УДК 519.6+004.02

Л.П. ВАКАЛ, А.А. КАЛЕНЧУК-ПОРХАНОВА, Е.С. ВАКАЛ

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЧЕБЫШЕВСКОЙ СЕГМЕНТНОЙ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Аннотация. Представлен алгоритм чебышевской сегментной аппроксимации со свободными узлами. В качестве аппроксимирующих функций на подынтервалах использованы рациональные дроби. Для поиска оптимальных узлов применен алгоритм дифференциальной эволюции. Приведены численные результаты по сегментной аппроксимации функций с оптимальными узлами.

Ключевые слова: чебышевская сегментная аппроксимация, задача многомерной нелинейной оптимизации, рациональные дроби, оптимальные узлы, алгоритм дифференциальной эволюции.

ВВЕДЕНИЕ

Существует много научных и технических задач, в которых желательно получить достаточно малую погрешность приближения на всем промежутке задания функции, при этом аппроксимирующая функция не обязательно гладкая, а может быть и разрывной. Такими задачами являются, например, задачи приближения функций преобразования термопреобразователей [1], геометрического моделирования плоских и пространственных объектов с кусочно-гладкими границами [2], сжатия численной информации [3, 4], скоростного и высокоточного вычисления значений математических функций для применения в системах связи и компьютерной графике [5], в которых целесообразно применять сегментную аппроксимацию. В этих случаях исходный промежуток приближения разбивается на ряд подынтервалов (сегментов), на каждом из которых функцию аппроксимируют некоторым аналитическим выражением с небольшим числом параметров (многочленом, дробно-рациональной функцией и др.), при этом непрерывность аппроксимирующей кусочной функции в узлах разбиения в общем случае не требуется. Сегментные приближения объединяют положительные свойства наилучших приближений одним выражением (небольшое количество параметров) и приближений сплайнами, а именно численную устойчивость, зависимость от свойств приближаемой функции лишь в «малом» [1].

Во многих практических задачах требуется использовать кусочные аппроксиманты со звеньями, являющимися наилучшими чебышевскими (равномерными) приближениями. В случае, когда число сегментов задано, но образующие покрытие промежутка аппроксимации сегменты не фиксируются, минимальная погрешность приближения достигается при использовании оптимальных узлов разбиения.

Для чебышевской сегментной аппроксимации с нефиксированными (свободными) узлами разработан ряд алгоритмов [6–12], в которых для приближения на подынтервалах используются преимущественно многочлены. В целях повышения эффективности решения более широкого круга практических задач с учетом особенностей аппроксимируемых функций целесообразно применять сегментные приближения нелинейными выражениями, в частности рациональными дробями. Ометим, что в разработанных алгоритмах вычисление оптимальных или близких к ним узлов, как правило, связано с необходимостью решать трансцендентные уравнения, системы таких уравнений или системы дифференциальных уравнений, что создает определенные вычислительные сложности. Поэтому актуальна задача разработки новых эффективных и более простых в реализации алгоритмов вычисления оптимальных узлов для сегментного приближения нелинейными функциями.

В настоящей статье предложен алгоритм чебышевской сегментной аппроксимации функций рациональными дробями, в котором для нахождения оптимальных узлов используется подход на основе дифференциальной эволюции.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция, $\Re_n$ — класс несократимых и непрерывных на $[\alpha, \beta]$ дробно-рациональных функций $r_{l,n-l}(x)$ вида

$$r_{l,n-l}(x) = \sum_{i=0}^{l} a_i x^i \Big/ \sum_{i=0}^{n-l} b_i x^i,\ 0 \le l < n, \tag{1}$$

где n — порядок $r_{l,n-l}(x)$. Так как каждый элемент класса $\Re_n$ непрерывен на $[\alpha, \beta]$, то без ограничения общности можно положить $b_0 = 1$.

