УДК 517.9:519.6

В.М. БУЛАВАЦКИЙ

РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ ДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ С *ABC*-ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Аннотация. Для геофильтрационной математической модели с дробной производной Атангана–Балеану получены замкнутые решения краевых задач теории фильтрации в однородном и слоистом массивах конечной мощности. Приведены постановки и решения задачи с нелокальными граничными условиями и обратной задачи дробно-дифференциальной фильтрационной динамики.

Ключевые слова: математическое моделирование, дробно-дифференциальная динамика фильтрационных процессов, геопористые среды, неклассические модели, уравнение фильтрации с *ABC*-дробной производной, краевые задачи, замкнутые решения.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи математического моделирования динамики геомиграционных процессов в условиях наличия существенного отклонения от равновесного состояния [1] актуальны для геоинформатики, геоматематики, а также геоэкологии, в частности при изучении вопросов охраны подземных вод от загрязнения промышленными либо бытовыми стоками. При моделировании динамики указанных процессов эффективен подход, базирующийся на использовании формализма интегро-дифференцирования дробного порядка [2–5]. Исследованию различных аспектов моделирования дробно-дифференциальной геофильтрационной динамики посвящено много публикаций, даже краткий обзор которых невозможен ввиду ограниченного объема настоящей работы. Отметим лишь, что различными авторами рассматривались геофильтрационные математические модели и постановки соответствующих краевых задач на основе понятий дробных производных в смысле Капуто и Римана–Лиувилля [2–8], Хильфера [9–13], Хильфера–Прабхакара [14], Капуто–Фабрицио [15, 16] и др.

В последнее время в работах А. Атангана и Д. Балеану [17, 18] введены новые производные дробного порядка (в смысле Капуто и в смысле Римана) с несингулярными ядрами в виде функций Миттаг–Леффлера и изучен ряд их свойств. Что касается области возможных применений этих объектов, то интересна попытка постановки и решения на основе моделей с упомянутыми неклассическими дробными производными задач моделирования дробно-дифференциальной фильтрационной динамики в геопористых средах в условиях временной неравновесности. Производную дробного порядка Атангана–Балеану в смысле Капуто в дальнейшем для краткости будем называть *ABC*-дробной производной. Приведем ее формальное определение.

Согласно [17, 18] *ABC*-дробная производная порядка α по переменной t от функции $f(t)$ определяется соотношением

$$ {}^{ABC}D_t^{\alpha} f(t) = a_{\alpha} \int_0^t f'(\tau) E_{\alpha}[-b_{\alpha}(t-\tau)^{\alpha}]\, d\tau, \tag{1} $$

где $f \in H^1(0, b)$, $b > 0$, $H^1(0, b) = \{v \in L^2(0, b) \mid v' \in L^2(0, b)\}$, $a_\alpha = \dfrac{B(\alpha)}{1-\alpha}$, $b_\alpha = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$, $B(\alpha) = 1 - \alpha + \dfrac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ $(0 < \alpha \le 1)$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция, $E_\alpha(z)$ — функция Миттаг–Леффлера [19]. При этом имеет место следующая формула преобразования Лапласа *ABC*-дробной производной [17, 18]:

$$L[{}^{ABC}D_t^\alpha f(t)] = a_\alpha \frac{s^\alpha L[f(t)] - s^{\alpha-1} f(0)}{s^\alpha + b_\alpha}, \tag{2}$$

где L — оператор преобразования Лапласа, s — параметр указанного преобразования.

В настоящей работе для моделирования неравновесной во времени дробно-дифференциальной геофильтрационной динамики используется математическая модель процесса, основанная на понятии *ABC*-дробной производной. В рамках указанной модели получены замкнутые решения ряда краевых задач неклассической теории фильтрации в геопористых середах, включая задачу с нелокальными граничными условиями и обратную задачу для обобщенного уравнения геофильтрационной динамики.

УРАВНЕНИЕ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОФИЛЬТРАЦИОННОЙ ДИНАМИКИ С *ABC*-ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ МАССИВА КОНЕЧНОЙ МОЩНОСТИ

Предположим, что имеет место фильтрационный закон Дарси [20]

$$u_x = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{3}$$

где u_x — скорость фильтрации, $p(x, t)$ — давление, k — коэффициент фильтрации, μ — вязкость жидкости.

Общепринятое уравнение неразрывности фильтрационного потока

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \beta^* \frac{\partial p}{\partial t} = f, \tag{4}$$

где β^* — коэффициент упругоемкости пласта [21], f — функция источника, запишем в следующем (обобщенном на случай учета эффектов временной неравновесности процесса) виде:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \beta^* \, {}^{ABC}D_t^\alpha p(x, t) = f \quad (0 < \alpha \le 1). \tag{5}$$

Здесь ${}^{ABC}D_t^\alpha$ — оператор *ABC*-дробной производной порядка α по переменной t, определенный согласно (1). (Отметим, что из (5) при $\alpha \to 1$ получаем соотношение (4).) Отсюда, принимая во внимание соотношение (3), имеем уравнение неклассической теории фильтрации в геопористой середе вида

$${}^{ABC}D_t^\alpha p(x, t) = \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{6}$$

где $\kappa = \dfrac{k}{\mu\beta^*}$ — коэффициент пьезопроводности [20, 21].

