УДК 519.8

Ф.А. ШАРИФОВ

СОВЕРШЕННЫЕ ПАРОСОЧЕТАНИЯ И ПОЛИМАТРОИДЫ

Аннотация. Показано, что произвольный граф содержит совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда специально определенный вектор является базой расширенного полиматроида, описанного субмодулярной функцией, определенной на подмножествах множества вершин. На базе этого факта можно применять различные алгоритмы решения задачи о допустимых потоках на сетях для нахождения совершенного паросочетания в заданном графе.

Ключевые слова: совершенное паросочетание, граф, расширенный полиматроид.

ВВЕДЕНИЕ

Существование совершенного паросочетания в заданном графе — одна из основных задач в теории графов. Более общей является задача нахождения паросочетания с максимальной мощностью в графах. В [1] рассмотрены критерии существования совершенного паросочетания в заданном графе. На основе этих критериев разработаны различные подходы для нахождения совершенного паросочетания и сформулирована двойственная задача определения паросочетания с максимальной мощностью [1, 2].

В настоящей статье существование совершенного паросочетания в произвольном графе выражается на языке базы расширенного полиматроида, описанного специальной субмодулярной функцией, определенной на подмножествах множества вершин заданного графа. Другими словами, существование совершенного паросочетания в произвольном графе сводится к задаче принадлежности [2] заданного вектора — базы, к многограннику-полиматроиду. Известно, что эта задача эквивалентна задаче о максимальном потоке и минимальном разрезе [2–4]. Таким образом, данный подход позволяет применять известные эффективные потоковые алгоритмы для нахождения совершенного паросочетания в произвольном графе.

Аналогичный критерий существовании совершенного паросочетания в двудольных графах доказан в [3, 4], на основе которого разработан строго полиномиальный алгоритм [4] для задачи нахождения содержащего совершенное паросочетание подграфа с максимальным весом. Последняя задача имеет ряд приложений для разработки расписания обслуживания маршрутов в турагентствах [5–7], управления цепью поставок, функционирование которых осуществляется в режиме «точно в срок» («just in time») [5], а также для подготовки специалистов с учетом их будущей востребованности на рынке труда.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть задан простой неориентированный связный граф $G=(V, E)$ с множеством вершин V и множеством ребер E. Паросочетанием называется подмножество M ребер, которые попарно не имеют общих вершин. Если вершина v инцидентна ребру E паросочетания M, то говорят, что M покрывает вершину v. Если M покрывает все вершины из V, то оно называется совершенным паросочетанием графа G.

Для произвольного $S \subseteq V$ подмножества ребер хотя бы с одной конечной вершиной в S и с конечными вершинами в S обозначим $\theta(S)$ и $\kappa(S)$ соответственно.

Пусть $\varphi(S)=|\theta(S)|$ и $\omega(S)=|\kappa(S)|$ — две функции, определенные на подмножествах S множества V. Известно, что $\varphi(S)$ — субмодулярная функция, т.е.

$$\varphi(S)+\varphi(T)\geq\varphi(S\bigcup T)+\varphi(S\bigcap T),$$

и $\omega(S)$ — супермодулярная функция, т.е.

$$\omega(S)+\omega(T)\leq\omega(S\bigcup T)+\omega(S\bigcap T),$$

для произвольных подмножеств S и T множества V. Поэтому $\varphi(S)-\omega(S)$ — также субмодулярная функция, определенная на подмножествах S множества V.

В дальнейшем для произвольного вектора $u\subseteq R^V$ и подмножества $S\subseteq V$ будем использовать обозначение $u(S)=\sum_{v\in S}u_v$.

Рассмотрим следующий многогранник:

$$EP(\varphi-\omega)=\{z\in R^V;\ z(S)\leq\varphi(S)-\omega(S),\ S\subseteq V\},$$

который называется расширенным полиматроидом [2] (extended polymatroid), определенным функцией $\varphi(S)-\omega(S)$.

