}^{\mathrm{T}}(s) \overline{U}(s)\, ds - B_u^{\mathrm{T}} P^+ B_u.$$

Полученные решения рассмотренных задач будут более простыми, если в задаче (18) можно пренебречь поверхностными, а в задаче (19) — начальными возмущениями. Тогда $\Phi_\Gamma = \Phi_0 = \Phi$. При этом

$$u(s) = u_\infty(s) + u_0(s), \ f_0 = P_1^+ (B_{u1} - P_1 v_0) + v_0$$

для задачи (18),

$$u(s) = u_\infty(s) + u_\Gamma(s), \ f_\Gamma = P_2^+ (B_{u2} - P_2 v_\Gamma) + v_\Gamma$$

для задачи (19),

а $P_i = \int\limits_{S_0^T} B_{3i}^{\mathrm{T}}(s) B_{3i}(s)\, ds$, $B_{ui} = \int\limits_{S_0^T} B_{3i}^{\mathrm{T}}(s) \overline{U}(s)\, ds$.

Заметим, что, как и выше, $v_0 \equiv 0$ и $v_\Gamma \equiv 0$ соответственно при $\det P_1 > 0$ и $\det P_2 > 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена сложная и практически сформулированная задача управления трехмерным упругим телом произвольной формы при наличии минимального количества информации о его начальном и краевом состояниях. Цель управления — среднеквадратическое приближение линейно преобразованного поля упруго-динамических смещений точек тела к непрерывно заданным функциям.

Рассмотрены случаи управления динамикой тела через объемно-, поверхностно- и начально-распределенные внешнединамические управляющие воздействия, взятые по одному, по два и по три. Алгоритмы решения рассматриваемых задач, основанные на обобщениях псевдоинверсной алгебры, просты, наглядны и доступны для инженерной практики. Полученные решения проанализированы на точность и однозначность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стоян В.А, Двирничук К.В. О математическом моделировании трехмерного поля поперечных динамических смещений толстых упругих плит. *Кибернетика и системный анализ.* 2013. № 6. С. 58–72.
2. Стоян В.А, Двирничук К.В. О математическом моделировании задач управления динамикой толстых упругих плит. I. Управление при непрерывно заданном желаемом состоянии. *Кибернетика и системный анализ.* 2014. Т. 50, № 3. С. 70–96.
3. Стоян В.А, Двирничук К.В. О математическом моделировании задач управления динамикой толстых упругих плит. II. Управление при дискретно заданном желаемом состоянии. *Кибернетика и системный анализ.* 2015. Т. 51, № 2. С. 117–133.
4. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. Москва: Гостехиздат, 1955. 492 с.
5. Стоян В.А. Методи математичного моделювання в задачах динаміки товстих пружних плит. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2016. 277 с.
6. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2011. 320 с.

Надійшла до редакції 06.02.2017

В.А. Стоян

**ПРО ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ ДИНАМІКОЮ НЕПОВНО ВИЗНАЧЕНИХ ТРИВИМІРНИХ ПРУЖНИХ ТІЛ.
І. ВИПАДОК НЕПЕРЕРВНО ЗАДАНОГО БАЖАНОГО СТАНУ**

Анотація. Розв’язано задачі керування лінійно перетвореною вектор-функцією зміщень точок тривимірного пружного тіла з метою середньоквадратичного наближення її до неперервно заданих значень. Задачі розв’язуються без обмежень на геометрію тіла і за умови неперервно визначених спостережень за його початково-крайовим станом. Як керувальні фактори розглянуто об’ємно-, поверхнево- і початково-розподілені зовнішньодинамічні збурення. Проведено оцінювання точності та однозначності керування.

Ключові слова: просторово розподілені динамічні системи, просторові задачі теорії пружності, псевдоінверсія, керування.

V.A. Stoyan

**PROBLEMS OF CONTROL OF THE DYNAMICS OF NOT FULLY DETERMINED THREE-DIMENSIONAL ELASTIC BODIES.
I. THE CASE OF CONTINUOUSLY DEFINED DESIRED STATE**

Abstract. The author solves problems of control of a linearly transformed vector function of displacements of points of a three-dimensional elastic body with the purpose of root-mean-square approximation to its continuously defined values. No constraints are imposed on body’s geometry and observations of its initial–boundary state are continuously defined. Spatial, superficial and initially distributed external-dynamic perturbations are considered as controlling factors. The accuracy and uniqueness of control are evaluated.

Keywords: spatially distributed dynamic systems, spatial problems of elastic theory, pseudoinversion, control.

Стоян Владимир Антонович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: v_a_stoyan@ukr.net.