Определение 1. Функция $R_{l,n-l}(x)$ называется наилучшим чебышевским взвешенным дробно-рациональным приближением для функции $f(x)$ на промежутке $[\alpha, \beta]$, если она удовлетворяет следующему условию минимакса:

$$\min_{r_{l,n-l} \in \Re_n} \max_{x \in [\alpha,\beta]} | w(x)[f(x) - r_{l,n-l}(x)]| = \max_{x \in [\alpha,\beta]} | w(x)[f(x) - R_{l,n-l}(x)]|, \tag{2}$$

где $w(x) > 0$ — весовая функция, имеющая важное значение при больших колебаниях $f(x)$ на $[\alpha, \beta]$.

Пусть заданы порядок рациональных дробей n и количество сегментов $k+1$, на которые разбивается промежуток аппроксимации $[\alpha, \beta]$. Обозначим T совокупность разбиений $\tau = \{\alpha \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} \le \beta\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ на $k+1$ сегментов $[t_{j-1}, t_j]$ $(j = \overline{1, k+1},\ k \ge 1)$ и L_n — функцию вида

$$L_n(f, [\alpha, \beta]) = \max_{x \in [\alpha,\beta]} | w(x)[f(x) - R_{l,n-l}(x)]|.$$

При сегментном приближении аппроксимирующая кусочная функция состоит из $(k+1)$-го звена (куска), где каждое звено является наилучшим чебышевским приближением для функции $f(x)$ в классе рациональных дробей $\Re_n$ на соответствующем сегменте $[t_{j-1}, t_j]$, $j = \overline{1, k+1}$, т.е. аппроксимирующая функция разрывна в узлах разбиения (сегментации), но непрерывна на сегментах.

Погрешность сегментной аппроксимации ρ определяется формулой

$$\rho = \max_{1 \le j \le k+1} L_n(f, [t_{j-1}, t_j]).$$

Определение 2. Разбиение $\tau = \{\alpha \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} \le \beta\}$ называется разбиением с равными уклонениями, если

$$L_n(f, [t_{j-1}, t_j]) = L_n(f, [t_j, t_{j+1}]),\ j = \overline{1, k}. \tag{3}$$

Приближение, для погрешностей которого выполняется условие (3), называют приближением с балансной погрешностью [6] или балансным [13].

Определение 3. Разбиение $\tau^* = \{\alpha \le t_0^* < t_1^* < \ldots < t_{k+1}^* \le \beta\}$ называется оптимальным, а его внутренние узлы $t_1^*, \ldots, t_k^*$ — оптимальными узлами, если

$$\max_{0 \le j \le k} L_n(f, [t_j^*, t_{j+1}^*]) \le \max_{0 \le j \le k} L_n(f, [t_j, t_{j+1})] \tag{4}$$

для произвольного $\tau = \{\alpha \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} \le \beta\} \in T$.

Задача сегментной аппроксимации заключается в нахождении оптимального разбиения τ^* и значения погрешности аппроксимации ρ для этого разбиения [9, 11].

Для любой непрерывной на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции $f(x)$ оптимальное разбиение существует, хотя может быть и неединственным [14]. Доказано, что каждое разбиение с равными уклонениями является оптимальным и всегда существует оптимальное разбиение, имеющее равные уклонения (3) [14]. Таким образом, справедливость для некоторого разбиения равенств (3) является достаточным условием его оптимальности.

На поиске разбиения с равными уклонениями основано большинство алгоритмов сегментной аппроксимации (см. введение). Например, в алгоритме кусочно-полиномиального приближения функций [7] соотношения (4) рассматриваются как система трансцендентных уравнений относительно неизвестных узлов $t_1, \ldots, t_k$ и задача сводится к решению системы методом Ньютона, сходимость которого напрямую зависит от начального выбора узлов.