Заметим, что, в частности, при $\alpha \to 1$ из уравнения (6) получаем стандартное диффузионное уравнение параболического типа, принятое в классической математической модели геофильтрации [20, 21].

В рамках базирующейся на уравнении (6) модели простейшая краевая задача теории фильтрации для массива конечной мощности l с проницаемыми гранями формулируется как задача отыскания в области $\Omega = \{(x, t): 0 < x < l,\ t > 0\}$ решения указанного уравнения при следующих краевых условиях:

$$p(0, t) = 0, \quad p(l, t) = 0 \quad (t \ge 0), \tag{7}$$

$$p(x, 0) = \varphi(x) \quad (0 \le x \le l), \tag{8}$$

где $\varphi(x)$ — заданная функция начального распределения давлений в массиве.

Приведем краткое изложение методики получения замкнутого решения краевой задачи (6)–(8).

Пусть существует конечное интегральное синус-преобразование Фурье функции $p(x, t)$ по геометрической переменной [22]. Тогда в пространстве изображений по Фурье рассматриваемая краевая задача запишется в виде

$$^{ABC}D_t^{\alpha}\, \bar{p}_n(t) + \omega_n \bar{p}_n(t) = \bar{f}_n(t), \tag{9}$$

$$\bar{p}_n(0) = \mu_n, \tag{10}$$

где

$$\bar{p}_n(t) = \int_0^l p(x, t)\sin(\lambda_n x)dx, \quad \bar{f}_n(t) = \int_0^l f(x, t)\sin(\lambda_n x)dx,$$

$$\mu_n = \int_0^l \varphi(x)\sin(\lambda_n x)dx, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \omega_n = \kappa\lambda_n^2 \quad (n \in N).$$

Применяя к (9) интегральное преобразование Лапласа по временной переменной, с учетом (10) и соотношения (2) имеем

$$\hat{\bar{p}}_n(s) = \frac{1}{a_\alpha + \omega_n}\left[\left(1 + \frac{q_\alpha^{(n)}}{s^\alpha + c_\alpha^{(n)}}\right)\hat{\bar{f}}_n(s) + a_\alpha \mu_n \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + c_\alpha^{(n)}}\right], \tag{11}$$

где

$$c_\alpha^{(n)} = \frac{b_\alpha \omega_n}{a_\alpha + \omega_n}, \quad q_\alpha^{(n)} = \frac{a_\alpha b_\alpha}{a_\alpha + \omega_n}, \quad \hat{\bar{f}}_n(s) = L(\bar{f}_n(t)) \quad (n \in N).$$

Возвращаясь в соотношениях (11) к оригиналам по переменной t, с учетом известных [23] соотношений

$$L[E_\alpha(-c_\alpha^{(n)} t^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + c_\alpha^{(n)}}, \quad L[t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c_\alpha^{(n)} t^\alpha)] = \frac{1}{s^\alpha + c_\alpha^{(n)}}$$

(здесь $E_\alpha(z)$, $E_{\alpha,\alpha}(z)$ — соответственно одно- и двухпараметрические функции Миттаг–Леффлера [23]) получаем

$$\bar{p}_n(t) = \frac{1}{a_\alpha + \omega_n}\{\bar{f}_n(t) + a_\alpha \mu_n E_\alpha(-c_\alpha^{(n)} t^\alpha) +$$

$$+ q_\alpha^{(n)} \int_0^t E_{\alpha,\alpha}[-c_\alpha^{(n)}(t-\tau)^\alpha](t-\tau)^{\alpha-1} \bar{f}_n(\tau)d\tau\} \quad (n \in N). \tag{12}$$

Далее, возвращаясь в область оригиналов по геометрической переменной, получаем решение рассматриваемой задачи в виде

$$p(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}_n(t) \sin(\lambda_n x), \tag{13}$$

где $\bar{p}_n(t)$ $(n \in N)$ даются соотношениями (12).

Нетрудно показать, что полученное решение удовлетворяет начальному условию (8) рассматриваемой задачи при выполнении следующих ограничений:

$$\kappa\varphi''(x) + f(x, 0) = 0 \ \ (0 < x < l), \ \ \varphi(0) = \varphi(l) = 0.$$

Отметим также, что, в частности, при $\alpha \to 1$ из соотношения (12) получаем

$$\bar{p}_n(t) = \mu_n e^{-\omega_n t} + \int_0^t e^{-\omega_n (t-\tau)} \bar{f}_n(\tau) d\tau \ \ (n \in N). \tag{14}$$

Соотношения (13), (14) дают решение соответствующей краевой задачи в рамках классической математической модели упругого режима фильтрации [20, 21].