Отметим, что $\varphi(S)$, $\omega(S)$ — монотонные функции и $\varphi(V)=\omega(V)=|E|$. Поэтому любой вектор $z\in EP(\varphi-\omega)$ называется базой расширенного полиматроида, если $z(V)=0$, где $z(V)=\sum_{v\in V}z_v$. Кроме расширенного полиматроида $z\in EP(\varphi-\omega)$, также рассмотрим следующие многогранники:

$$P(\varphi)=\{x\in R^V;\ x(S)\leq\varphi(S),\ S\subseteq V\},$$

$$Q(\omega)=\{y\in R^V;\ y(S)\geq\omega(S),\ S\subseteq V\},$$

которые называются полиматроидом и суперполиматроидом соответственно. Векторы $x\in P(\varphi)$ и $y\in Q(\omega)$ являются базами $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$, если $x(V)=|E|$ и $y(V)=|E|$.

Известно, что в зависимости от фиксированного линейного упорядочения вершин L графа $G=(V,E)$ жадный (greedy) алгоритм определяет различные базы $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$ [2]. В дальнейшем для краткости будем говорить, что линейное упорядочение L вершин генерирует базы $x\in P(\varphi)$ и $y\in Q(\omega)$.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Существует ряд важных свойств баз упомянутых многогранников, на основе которых предложены потоковые алгоритмы, например алгоритм определения минимального разреза без вычисления максимальных потоков. Для доказательства основного результата вначале рассмотрим необходимые свойства баз $P(\varphi)$, $Q(\omega)$ и $EP(\varphi-\omega)$.

Лемма 1. Любую базу $z\in EP(\varphi-\omega)$ расширенного полиматроида $EP(\varphi-\omega)$ можно представить в виде $z=x-y$, где $x\in P(\varphi)$ и $y\in Q(\omega)$ — базы $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$ соответственно.

Доказательство. Пусть базы $x\in P(\varphi)$ и $y\in Q(\omega)$ являются крайними точками многогранников $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$. Из их определения можно видеть, что вектор $z=x-y\in EP(\varphi-\omega)$ и $z(V)=0$, т.е. z является базой расширенного полиматроида $EP(\varphi-\omega)$.

Пусть теперь вектор z является базой $EP(\varphi-\omega)$. Рассмотрим случай когда z является крайней точкой $EP(\varphi-\omega)$. Покажем, что существуют такие базы x и y, как крайние точки $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$, для которых $z=x-y$.

Из определения $\theta(S)$ и $\kappa(S)$ следует, что подмножество $\delta(S)=\theta(S)\setminus\kappa(S)$ является разрезом, определенным подмножеством S множества V, т.е. $\delta(S)$ содержит ребра, которые имеют одну конечную вершину в S, а другую — в $V\setminus S$. Следовательно, $\varphi(S)-\omega(S)=|\delta(S)|$. Допустим, что базы $x\in P(\varphi)$ и $y\in Q(\omega)$ генерированы линейным упорядочением вершин L. Из формулы вычисления компонентов x_v и y_v этих баз жадным алгоритмом получаем, что $|\delta(S)|=x(S)-y(S)$ для подмножества S, в котором сохраняется установленный в L порядок вершин, и $x(S)-y(S)\le|\delta(S)|$ в противном случае. Пусть $z_v=x_v-y_v$ для всех $v\in V$. Тогда $z(S)=|\delta(S)|$ для подмножества S, в котором сохраняется установленный в L порядок вершин, и $z(S)\le|\delta(S)|$ в противном случае. Такой вектор z совпадает с базой $EP(\varphi-\omega)$, генерированной линейным упорядочением L.

Из данного доказательства также следует справедливость леммы в случае, когда базы z, x и y являются выпуклыми оболочками баз $EP(\varphi-\omega)$, $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$ соответственно.

Пусть $L=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ — линейное упорядочение вершин графа $G=(V,M)$ и M — некоторое совершенное паросочетание. Независимо от линейного упорядочения вершин L в подграфе $(V,E\setminus M)$ степень каждой вершины на единицу меньше, чем в G. Ясно, что этот факт справедлив относительно произвольного совершенного паросочетания M графа G. Другими словами, произвольному совершенному паросочетанию соответствует некоторый подграф графа G и такое соответствие не зависит от конкретного линейного упорядочения вершин L.