Задачу определения разбиения с равными уклонениями можно рассматривать как задачу многомерной нелинейной оптимизации

$$\begin{aligned}
&\Lambda(t_1, \ldots, t_k) = \min, \\
&L_n(f, [t_j, t_{j+1}]) - L_n(f, [t_{j-1}, t_j]) - \Lambda \le 0, \;\; j = \overline{1, k}, \\
&L_n(f, [t_{j-1}, t_j]) - L_n(f, \; [t_j, t_{j+1}]) - \Lambda \le 0, \;\; j = \overline{1, k}, \\
&\Lambda \ge 0, \;\; \alpha < t_1 < \ldots < t_k < \beta, \;\; t_0 = \alpha, \;\; t_{k+1} = \beta,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\Lambda = \max\limits_{1 \le j \le k} | L_n(f, [t_j, t_{j+1}]) - L_n(f, [t_{j-1}, t_j]) |$ [15]. Для чебышевского сегментного дробно-рационального приближения функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ предлагается подход, в котором оптимальные узлы $t_1, \ldots, t_r$ находятся с помощью алгоритма дифференциальной эволюции как решение задачи минимизации (5). Алгоритм дифференциальной эволюции (ДЭ) [16] предназначен для нахождения глобального оптимума недифференцированных, нелинейных функций многих переменных. Это один из лучших стохастических алгоритмов, который стабильно находит оптимум функции за минимальное время. Кроме того, он прост в реализации и использовании (содержит мало параметров, требующих подбора).

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ УЗЛОВ И ПОСТРОЕНИЯ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО СЕГМЕНТНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Алгоритм ДЭ относится к группе эволюционных, моделирующих базовые процессы биологической эволюции: отбор, скрещивание и мутацию. Эволюционный процесс в алгоритме организован следующим образом. Вначале генерируется некоторое множество случайных векторов (поколение популяции), представляющих собой возможные решения задачи оптимизации. Далее формируется новое поколение. Для каждого вектора старого поколения, называемого базовым (target vector), с использованием трех других случайных векторов и операций сложения и вычитания их координат генерируется мутантный вектор (mutant vector). Над этим вектором выполняется операция скрещивания, в ходе которой некоторые его координаты замещаются координатами базового вектора. Полученный после скрещивания вектор называется пробным (trial vector). Лучший из двух векторов: базового и пробного, по значению целевой функции включается в новое поколение. С ростом числа поколений решения сходятся в некоторую точку пространства решений, являющуюся глобальным оптимумом. Условиями окончания алгоритма могут быть, например, достижение заданного значения целевой функции, исчерпание максимального числа поколений и др.

В целом алгоритм ДЭ представляет собой одну из возможных «непрерывных» модификаций генетического алгоритма (см., например [17, 18]). В то же время он имеет существенную особенность, во многом определяющую его свойства. В качестве источника шума при мутации в алгоритме ДЭ используется не внешний генератор случайных чисел, а «внутренний», реализованный как разность между случайно выбранными векторами текущей популяции. Это позволяет динамически моделировать особенности рельефа оптимизируемой функции, подстраивая под них распределение «встроенного» источника шума, что обеспечивает эффективность алгоритма ДЭ, даже в случае сложного рельефа.

Далее описывается алгоритм нахождения оптимальных узлов и построения соответствующего сегментного балансного приближения с помощью дробно-рациональных функций. Алгоритм состоит из таких шагов.

1. Генерируется начальное поколение векторов $V_i = (v_{1i}, \ldots, v_{ki})$, $i = \overline{1, Np}$, где Np — размер популяции (параметр настройки алгоритма). Координаты $v_{1i}, \ldots, v_{ki}$ вектора V_i — это случайные числа из интервала (α, β), упорядоченные по возрастанию.

2. Для базового вектора V_i, $i = \overline{1, Np}$, из текущего поколения выбирается три случайных вектора: V_c, V_d, V_e $(c \neq d \neq e \neq i)$, создается мутантный вектор $\widetilde{V}_c = V_c + Fm \cdot (V_d - V_e)$, где Fm — некоторая положительная вещественная константа из промежутка $[0, 2]$, которая называется силой мутации (еще один параметр алгоритма). Сила мутации Fm определяет амплитуду возмущений, вносимых в вектор V_c.