ЗАДАЧА МОДЕЛИРОВАНИЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОФИЛЬТРАЦИОННОЙ ДИНАМИКИ В ТРЕХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ В УСЛОВИЯХ БОКОВОГО ПРИТОКА

Далее в рамках рассматриваемой математической модели геофильтрации получено решение задачи о дробно-дифференциальной динамике напоров при фильтрации из водоемов с постоянными уровнями в трехслойной геопористой среде. Согласно фильтрационной схеме из [24] предполагается, что трехслойная среда состоит из сильно проницаемых верхнего и нижнего слоев с коэффициентами фильтрации k_1, k_2 (и мощностями соответственно m_1, m_2), которые разделены слабо проницаемой прослойкой мощности m с коэффициентом фильтрации k. Тогда задача о динамике напоров $h(x, t)$ и $H(x, t)$ соответственно в верхнем и нижнем слоях геомассива сводится к решению следующей краевой задачи:

$$^{ABC}D_t^{\alpha} h(x, t) = a_1 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - b_1 (h - H) + f(x, t), \tag{15}$$

$$^{ABC}D_t^{\alpha} H(x, t) = a_2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + b_2 (h - H), \tag{16}$$

$$h(0, t) = H(0, t) = \widetilde{H}_1, \ \ h(l, t) = H(l, t) = \widetilde{H}_2, \tag{17}$$

$$h(x, 0) = h_0^{(1)}(x), \ \ H(x, 0) = h_0^{(2)}(x), \tag{18}$$

где l — расстояние между водоемами; $\widetilde{H}_i$ $(i = 1, 2)$ — заданные постоянные напоры на границах области фильтрации; $f(x, t)$ — известная функция источника; $h_0^{(i)}(x)$ $(i = 1, 2)$ — функции начальных значений напоров в слоях; $a_i = \dfrac{k_i m_i}{\mu_i}$, $b_i = \dfrac{k}{m\mu_i}$ $(i = 1, 2)$; μ_1 — коэффициент водоотдачи в верхнем слое; μ_2 — коэффициент упругоемкости нижнего слоя; $^{ABC}D_t^{\alpha}$ — оператор ABC-дробной производной порядка α по переменной t.

Переходя от задачи (15)–(18) к соответствующей задаче с однородными граничными условиями с помощью подстановок

$$h_1 = h - \chi(x), \;\; h_2 = H - \chi(x), \;\; \chi(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\widetilde{H}_1 + \frac{x}{l}\widetilde{H}_2, \tag{19}$$

получаем краевую задачу

$${}^{ABC}D_t^{\alpha} h_1(x,t) = a_1 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - b_1(h_1 - h_2) + f(x,t), \tag{20}$$

$${}^{ABC}D_t^{\alpha} h_2(x,t) = a_2 \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + b_2(h_1 - h_2), \tag{21}$$

$$h_i(0,t) = h_i(l,t) = 0 \;\; (i = 1,2), \tag{22}$$

$$h_i(x,0) = \varphi_i(x) \;\; (i = 1,2), \tag{23}$$

где

$$\varphi_i(x) = h_0^{(i)}(x) - \chi(x) \;\; (i = 1,2). \tag{24}$$

Пусть существует конечное интегральное синус-преобразование Фурье функций h_i $(i = 1,2)$ по переменной x:

$$\overline{h}_{i_n}(t) = \int_0^l h_i(x,t)\sin(\lambda_n x)dx \;\left(\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \;\; n \in N, \;\; i = 1,2\right).$$

Тогда в пространстве изображений по Фурье краевая задача (20)–(24) записывается в виде

$${}^{ABC}D_t^{\alpha} \overline{h}_{1_n}(t) = -(b_1 + a_1\lambda_n^2)\overline{h}_{1_n}(t) + b_1\overline{h}_{2_n}(t) + \overline{f}_n(t), \tag{25}$$

$${}^{ABC}D_t^{\alpha} \overline{h}_{2_n}(t) = -(b_2 + a_2\lambda_n^2)\overline{h}_{2_n}(t) + b_2\overline{h}_{1_n}(t), \tag{26}$$

$$\overline{h}_{i_n}(0) = \xi_n^{(i)} \;\; (i = 1,2; \;\; n \in N), \tag{27}$$

где

$$\xi_n^{(i)} = \int_0^l \varphi_i(x)\sin(\lambda_n x)dx \;\; (i = 1,2; \;\; n \in N).$$

Умножая (25) на неопределенную действительную постоянную $r \neq 0$ и складывая полученный результат с (26), находим

$${}^{ABC}D_t^{\alpha}[r\overline{h}_{1_n}(t) + \overline{h}_{2_n}(t)] = [b_1 r - (b_2 + a_2\lambda_n^2)]\left[\frac{b_2 - r(b_1 + a_1\lambda_n^2)}{b_1 r - (b_2 + a_2\lambda_n^2)}\overline{h}_{1_n}(t) + \overline{h}_{2_n}(t)\right] +$$

$$+ r\overline{f}_n(t), \;\; (b_1 r - (b_2 + a_2\lambda_n^2) \neq 0, \;\; n \in N). \tag{28}$$