Допустим, что определены базы $x\in P(\varphi)$ и $y\in Q(\omega)$ с помощью жадного алгоритма при использовании линейного упорядочения вершин L. Рассмотрим базу $z=x-y$. Поскольку $z(V)=0$, то $z_v>0$ для некоторых $v\in V$, и существуют другие вершины $w\in V$, для которых $z_w<0$. В линейном упорядочении L, если вершина v_i предшествует вершине v_j, ребро (v_i,v_j) графа $G=(V,E)$ ориентируем как дугу v_iv_j. Пусть $G_1=(V,A)$ обозначает полученный таким образом ориентированный граф. Вершины $v\in V$, для которых $z_v>0$, можно рассматривать как источники с заданным количеством продукта z_v, а вершины $w\in V$, для которых $z_w<0$, — как стоки с требуемым количеством продукта $|z_w|$. Таким образом, на ориентированном графе $G_1=(V,A)$ можно сформулировать следующие условия допустимости:

$$\sum\nolimits_{j;\,ij\in A}u_{ij}-\sum\nolimits_{j;\,ji\in A}u_{ji}=z_i,\ \ i\in V,\tag{1}$$

$$0\le u_{ij}\le 1,\ \ ij\in A,\tag{2}$$

задачи нахождения потока минимальной стоимости. Нетрудно проверить, что эти условия на графе $G_1=(V,A)$ имеют тривиальное решение: $u_{ij}=1$ для всех дуг $ij\in A$. Несмотря на это, далее покажем, что, используя базы $x\in P(\varphi)$ и $y\in Q(\omega)$, можно определить такие значения z_i, для которых условия (1) и (2) не имеют допустимого решения, если граф G не содержит совершенного паросочетания.

Не нарушая общности, можем предполагать, что граф G имеет четное число вершин и не содержит изолированной вершины, так как в противном случае очевидно, что граф G не имеет совершенного паросочетания. Из этого предположения следует, что $x_v+y_v>0$ для всех вершин $v\in V$. Следовательно, можно определить векторы x^1 и y^1 следующим образом:

$$\text{если } x_i=0 \text{ для вершин } i\in V, \text{ то } x_i^1=x_i,\ y_i^1=y_i-1\ge 0;\tag{3}$$

$$\text{если } y_j=0 \text{ для вершин } j\in V, \text{ то } x_j^1=x_j-1\ge 0,\ y_j^1=y_j;\tag{4}$$

$$\begin{gathered}\text{для остальных вершин } v \text{ либо } x_v^1=x_v-1 \text{ и } y_v^1=y_v,\\ \text{либо } x_v^1=x_v \text{ и } y_v^1=y_v-1.\end{gathered}\tag{5}$$

Лемма 2. Если граф G содержит совершенное паросочетание, то произвольное линейное упорядочение вершин L генерирует базы $x \in P(\varphi)$ и $y \in Q(\omega)$, относительно которых с помощью (3)–(5) можно определить такие векторы x^1, y^1, для которых

$$x^1(V) = y^1(V), \tag{6}$$

и эти векторы также являются базами $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$ соответственно.

Доказательство. Действительно, если граф содержит совершенное паросочетание M, то граф G содержит подграф $(V, E \setminus M)$. Нетрудно проверить, что векторы x^1 и y^1, удовлетворяющие (3)–(6), можно определить аналогично $x \in P(\varphi)$ и $y \in Q(\omega)$ с помощью жадного алгоритма при использовании линейного упорядочения L. Так как мощность произвольного разреза графа $(V, E \setminus M)$, определенного подмножеством вершин S, не превышает $|\delta(S)|$, то векторы x^1 и y^1 являются базами этих $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$ соответственно.

Однако, если граф $G = (V, E)$ не содержит совершенного паросочетания, то существует линейное упорядочение вершин L, которое генерирует базы $x \in P(\varphi)$ и $y \in Q(\omega)$ такие, что при $z_v = x_v^1 - y_v^1$ условия (1) и (2) не имеют допустимого решения для векторов x^1 и y^1, определенных в (3)–(5). Теперь докажем следующий основной результат.

Теорема 1. Граф $G = (V, E)$ содержит совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда, используя базы $x \in P(\varphi)$ и $y \in Q(\omega)$, генерируемые произвольным линейным упорядочением вершин L, можно определить (3)–(5) такие векторы x^1и y^1, для которых вектор $z = x^1 - y^1$ является базой расширенного полиматроида $EP(\varphi - \omega)$.