3. Вычисляются координаты пробного вектора U_i по формуле

$$u_{ji} = \begin{cases} \widetilde{v}_{jc}, & \text{если} \quad rand\,(0,1) \le Cr \vee j = j_{rand}, \\ v_{ji}, & \text{если} \quad rand\,(0,1) > Cr \wedge j \neq j_{rand}, \end{cases} \quad j = \overline{1, k},$$

где $rand(0,1)$ — случайное число из интервала $(0, 1)$, Cr — вероятность скрещивания (параметр настройки алгоритма), с которой потомок U_i наследует искаженный мутацией генетический признак от «родительского» вектора V_c (соответствующий признак от базового вектора V_i наследуется с вероятностью $1 - Cr$).

4. Для включения в новое поколение выбирается тот из векторов U_i и V_i, значение целевой функции которого меньшее. Целевая функция F вычисляется по формуле

$$F(V_i) = \max_{1 \le j \le k+1} |\, \delta_{j-1} - \delta_j \,|, \ \overline{1, Np},$$

где $\delta_j \equiv L_n(f, [v_{j-1,i}, v_{ji}])$ — погрешность наилучшей чебышевской дробно-рациональной аппроксимации функции $f(x)$ на сегменте $[v_{j\text{-}1,i}, v_{ji}]$, $j = \overline{1, k+1}$ $(v_{0i} = \alpha,\ v_{k+1,i} = \beta)$. Для вычисления погрешности δ_j сегмент покрывается равномерной сеткой из m точек и применяется алгоритм наилучшего чебышевского дробно-рационального приближения (1), (2).

5. Если выполняется одно из условий:

— значение целевой функции лучшего вектора в поколении меньше заданного ε;

— исчерпано максимальное число поколений популяции $p_{\max}$;

— происходит стагнация итерационного процесса, т.е. относительный разброс значений целевой функции в популяции меньше заданной величины λ

$$\max_{i=\overline{1,\,Np}} F(V_i) - \min_{i=\overline{1,\,Np}} F(V_i) < \lambda \min_{i=\overline{1,\,Np}} F(V_i),$$

то эволюционный процесс завершается и выполняется переход к п. 6, иначе — к п. 2. По умолчанию задается $\varepsilon = 10^{-11}$, $p_{\max} = 200$, $\lambda = 10^{-4}$.

6. Для лучшего вектора последнего поколения эволюционного процесса вычисляются коэффициенты аппроксимантов наилучшего чебышевского дробно-рационального приближения на сегментах (с использованием упомянутого в п. 4 алгоритма), а также вычисляется коэффициент балансности B ($B \geq 1$) [13]:

$$B = \frac{\max\limits_{1 \leq j \leq k+1} \delta_j}{\frac{1}{k+1} \sum\limits_{j=1}^{k+1} \delta_j}.$$

На этом алгоритм заканчивает работу. В результате получаем: оптимальные узлы, погрешность сегментной аппроксимации, коэффициенты наилучших аппроксимантов на сегментах, погрешности приближения на каждом сегменте и количество поколений эволюционного процесса.

Ввиду стохастического характера алгоритма ДЭ для получения приемлемого результата следует сделать несколько запусков алгоритма.

Алгоритм наилучшего чебышевского дробно-рационального приближения функций, который используется в п. 4 и п. 6, основан на втором полиномиальном методе Е.Я. Ремеза — последовательных чебышевских интерполяций [19], модернизированном для случая аппроксимации дробями. Метод заключается в построении последовательности $(n+2)$-точечных наборов $S_p = \{x_\mu^{(p)}\}$, сходящейся к экстремальному базису (аналог чебышевского альтернанса для полиномиального случая), и решении на каждой p-й итерации ($p = 0, 1, 2, \ldots$) системы уравнений

$$f(x_\mu^{(p)}) - r_{l,n-l}^{(p)}(x_\mu^{(p)}) = (-1)^\mu \delta^{(p)} / w(x_\mu^{(p)}), \ \mu = \overline{0, n+1}, \qquad (6)$$

нелинейных относительно величины $\delta^{(p)}$ и $(n+1)$-го коэффициента аппроксиманта $r_{l,n-l}^{(p)}$.