Положив $\dfrac{b_2 - r(b_1 + a_1\lambda_n^2)}{b_1 r - (b_2 + a_2\lambda_n^2)} = r \; (n \in N)$, получим для определения r квадратное уравнение $b_1 r^2 + [b_1 - b_2 + (a_1 - a_2)\lambda_n^2]r - b_2 = 0.$ Отсюда имеем

$$r_{1,2}^{(n)}=\frac{b_2-b_1-(a_1-a_2)\lambda_n^2\pm\sqrt{\Delta_n}}{2b_1}\quad (b_1\neq 0), \tag{29}$$

где $\Delta_n=[b_1-b_2+(a_1-a_2)\lambda_n^2]^2+4b_1b_2>0\ (n\in N)$.

Произведя замену

$$\psi_i^{(n)}(t)=r_i^{(n)}\bar{h}_{1_n}(t)+\bar{h}_{2_n}(t)\ \ (i=1,2;\ n\in N), \tag{30}$$

из (28) получаем для отыскания неизвестных функций $\psi_i^{(n)}(t)\ (i=1,2;\ \ n\in N)$ совокупность уравнений

$$^{ABC}D_t^{\alpha}\psi_i^{(n)}(t)-\kappa_i^{(n)}\psi_i^{(n)}(t)=r_i^{(n)}\bar{f}_n(t)\ \ (i=1,2;\ n\in N), \tag{31}$$

где обозначено $\kappa_i^{(n)}=b_1r_i^{(n)}-(b_2+a_2\lambda_n^2),\ (i=1,2;n\in N)$.

Соответствующие начальные условия для (31) согласно (27), (30) принимают вид

$$\psi_i^{(n)}(0)=\zeta_i^{(n)}\ \ (i=1,2;\ \ n\in N), \tag{32}$$

где

$$\zeta_i^{(n)}=r_i^{(n)}\xi_n^{(1)}+\xi_n^{(2)}\ \ (i=1,2;\ n\in N). \tag{33}$$

Аналогично изложенному ранее можно показать, что решения задач (31), (32) записываются в виде

$$\psi_i^{(n)}(t)=\frac{1}{a_\alpha-\kappa_i^{(n)}}\{r_i^{(n)}\bar{f}_n(t)+a_\alpha\zeta_i^{(n)}E_\alpha(-c_\alpha^{(i,n)}t^\alpha)+$$

$$+Q_\alpha^{(i,n)}r_i^{(n)}\int_0^t E_{\alpha,\alpha}[-c_\alpha^{(i,n)}(t-\tau)^\alpha](t-\tau)^{\alpha-1}\bar{f}_n(\tau)d\tau\}\ \ (i=1,2;\ \ n\in N), \tag{34}$$

где

$$c_\alpha^{(i,n)}=\frac{b_\alpha\kappa_i^{(n)}}{\kappa_i^{(n)}-a_\alpha},\ Q_\alpha^{(i,n)}=b_\alpha-c_\alpha^{(i,n)}\ \ (i=1,2;\ n\in N)$$

и величины $\zeta_i^{(n)}\ \ (i=1,2;\ n\in N)$ определяются согласно соотношений (33).

Выражая из системы (30) функции $\bar{h}_{i_n}(t)\ (i=1,2;\ n\in N)$ через функции $\psi_i^{(n)}(t)\ (i=1,2;n\in N)$ и переходя в область оригиналов преобразования Фурье по геометрической переменной, получаем с учетом (19) решение рассматриваемой краевой задачи в виде

$$h(x,t)=\chi(x)+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_1^{(n)}-r_2^{(n)}}[\psi_1^{(n)}(t)-\psi_2^{(n)}(t)]\sin(\lambda_n x),$$

$$H(x,t)=\chi(x)+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_1^{(n)}-r_2^{(n)}}[r_1^{(n)}\psi_2^{(n)}(t)-r_2^{(n)}\psi_1^{(n)}(t)]\sin(\lambda_n x),$$

где $r_i^{(n)},\psi_i^{(n)}(t)\ \ (i=1,2;n\in N)$ даются соотношениями (29), (34).

В результате простых, но громоздких преобразований можно показать, что для выполнения начальных условий (18) необходимо удовлетворить следующим соотношениям, накладываемым в качестве ограничений на функции $h_0^{(i)}(x)$ $(i=1,2)$ и функцию источника f:

$$h_0^{(2)}(0)=\widetilde{H}_1,\ h_0^{(2)}(l)=\widetilde{H}_2,\ h_0^{(1)}(x)=h_0^{(2)}(x)-\frac{a_2}{b_2}\frac{d^2h_0^{(2)}(x)}{dx^2}\ \ (0<x<l),$$

$$\frac{d^2h_0^{(2)}(0)}{dx^2}=\frac{d^2h_0^{(2)}(l)}{dx^2},$$

$$f(x,0)=\frac{1}{b_2}\frac{d^2}{dx^2}\left[a_1a_2\frac{d^2h_0^{(2)}(x)}{dx^2}-(a_1b_2+b_1a_2)h_0^{(2)}(x)\right]\ (0<x<l).$$