Доказательство. Вначале покажем, что если граф $G = (V, E)$ имеет совершенное паросочетание, то векторы x^1и y^1 являются базами расширенного полиматроида. Пусть базы $x \in P(\varphi)$ и $y \in Q(\omega)$ определены с помощью жадного алгоритма при использовании некоторого линейного упорядочения вершин L. Согласно лемме 2, если G содержит совершенное паросочетание, то описанным ранее способом (3)–(5) можно определить такие векторы x^1 и y^1, для которых $x^1(V) = y^1(V)$, и эти векторы являются базами $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$ соответственно. Положим $z = x^1 - y^1$ и покажем, что z является базой $EP(\varphi - \omega)$. Из существования совершенного паросочетания следует, что векторы x^1 и y^1 можно рассматривать как базы полиматроида и суперполиматроида, определенного относительно подграфа $(V, E \setminus M)$. Тогда вектор $z = x^1 - y^1$ является базой расширенного полиматроида, определенного также относительно подграфа $(V, E \setminus M)$. Так как мощность произвольного разреза подграфа $(V, E \setminus M)$ не превышает $|\delta(S)|$, то получаем, что $z(S) \le \varphi(S) - \omega(S)$ для всех подмножеств $S \subseteq V$.

Для доказательства обратного утверждения теоремы вначале отметим следующий известный результат Татта (Tutte) о том, что граф G содержит совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда $oc(G \setminus F) \le |F|$, где $oc(G \setminus F)$ (odd components) — число нечетных компонентов графа, полученного после удаления из G подмножества вершин $F \subseteq V$.

Теперь предположим, что граф G не содержит совершенного паросочетания. Тогда найдется подмножество вершин F, для которого $oc(G \setminus F) > |F|$. Пусть V_1, $V_2, \ldots, V_k$ обозначают множества вершин нечетных компонентов и $H_1, H_2, \ldots, H_t$ — множества вершин четных компонентов графа $G \setminus F$, как показано на рис. 1.

Рассмотрим линейное упорядочение $L=\{V_1,\ldots,V_k,H_1,\ldots,H_t,F\}$ вершин графа G. Пусть L генерирует базы $x\in P(\varphi)$ и $y\in Q(\omega)$. Допустим, что V_i содержит $2h+1$ вершин, где h — некоторое целое число. Если положить $x_v^1=x_v-1$ для не более чем h вершин и $y_v^1=y_v-1$ для остальных вершин из V_i, то получим, что

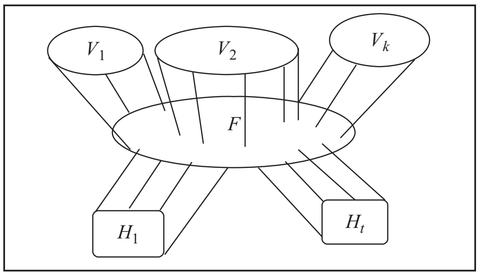

Рис. 1

$$x^1(V_i)-y^1(V_i)\ge x(V_i)-y(V_i)+1>\varphi(V_i)-\omega(V_i)\,, \tag{7}$$

так как согласно вычислению базы жадным алгоритмом имеем, что $x(V_i)-y(V_i)=\varphi(V_i)-\omega(V_i)$. Из неравенства (7) получаем противоречие тому, что векторы x^1 и y^1 являются базами $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$. Поэтому положим $x_v^1=x_v-1$ для $h+1$ вершин и $y_v^1=y_v-1$ для остальных вершин из V_i. Тогда $x^1(V_i)-y^1(V_i)=x(V_i)-y(V_i)-1$ для всех $i=1,2,\ldots,k$.