Применяемый алгоритм имеет следующие особенности реализации общей схемы метода Е.Я. Ремеза [20, 21]:

— в качестве начального набора S_0 выбираются $n+2$ точки сетки, ближайшие к точкам экстремумов полинома Чебышева $T_{n+1}(x)$, соответственно преобразованных к сегменту аппроксимации;

— исключением неизвестного $\delta^{(p)}$ выполняется линеаризация системы (6) относительно $(n+1)$-х коэффициентов a_i ($i = \overline{0, l}$) и b_i ($i = \overline{1, n-l}$, $b_0 = 1$), и для решения преобразованной системы применяется метод Гаусса;

— последнее уравнение системы (6) рассматривается как функция $F(\delta^{(p)}) \equiv F[\delta^{(p)}, a_0(\delta^{(p)}), \ldots, a_l(\delta^{(p)}), b_1(\delta^{(p)}), \ldots, b_{l-n}(\delta^{(p)})]$ от $\delta^{(p)}$, и неизвестное $\delta^{(p)}$ находится с помощью метода секущих как корень уравнения $F(\delta^{(p)}) = 0$;

— при переходе к новому набору S_{p+1}, $p = 0, 1, 2, \ldots$, реализуется вариант с многоточечной заменой (в общем случае возможна замена всех точек предыдущего набора S_p), что позволяет найти наилучший аппроксимант всего за несколько итераций алгоритма.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для проверки эффективности предложенного стохастического алгоритма нахождения оптимальных узлов выполнена серия вычислительных экспериментов по чебышевскому сегментному приближению непрерывных функций с помощью рациональных дробей. Сравнительный анализ полученных результатов с найденными с использованием детерминистических алгоритмов показал, что в большинстве случаев с помощью алгоритма ДЭ удается найти более точные значения узлов и построить чебышевское кусочно-рациональное приближение с меньшей сегментной погрешностью, чем с помощью сложных детерминистических алгоритмов. Рассмотрим примеры, подтверждающие справедливость данного утверждения.

Пример 1. Необходимо найти чебышевское сегментное приближение с минимальной абсолютной погрешностью (весовая функция $w(x) \equiv 1$) на отрезке $[0, 1]$ для функции $f(x) = \sqrt{x}$ с помощью рациональных дробей $r_{31}(x)$ и $r_{32}(x)$ для случаев разбиения промежутка $[0, 1]$ на два ($k = 1$) и на три сегмента ($k = 2$).

Для решения поставленной задачи применялся алгоритм ДЭ с такими значениями параметров настройки:

— размер популяции $Np = 30$;

— число внутренних узлов разбиения $k = 1$ и $k = 2$;

— сила мутации $Fm = 0.4$;

— вероятность скрещивания $Cr = 0.9$;

— число точек сетки на сегменте $m = 501$;

— значения ε, $p_{\max}$, δ — по умолчанию.

Для каждого k выполнялось 10 запусков алгоритма. Из табл. 1 видно, что во всех случаях погрешности сегментного приближения ρ, найденные по алгоритму ДЭ, меньше соответствующих погрешностей, полученных с помощью детерминистического алгоритма [9]. О высокой точности вычисления оптимальных

Таблица 1. Аппроксимация функции $f(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $[0, 1]$

Число узлов k	Детерминистический алгоритм		Алгоритм ДЭ	
	r_{31}	r_{32}	r_{31}	r_{32}
0	$\rho = 0.01077$	$\rho = 0.00426$	$\rho = 0.01076$	$\rho = 0.003868$
1	$\rho = 0.00145$ $t_1 = 0.018$	$\rho = 0.00042$ $t_1 = 0.0097$	$\rho = 0.001448$ $t_1 = 0.018083$ $B = 1.0000000002$	$\rho = 0.0003552$ $t_1 = 0.011830$ $B = 1.00000000003$
2	$\rho = 0.00037$ $t_1 = 0.0012$ $t_2 = 0.065$	$\rho = 0.000086$ $t_1 = 0.0004$ $t_2 = 0.041$	$\rho = 0.00036666$ $t_1 = 0.001159$ $t_2 = 0.064110$ $B = 1.0000000001$	$\rho = 0.00007504$ $t_1 = 0.000528$ $t_2 = 0.044632$ $B = 1.0000000003$