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В области $\Omega=\{(x,t):0<x<1,\ 0<t<T\}$ рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения фильтрации с ABC-дробной производной:

$$^{ABC}D_t^\alpha p(x,t)=\kappa p_{xx}(x,t)+f(x,t)\,, \tag{35}$$

$$p(1,t)=0,\ \ p_x(0,t)=p_x(1,t)\ \ (0<t\le T)\,, \tag{36}$$

$$p(x,0)=0\ \ (0\le x\le 1)\,, \tag{37}$$

где $\kappa=\text{const}>0$, f — заданная функция источника.

Задача (35)–(37) является аналогом задачи Самарского–Ионкина [25] для диффузионных уравнений дробного порядка с ABC-дробной производной. Для ее решения далее используем поход, предложенный в [25, 26] для классического уравнения теплопроводности.

Соответствующая спектральная задача в рассматриваемом случае имеет вид

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0\ \ (0<x<1),$$

$$X(1)=0,\ \ X'(0)=X'(1).$$

Как известно [27], собственные значения данной спектральной задачи $\lambda_n=2\pi n$ $(n\in N)$. Соответствующие указанным собственным значениям собственные и присоединенные функции имеют вид

$$\varphi_0(x)=2(1-x),\ \varphi_{1n}(x)=4(1-x)\cos(\lambda_nx),\ \varphi_{2n}(x)=4\sin(\lambda_nx)\ \ (n\in N)\,. \tag{38}$$

Система функций (38) рассмотрена в работах [27, 28], в которых показано, что она замкнута, минимальна и образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. Система (38) не является ортогональной и для нее в работе [28] выписана система собственных и присоединенных функций сопряженной задачи

$$\psi_0(x)=1,\ \psi_{1n}(x)=\cos(\lambda_nx),\ \psi_{2n}(x)=x\sin(\lambda_nx)\ \ (n\in N)\,. \tag{39}$$

Системы (38), (39) образуют биортогональную на интервале $(0,1)$ систему функций, любую функцию из $L_2(0,1)$ можно разложить в биортогональный ряд. В частности функции $p(x,t)$, $f(x,t)$ разлагаются в ряды вида

$$p(x,t)=p_0(t)\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}p_{kn}(t)\varphi_{kn}(x)\,, \tag{40}$$

$$f(x,t)=f_0(t)\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}f_{kn}(t)\varphi_{kn}(x), \tag{41}$$

где

$$p_0(t)=(p(x,t),\psi_0(x)),\ \ f_0(t)=(f(x,t),\psi_0(x)),$$

$$p_{kn}(t)=(p(x,t),\psi_{kn}(x)),\ \ f_{kn}(t)=(f(x,t),\psi_{kn}(x))\quad (k=1,2;\ n\in N),$$

(f,g) — скалярное произведение в $L_2(0,1)$.

Подставляя соотношения (40), (41) в уравнение (35) и начальное условие (37), получаем для определения неизвестных функций $p_0(t)$, $p_{kn}(t)$ $(k=1,2)$ следующие задачи:

$$^{ABC}D_t^{\alpha}\, p_0(t)=f_0(t),\ \ p_0(0)=0, \tag{42}$$

$$^{ABC}D_t^{\alpha}\, p_{1n}(t)+\kappa\lambda_n^2 p_{1n}(t)=f_{1n}(t),\ \ p_{1n}(0)=0\ \ (n\in N), \tag{43}$$

$$^{ABC}D_t^{\alpha}\, p_{2n}(t)+\kappa\lambda_n^2 p_{2n}(t)=f_{2n}(t)+2\kappa\lambda_n p_{1n}(t),\ \ p_{2n}(0)=0\ \ (n\in N). \tag{44}$$

На основании изложенного при выполнении условия $f(x,0)=0$ $(0<x<1)$ решения задач (42)–(44) запишутся в виде

$$p_0(t)=\frac{1}{a_\alpha}\left[f_0(t)+\frac{b_\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f_0(\tau)d\tau\right], \tag{45}$$

$$p_{1n}(t)=\frac{1}{a_\alpha+\kappa\lambda_n^2}\left\{f_{1n}(t)+q_\alpha^{(n)}\int_0^t E_{\alpha,\alpha}[-c_\alpha^{(n)}(t-\tau)^\alpha](t-\tau)^{\alpha-1}f_{1n}(\tau)d\tau\right\}, \tag{46}$$

$$p_{2n}(t)=\frac{1}{a_\alpha+\kappa\lambda_n^2}\left\{f_{2n}(t)+2\kappa\lambda_n p_{1n}(t)+\right.$$

$$\left.+q_\alpha^{(n)}\int_0^t E_{\alpha,\alpha}[-c_\alpha^{(n)}(t-\tau)^\alpha](t-\tau)^{\alpha-1}[f_{2n}(\tau)+2\kappa\lambda_n p_{1n}(\tau)]d\tau\right\}, \tag{47}$$