Теперь определим x_v^1, y_v^1 для вершин из H_i. Допустим, что $|H_i|=2h$, поэтому если положить $x_v^1=x_v-1$ для количества вершин меньшего h и $y_v^1=y_v-1$ для остальных вершин из H_i, то так же, как и ранее, получим противоречие, что векторы x^1 и y^1 являются базами $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$. Следовательно, положим $x_v^1=x_v-1$ для h вершин и $y_v^1=y_v-1$ для остальных h вершин из H_i. Тогда $x^1(H_i)=y^1(H_i)$ для всех $i=1,2,\ldots,t$. Так как ребра с одной конечной вершиной в H_i имеют другую вершину в F и вершины из $V\setminus F$ предшествуют вершинам из F в линейном упорядочении L, то $x^1(H)=y^1(H)$, где $H=\bigcup H_i$. Таким образом, получаем, что

$$x^1(V\setminus F)-y^1(V\setminus F)=\sum_{i=1}^{k}(x^1(V_i)-y^1(V_i))=\sum_{i=1}^{k}(x(V_i)-y(V_i))-k\,.$$

Теперь, если даже $x_v^1=x_v$ и $y_v^1=y_v-1$ для всех вершин v из F, получим, что

$$x^1(V)-y^1(V)=x(V)-y(V)-k+|F|\ne 0\,,$$

так как $k=oc(G\setminus F)>|F|$. Это противоречит тому, что векторы x^1 и y^1 являются базами $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$, т.е. $oc(G\setminus F)\le|F|$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Граф $G=(V,E)$ содержит совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда, используя базы $x\in P(\varphi)$ и $y\in Q(\omega)$, генерируемые произвольным линейным упорядочением вершин L, можно определить такие векторы x^1 и y^1, что условия (1) и (2) имеют допустимое решение при $z=x^1-y^1$.

Доказательство. В ходе доказательства теоремы 1 показано, что если граф G не содержит совершенного паросочетания, то $oc(G\setminus F)>|F|$ для некоторого $F\subseteq V$. Кроме этого, линейное упорядочение вершин $L=\{V_1,\ldots,V_k,H_1,\ldots,H_t,F\}$ генерирует базы $x\in P(\varphi)$ и $y\in Q(\omega)$, используя которые невозможно определить векторы x^1 и y^1, удовлетворяющие условию $x^1(V)=y^1(V)$. Отсюда следует, что условия (1) и (2) не имеют допустимых решений.

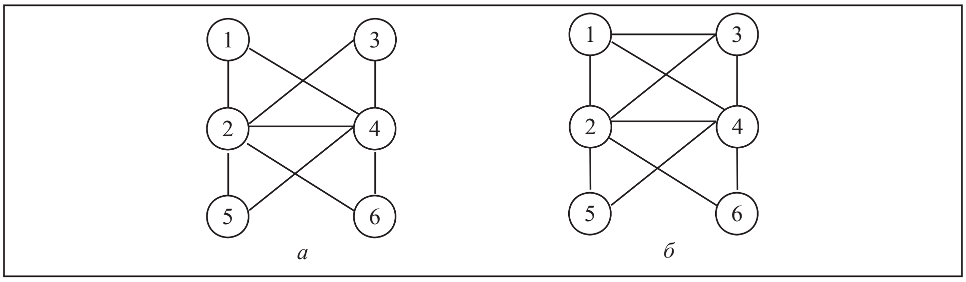

Рис. 2

Если условия (1) и (2) имеют допустимые решения для вектора $z = x^1 - y^1$, то согласно лемме 2 получаем, что векторы x^1 и y^1 являются базами полиматроида и суперполиматроида, которые определены так же, как $P(\varphi)$ и $Q(\omega)$, относительно подграфа $(V, E \setminus M)$. Отсюда следует, что $z = x^1 - y^1$ является базой $EP(\varphi - \omega)$.

Рассмотрим пример, поясняющий ключевые условия, используемые при доказательстве теоремы 1.

Легко убедиться, что граф на рис. 2, *а* не содержит совершенного паросочетания. Рассмотрим линейное упорядочение $L = \{1, 3, 5, 6, 2, 4\}$ вершин с номерами $V_1 = \{1\}$, $V_2 = \{3\}$, $V_3 = \{5\}$, $V_4 = \{6\}$, $H = \varnothing$, $F = \{2, 4\}$. Данное линейное упорядочение L генерирует базы $x = (2, 2, 2, 2, 1, 0) \in P(\varphi)$ и $y = (0, 0, 0, 0, 4, 5) \in Q(\omega)$. Используя эти базы, можно легко проверить, что нельзя определить векторы x^1 и y^1, с помощью (3)–(5), для которых $x^1(V) = y^1(V)$.