Таблица 2. Аппроксимация функции $f(x) = \ln x$ на отрезке $[1, 2]$

Результаты	Детерминистический алгоритм	Алгоритм ДЭ
t_1	1.259965332	1.259921022
t_2	1.587430001	1.587401041
δ_1	$0.6183 \cdot 10^{-6}$	$0.61757414 \cdot 10^{-6}$
δ_2	$0.6174 \cdot 10^{-6}$	$0.61757454 \cdot 10^{-6}$
δ_3	$0.6175 \cdot 10^{-6}$	$0.61757445 \cdot 10^{-6}$
B	1.0009	1.00000026

узлов по алгоритму ДЭ свидетельствуют значения коэффициента балансности B, которые отличаются менее чем на $3 \cdot 10^{-10}$ от единицы ($B = 1$ в случае балансного приближения).

Чтобы продемонстрировать насколько лучше точность кусочного приближения по сравнению с аппроксимацией одним выражением на всем промежутке приближения, в табл. 1 приведены погрешности аппроксимации функции $f(x) = \sqrt{x}$ для $k = 0$ (в этом случае сразу стартует алгоритм Е.Я. Ремеза, поскольку разбиения отрезка $[0, 1]$ не требуется).

Пример 2. Необходимо приблизить функцию $f(x) = \ln x$ на промежутке $[1, 2]$ кусочным аппроксимантом с тремя звеньями вида $r_{21}(x)$.

В результате применения алгоритма ДЭ (значения параметров настройки: $Np = 30$, $k = 2$, $Fm = 0.4$, $Cr = 0.9$, $m = 101$, число запусков 10) получен кусочный аппроксимант

$$\ln x \approx \begin{cases} \dfrac{-2.3860278 + 1.98971177x + 0.39631775x^2}{1 + 1.7825823291x}, & 1 \le x \le t_1, \\ \dfrac{-2.15497874 + 1.90613934x + 0.24966454x^2}{1 + 1.4148365376x}, & t_1 < x \le t_2, \\ \dfrac{-1.92392967 + 1.77235596x + 0.15727880x^2}{1 + 1.1229564916x}, & t_2 < x \le 2. \end{cases}$$