где

$$c_\alpha^{(n)}=\frac{\kappa b_\alpha\lambda_n^2}{a_\alpha+\kappa\lambda_n^2},\ \ q_\alpha^{(n)}=\frac{a_\alpha b_\alpha}{a_\alpha+\kappa\lambda_n^2},\ \ a_\alpha=\frac{B(\alpha)}{1-\alpha},\ \ b_\alpha=\frac{\alpha}{1-\alpha}\ \ (n\in N).$$

Таким образом, формальное решение задачи (35)–(37) дается соотношением (40), где функции $p_0(t)$, $p_{kn}(t)$ $(k=1,2)$ определяются соотношениями (45)–(47). При этом нетрудно показать, что построенное решение является классическим решением рассматриваемой задачи.

Докажем, например, соотношение $p(x,t)\in C(\overline{\Omega})$. Рассмотрим вопрос о сходимости ряда (40) для функции p. Пусть $f\in\Upsilon:=\{\upsilon:\upsilon_{xx}\in C(\overline{\Omega})\}$, причем $f_x(0,t)=f_x(1,t)$. Тогда, как показано в [29], имеют место соотношения

$$|f_{kn}(t)|\le F/\lambda_n^2\ \ (k=1,2;\ n\in N;\ t\in(0,T]), \tag{48}$$

где $F>0$ — некоторая положительная постоянная. Поскольку согласно, например, [23] имеет место неравенство

$$|\, t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c_{\alpha}^{(n)} t^{\alpha})| \le \frac{M_1}{c_{\alpha}^{(n)}} \;\; (n \in N)\,, \tag{49}$$

то из соотношения (46) с учетом (48) и (49) получаем

$$|\, p_{1n}(t)| \le \frac{1}{a_{\alpha} + \kappa\lambda_n^2} \left(\frac{F}{\lambda_n^2} + \frac{F_1}{\lambda_n^4} \right) \le \frac{G_1}{\lambda_n^4} \;\; (n \in N;\;\; t \in (0, T\,])\,, \tag{50}$$

где M_1, F_1, G_1 — положительные постоянные.

Аналогично из (47) с учетом (48), (49) имеем

$$|\, p_{2n}(t)| \le \frac{1}{a_{\alpha} + \kappa\lambda_n^2} \Bigg[|\, f_{2n}(t)| + 2\kappa\lambda_n |\, p_{1n}(t)| +$$

$$+ q_{\alpha}^{(n)} \int_0^t E_{\alpha,\alpha}[-c_{\alpha}^{(n)} (t-\tau)^{\alpha}](t-\tau)^{\alpha-1} [|\, f_{2n}(\tau)| + 2\kappa\lambda_n |\, p_{1n}(\tau)|\,] d\tau \Bigg] \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda_n^2} \left(\frac{F_2}{\lambda_n^2} + \frac{G_1}{\lambda_n^3} + \frac{F_3}{\lambda_n^4} + \frac{F_4}{\lambda_n^5} \right) \le \frac{G_2}{\lambda_n^4} \;\; (n \in N;\;\; t \in (0, T\,])\,. \tag{51}$$

(Здесь $F_2, F_3, F_4, G_2 = \mathrm{const} > 0$.)

С учетом оценок (50), (51) заключаем, что ряды из (40) (в силу мажорантного признака Вейерштрасса) сходятся абсолютно и равномерно в области $\Omega_{\varepsilon} = [0, 1] \times [\varepsilon, T\,]$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, функция $p(x, t)$ непрерывна: $p \in C(\overline{\Omega})$. Аналогично устанавливается и непрерывность на $\overline{\Omega}$ функций $p_x, \, p_{xx}, {}^{ABC}\, D_t^{\alpha}\, p$.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ С *ABC*-ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Рассмотрим в области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < l,\; 0 < t \le T\}$ задачу определения правой части $F_0(x)$ неклассического уравнения фильтрации

$${}^{ABC}\, D_t^{\alpha}\, p(x, t) = p_{xx}(x, t) + F_0(x),\;\; (x, t) \in \Omega, \tag{52}$$

и его решения $p(x, t)$, удовлетворяющего условиям

$$p(0, t) = 0,\;\; p(l, t) = 0 \;\;\; t \in [0, T\,]\,, \tag{53}$$

$$p(x, 0) = F_1(x) \;\; x \in [0, l\,]\,, \tag{54}$$

$$\int_0^T p(x, t)\, dt = F_2(x) \;\; x \in [0, l\,]\,. \tag{55}$$

Здесь $F_1(x), F_2(x)$ — заданные функции, $0 < \alpha < 1$.

Под решением задачи (52)–(55) будем понимать пару функций ($p(x, t)$, $F_0(x)$) таких, что $p(x, t) \in C(\overline{\Omega})$, $F_0(x) \in C[0, l\,]$, $p_{xx}(x, t)$, ${}^{ABC}\, D_t^{\alpha}\, p(x, t) \in C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (52) в области Ω и условиям (53)–(55).