Теперь рассмотрим граф на рис. 2, *б*, который, кроме ребер графа на рис. 2, *а*, содержит дополнительное ребро (1, 3). Линейное упорядочение L генерирует базы $x = (3, 2, 2, 2, 1, 0) \in P(\varphi)$ и $y = (0, 1, 0, 0, 4, 5) \in Q(\omega)$ относительно графа на рис. 2, *б*. Используя эти базы, нетрудно определить векторы $x^1 = \{2, 2, 1, 1, 1, 0\}$ и $y^1 = \{0, 0, 0, 0, 3, 4\}$ с помощью (3)–(5), для которых $x^1(V) = y^1(V)$, т.е. условия (1) и (2) имеют допустимое решение, и легко проверить, что $M = \{(1, 3), (2, 5), (4, 6)\}$ является совершенным паросочетанием в графе на рис. 2, *б*.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что в случае, когда граф G двудольный, линейное упорядочение L вершин, в котором вначале упорядочены вершины одной доли, а потом — вершины другой доли, генерирует базы $x \in P(\varphi)$ и $y \in Q(\omega)$, при использовании последних легко определяются векторы x^1 и y^1 (см. теорему 1). На основании теоремы 1 применительно к двудольным графам предложен строго полиномиальный алгоритм для решения задачи нахождения подграфа с максимальным весом, содержащего совершенное паросочетание на произвольном двудольном графе в [4]. Отметим, что алгоритмы для решения многих задач о паросочетаниях на недвудольных графах основаны на идее алгоритмов решений таких задач на двудольных графах, поэтому проводятся дальнейшие аналогичные исследования на базе результатов, предложенных в настоящей статье, а именно модификация алгоритма [4], чтобы с его помощью можно было получить решение задачи нахождения подграфа с максимальным весом, содержащего совершенное паросочетание на произвольном недвудольном графе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lóvasz L., Plummer M.D. Matching theory. Providence: AMS Chelsea Publ., 2009. 547 p.
2. Grotschel M., Lovasz L., Schrijer A. Geometric algorithms and combinatorial optimization. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 345 p.
3. Шарифов Ф.А. Совершенные паросочетания и расширенный полиматроид. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 3. С. 173–179.
4. Sharifov F. Perfectly matchable subgraph problem on a bipartite graph. *RAIRO — Operation Research*. 2010. Vol. 44, N 1. P. 27–42.
5. Хендфилд Р.Б., Николс Э.Л. мл. Реорганизация цепей поставок. Создание интегрированных систем формирования ценности. Москва: Изд. дом. «Вильямс», 2003. 416 с.
6. Brusset X. Estimating the supply chain efficiency loss when the seller has to estimate the buyer's willingness to pay. *RAIRO — Operation Research.* 2014. Vol. 48, N 4. P. 477–496.
7. Шарифов Ф.А., Кривицька Н.Ю. Екоміко-математичні задачі при плануванні ланцюга постачань. *Економіка, менеджмент, бізнес*. 2014. № 1(19). С. 61–69.

Надійшла до редакції 09.11.2016

Ф.А. Шаріфов

ДОСКОНАЛІ ПАРНОСПОЛУКИ І ПОЛІМАТРОЇДИ

Анотація. Показано, що довільний граф містить досконалу парносполуку тоді і тільки тоді, коли спеціально визначений вектор є базою розширеного поліматроїда, описаного субмодулярною функцією, визначеною на підмножинах множин вершин. На базі цього факту можна застосовувати різні алгоритми розв'язання задачі про допустимі потоки в мережах для знаходження досконалої парносполуки у заданому графі.

Ключові слова: досконала парносполука, граф, розширений поліматроїд.

F.A. Sharifov

PERFECT MATCHING AND POLYMATROIDS

Abstract. It is shown that any graph has a perfect matching if and only if a specially defined vector is the base of the extended polymatroid associated with the submodular function defined on subsets of the vertex set. Based on this fact, different algorithms for testing flow feasibility can be used to find some perfect matching in a given graph.

Keywords: perfect matching, graph, extended polymatroid.

Шарифов Фирдовси Ахун-оглы,
доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: fasharifov@gmail.com.