При этом погрешность сегментного приближения $\rho = 0.61757454 \cdot 10^{-6}$. Оптимальные узлы t_1 и t_2, погрешности δ_1, δ_2, δ_3 на сегментах и коэффициент балансности B указаны в табл. 2. Там же для сравнения приведены результаты, представленные в [13].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье описан алгоритм построения чебышевского кусочного дробно-рационального приближения функций, в котором для нахождения оптимальных узлов разбиения промежутка аппроксимации на сегменты используется дифференциальная эволюция. Алгоритм ДЭ является одним из лучших стохастических алгоритмов, который стабильно находит оптимум функции за минимальное время вследствие способности динамически моделировать особенности рельефа оптимизируемой функции, и при этом он прост в реализации и использовании, так как содержит мало параметров, требующих подбора. Результаты вычислительных экспериментов показали, что данный алгоритм позволяет точнее находить значения оптимальных узлов и получать меньшую погрешность сегментной аппроксимации по сравнению со сложными детерминистическими алгоритмами. В дальнейшем предложенный подход планируется применить для поиска оптимальных узлов чебышевской аппроксимации функций полиномиальными сплайнами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. Киев: Наук. думка, 1989. 272 с.
2. Исаев В.К., Плотников С.А. Обратная задача Чебышева и сплайны Чебышева. *Тр. Математического института РАН.* 1995. Т. 211. С. 164–185.
3. Бердышев В.И., Петрак Л.В. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. 297 с.
4. Каленчук-Порханова А.А., Вакал Л.П. Наилучшая чебышевская аппроксимация для сжатия численной информации. *Компьютерная математика*. 2009. № 1. С. 99–107.
5. Lee Dong-U, Luk W., Villasenor J., Cheung P.Y.K. Non-uniform segmentation for hardware function evaluation. *Proc. Inter. Conf. on Field Programmable Logic and Applications*, Lisbon, Portugal, Sept. 2003. P. 796–807.
6. Pavlidis T., Maika A.P. Uniform piecewise polynomial approximation with variable joints. *J. Approx. Theory*. 1974. Vol. 12. P. 61–69.
7. Вопросы теории и элементы программного обеспечения минимаксных задач. Под ред. В.Ф. Демьянова и В.Н. Малоземова. Ленинград: Изд-во Ленинградского ун-та, 1977. 192 с.
8. Kioustelidis J.B. Optimal segmented approximations. *Computing*. 1980. Vol. 24. P. 1–8.
9. Nürnberger G., Sommer M., Strauss H. An algorithm for segment approximation. *Numer. Math*. 1986. Vol. 48, N 4. P. 463–477.
10. Meinardus G., Nürnberger G., Sommer M., Strauss H. Algorithm for piecewise polynomials and splines with free knots. *Math. of Computation.* 1989. Vol. 53, N 187. P. 235–247.
11. Wolters H.J. A Newton-type method for computing best segment approximation. *Communications on Pure and Applied Analysis*. 2004. Vol. 3, N 1. P. 133–149.
12. Вакал Л.П. Рівномірне кусково-поліноміальне наближення. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2006. № 5. С. 53–59.
13. Попов Б., Лаушник О., Сущик К. Нелінійні апроксимаційні моделі. *Вісн. Львівського ун-ту. Сер. Прикладна математика та інформатика.* 2002. Вип. 5. С. 32–38.
14. Lawson C.L. Characteristic properties of the segmented rational minmax approximation problem. *Numer. Math*. 1964. Vol. 6, N 4. P. 293–301.
15. Vakal L.P. Seeking optimal knots for segment approximation. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 11. P. 68–75.
16. Storn R., Price K. Differential evolution — a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*. 1997. Vol. 11. P. 341–359.
17. Vakal L.P. Using genetic algorithm for solving boundary value problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47, N 8. P. 52–62.
18. Vakal L.P. Solving uniform nonlinear approximation problem using continuous genetic algorithm. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 6. P. 49–59.
19. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наук. думка, 1969. 623 с.
20. Каленчук-Порханова А.А. Аппроксимация функций одной и многих переменных. *Численные методы для многопроцессорного вычислительного комплекса ЕС.* Москва: Изд-во ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1987. С. 366–395.
21. Каленчук-Порханова А.А. Наилучшая чебышевская аппроксимация функций одной и многих переменных. *Кибернетика и системный анализ*. 2009. № 6. С. 155–164.

Надійшла до редакції 22.05.2017

Л.П. Вакал, А.О. Каленчук-Порханова, Є.С. Вакал

ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ЧЕБИШОВСЬКОЇ СЕГМЕНТНОЇ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Анотація. Представлено алгоритм чебишовської сегментної апроксимації з вільними вузлами. Як апроксимуючі функції на підінтервалах використовують раціональні дроби. Для пошуку оптимальних вузлів застосовується алгоритм диференціальної еволюції. Наведено чисельні результати щодо сегментної апроксимації функцій з оптимальними вузлами.

Ключові слова: чебишовська сегментна апроксимація, задача багатовимірної нелінійної оптимізації, раціональні дроби, оптимальні вузли, алгоритм диференціальної еволюції.

L.P. Vakal, A.A. Kalenchuk-Porkhanova, E.S. Vakal

INCREASING THE EFFICIENCY OF CHEBYSHEV SEGMENT RATIONAL FRACTIONAL APPROXIMATION

Adstract. An algorithm for Chebyshev segment approximation with free nodes is presented. Rational fractions are used as approximating functions on subintervals. The differential evolution algorithm is used to find optimal nodes. Numerical results concerning segment approximation of functions with optimal nodes are given**.**

Keywords: Chebyshev segment approximation, multidimensional nonlinear optimization problem, rational fractions, optimal node, differential evolution algorithm.

Вакал Лариса Петровна,
кандидат техн. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: lara.vakal@gmail.com.

Каленчук-Порханова Анжелина Алексеевна,
кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: dep145@gmail.com.

Вакал Евгений Сергеевич,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: jvakal@gmail.com.