Предполагая существование конечного интегрального синус-преобразования Фурье функции $p(x, t)$ по геометрической переменной x

$$\bar{p}_n(t)=\int_0^l p(x,t)\sin(\lambda_n x)dx,\ \ \lambda_n=\frac{n\pi}{l}\ \ (n\in N),$$

получаем из (52)–(55)

$$^{ABC}D_t^{\alpha}\,\bar{p}_n(t)+\lambda_n^2\,\bar{p}_n(t)=\bar{F}_{0_n},\tag{56}$$

$$\bar{p}_n(0)=\bar{F}_{1_n},\tag{57}$$

$$\int_0^T \bar{p}_n(t)\,dt=\bar{F}_{2_n},\tag{58}$$

где

$$\bar{F}_{j_n}=\int_0^l F_j(x)\sin(\lambda_n x)dx\ \ (j=0,1,2;\ n\in N).$$

Решения задач (56), (57), как и ранее, можно получить с использованием интегрального преобразования Лапласа по переменной t. Опустив промежуточные выкладки, указанные решения запишем в виде

$$\bar{p}_n(t)=\frac{1}{a_\alpha+\lambda_n^2}[\bar{F}_{0_n}+a_\alpha\bar{F}_{1_n}E_\alpha(-c_\alpha^{(n)}t^\alpha)+q_\alpha^{(n)}\bar{F}_{0_n}t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-c_\alpha^{(n)}t^\alpha)],\tag{59}$$

где

$$c_\alpha^{(n)}=\frac{b_\alpha\lambda_n^2}{a_\alpha+\lambda_n^2},\ \ q_\alpha^{(n)}=b_\alpha-c_\alpha^{(n)}\ \ (n\in N).\tag{60}$$

Возвращаясь в область оригиналов преобразования Фурье, получаем

$$p(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{p}_n(t)\sin(\lambda_n x),\tag{61}$$

где $\bar{p}_n(t)$ $(n\in N)$ даются соотношениями (59), (60). При этом можно показать, что для удовлетворения начальному условию (54) необходимо выполнение следующих соотношений: $F_0(x)+F_1''(x)=0$ $(0<x<l)$, $F_1(0)=F_1(l)=0$.

Интегрируя соотношения (59) по переменной t в пределах от 0 до T, из (58) находим

$$\bar{F}_{0_n}=\frac{(a_\alpha+\lambda_n^2)\bar{F}_{2_n}-a_\alpha T\bar{F}_{1_n}E_{\alpha,2}(-c_\alpha^{(n)}T^\alpha)}{T[1+q_\alpha^{(n)}T^\alpha E_{\alpha,\alpha+2}(-c_\alpha^{(n)}T^\alpha)]}\ \ (n\in N).\tag{62}$$

Тогда искомая функция $F_0(x)$ представляется в виде

$$F_0(x)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{F}_{0_n}\sin(\lambda_n x),\tag{63}$$

где $\bar{F}_{0_n}$ $(n\in N)$ определяются соотношениями (62).

С учетом асимптотических оценок для функций $E_\alpha(z)$, $E_{\alpha,\mu}(z)$ при $\arg z=\pi$ [23] из соотношений (59), (62) получаем оценки, равномерные по n:

$$|\bar{F}_{0_n}|\le C_1(|\bar{F}_{1_n}|+|\bar{F}_{2_n}|),\ (C_1>0),$$

$$|\bar{p}_n(t)|\le\frac{C_2}{\lambda_n^2}(|\bar{F}_{0_n}|+|\bar{F}_{1_n}|)\ \ (C_2>0).$$

При $F_1, F_2 \in C^4[0, l]$ из этих оценок следует равномерная и абсолютная сходимость рядов (61), (63), т.е. $F_0(x) \in C[0, l]$, $p(x, t) \in C(\overline{\Omega})$.

Аналогично устанавливается справедливость соотношений $p_x(x, t)$, $p_{xx}(x, t)$, ${}^{ABC}D_t^{\alpha} p(x, t) \in C(\overline{\Omega})$. Из однозначности построения решений (59), (62) задачи (56)–(58) следует единственность решения исходной задачи (52)–(55).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках геофильтрационной математической модели, основанной на уравнении дробного порядка с *ABC*-дробной производной [17], в работе получены замкнутые решения некоторых краевых задач, описывающих дробно-дифференциальную динамику фильтрационных процессов в геопористых массивах конечной мощности. Рассмотрены задачи определения полей фильтрационных давлений в однородном и слоистом массивах, фильтрационная задача с нелокальными граничными условиями и обратная задача для неклассического уравнения геофильтрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хасанов М.М., Булгакова Г.Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 288 с.
2. Podlubny I. Fractional differential equations. New York: Academic Press, 1999. 341 p.
3. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
4. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008. 512 с.
5. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. Москва: Физматлит, 2003. 272 с.
6. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. London: Imperial College Press, 2010. 368 p.
7. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics.* A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.). Wien: Springer-Verlag, 1997. P. 223–276.
8. Bulavatsky V.M. Mathematical modeling of dynamics of the process of filtration convection diffusion under the condition of time nonlocality. *Journal of Automation and Information Science*. 2012. Vol. 44, N 2. P.13–22.
9. Hilfer R. Fractional time evolution. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. R. Hilfer (Ed.). Singapore: World scientific. 2000. P. 87–130.
10. Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 2009. Vol. 12, N 3. P. 299–318.
11. Sandev T., Metzler R., Tomovski Z. Fractional diffusion equation with a generalized Riemann–Liouville time fractional derivative. *Journal of Physics A*. 2011. Vol. 44. P. 5–52.
12. Bulavatsky V.M. Fractional differential mathematical models of the dynamics of nonequilibrium geomigration processes and problems with nonlocal boundary conditions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 1. P. 81–89.
13. Bulavatsky V.M. Some modelling problems of fractional-differential geofiltrational dynamics within the framework of generalized mathematical models. *Journal of Automation and Information Science*. 2016. Vol. 48, N 5. P. 27–41.
14. Garra R., Gorenflo R., Polito F., Tomovski Z. Hilfer–Prabhakar derivatives and some applications. *Applied Mathematics and Computation*. 2014. Vol. 242. P. 576–589.
15. Caputo M., Fabrizio M. A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress Fractional Differentiation and Applications*. 2015. Vol. 1, N 2. P. 73–85.
16. Atangana A. On the new fractional derivative and application to nonlinear Fisher's reaction-diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*. 2016. Vol. 273. P. 948–956.

17. Atangana A., Baleanu D. New fractional derivative with non-local and non-singular kernel. *Thermal Sciences*. 2016. Vol. 20, N 2. P. 757–763.

18. Djida J.D., Area I., Atangana A. Numerical computation of a fractional derivative with non-local and non-singular kernel. arXiv: 1610.07171v1, 2016.

19. Abramovitz M., Stegun I.A. Handbook of mathematical functions. New York: Dover, 1965. 831 p.

20. Баренблатт Г.И., Ентов В.Н., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. Москва: Недра, 1984. 303 с.

21. Мироненко В.А., Шестаков В.М. Основы гидрогеомеханики. Москва: Недра, 1974. 296 с.

22. Sneddon I. The use of integral transform. New York: Mc. Graw-Hill Book Comp., 1973. 539 p.

23. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag–Leffler functions, related topics and applications. Berlin: Springer-Verlag, 2014. 454 p.

24. Лаврик Н.И. Решение задачи фильтрации к дрене в трехслойной среде в условиях инфильтрационного питания и притока из водоемов. *Краевые задачи подземной гидродинамики*. Киев. Институт математики АН УССР. 1975. С. 127–136.

25. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. *Дифференциальные уравнения*. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.

26. Ионкин Н.И. Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. *Дифференциальные уравнения*. 1979. Т. 15, № 7. С. 1280–1283.

27. Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями. *Дифференциальные уравнения*. 1979. Т. 15, № 7. С. 1284–1295.

28. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи. *Дифференциальные уравнения*. 1999. Т. 35, № 8. С. 1094–1100.

29. Furati K.M., Iyiola O.S., Kirane M. An inverse problem for a generalized fractional diffusion. *Applied Mathematics and Computation*. 2014. Vol. 249. P. 24–31.

Надійшла до редакції 07.02.2017

В.М. Булавацький

РОЗВ'ЯЗКИ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ НА ОСНОВІ МОДЕЛІ З *ABC*-ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ

Анотація. Для геофільтраційної математичної моделі з дробовою похідною Атангана–Балеану одержано замкнені розв'язки крайових задач теорії фільтрації в однорідному та шаруватому масивах скінченної потужності. Наведено постановки і розв'язання задачі з нелокальними граничними умовами та оберненої задачі дробово-диференційної фільтраційної динаміки.

Ключові слова: математичне моделювання, дробово-диференційна динаміка фільтраційних процесів, геопористі середовища, некласичні моделі, рівняння фільтрації з *ABC*-дробовою похідною, крайові задачі, замкнені розв'язки.

V.M. Bulavatsky

SOLUTIONS OF SOME PROBLEMS OF FRACTIONAL-DIFFERENTIAL FILTRATION DYNAMICS BASED ON MODELS WITH *ABC*-FRACTIONAL DERIVATIVE

Abstract. For geofiltration mathematical model with Atangana–Baleanu fractional derivative, closed solutions of boundary-value problems of filtration theory in homogeneous and layered arrays of finite size are obtained. Problems with nonlocal boundary conditions and the inverse problem of fractional differential filtration dynamics are formulated and solved.

Keywords: mathematical modeling, fractional-differential dynamics of filtration processes, geoporous media, non-classical models, equation of filtration with *ABC*-fractional derivative, boundary-value problems, closed form solutions.

Булавацкий Владимир Михайлович,
доктор техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: v_bulav@ukr.net.