УДК 517.9:517.87

О.Г. НАКОНЕЧНИЙ, Ю.М. ШЕВЧУК, В.К. ЧИКРІЙ

ОЦІНКА НЕСТАЦІОНАРНИХ ПАРАМЕТРІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Анотація. Наведено алгоритм знаходження оптимальних за функціоналом та гарантованих оцінок нестаціонарних параметрів систем диференціальних рівнянь. Отримані результати поширено на випадок дискретних спостережень для системи диференціальних рівнянь. Як приклад представлено результати оцінки параметрів для математичної моделі поширення інформації одного виду в соціумі.

Ключові слова: диференціальні рівняння, нестаціонарні параметри, оптимальні за функціоналом оцінки, гарантовані оцінки, невизначеність.

Дослідження математичних моделей в умовах невизначеності породжує низку задач, які, зокрема, розглянуто в [1–3]. Однією з них є знаходження оцінок параметрів системи, алгоритми побудови яких проаналізовано в [4, 5].

Нехай на інтервалі $t \in (0, T)$ спостерігається вектор-функція $x(t) \in R^n$, яка є узагальненим розв'язком рівняння

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t))\varphi(t) + f(t, x(t)) + \eta(t), \tag{1}$$

де $F(t, x(t))$ — задана матрична функція розмірності $n \times m$, $f(t, x(t)) \in R^n$ — задана вектор-функція, $\varphi(t) \in R^m$, $\eta(t) \in R^n$ — невідомі вектор-функції.

Позначимо $L_{2,m}(0, T)$ та $L_{2,n}(0, T)$ — простори вимірних інтегровних з квадратом на $(0, T)$ функцій із просторів R^m та R^n відповідно. Припустимо, що $F(t, x(t))$ і $f(t, x(t))$ — обмежені та неперервні на $(0, T)$ функції своїх аргументів, функція $\varphi(t) \in Q$, $t \in (0, T)$, де Q — клас $k-1$ $(k>1)$ разів неперервно диференційовних вектор-функцій, для яких існує узагальнена похідна k-го порядку; припустимо також, що $\varphi(t)$ належить простору $L_{2,m}(0, T)$, а функція $\eta(t)$ — простору $L_{2,n}(0, T)$.

Означення 1. Під узагальненим розв'язком рівняння (1) з початковою умовою $x(0) = x_0$ розуміємо вектор-функцію $x(t)$, яка є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(\tau, x(\tau))\varphi(\tau)\, d\tau + \int_0^t f(\tau, x(\tau))\, d\tau + \eta_1(t), \quad 0 < t \le T, \tag{2}$$

де $\eta_1(t) = \int_0^t \eta(\tau) d\tau$.

Припускаємо, що розв'язок рівняння (2) існує та єдиний.

Задача полягає у знаходженні оптимальної в певному сенсі оцінки функції $\varphi(t) \in Q$, $t \in (0, T)$, із заданими спостереженнями $x(t)$, $t \in (0, T)$, та відомими обмеженнями на функції $\varphi(t)$ та $\eta_1(t)$.

Припустимо, що $(\varphi, \eta_1) \in G$, причому множина G задається у вигляді

$$G = \{(\varphi, \eta_1) : \Phi(\varphi, \eta_1) \le \gamma^2(T)\},$$

$$\Phi(\varphi, \eta_1) = \int_0^T q_1^2(\tau) |\varphi^{(k)}(\tau)|^2\, d\tau + \int_0^T q_2^2(\tau) |\eta_1(\tau)|^2\, d\tau,$$

де $q_i(t)$, $i=1,2,$ — неперервні на $(0,T)$ функції, такі що для деякого числового параметра $\nu>0$ виконуються нерівності $q_i^2(t)\ge\nu$, $i=1,2$; $\gamma^2(T)$ — відоме значення.

Твердження 1. У просторі $L_{2,m}(0,T)$ множина G є необмеженою.

Доведення. Розглянемо $\varphi^{(k)}(t)=u(t)$, $t\in(0,T)$; тоді виконується рівність

$$\varphi(t)=\tilde{\varphi}_1(t)+\tilde{\varphi}_2(t),$$

де функція $\tilde{\varphi}_1(t)$ задовольняє рівняння $\tilde{\varphi}_1^{(k)}(t)=u(t)$, $\tilde{\varphi}_1^{(s)}(t)=0$, $s=\overline{0,k-1}$, $t\in(0,T)$, і є обмеженою в просторі $L_{2,m}(0,T)$, а функція $\tilde{\varphi}_2(t)$, $t\in(0,T)$, має вигляд $\tilde{\varphi}_2(t)=\sum\limits_{s=0}^{k-1}c_s t^s$, де c_s, $s=\overline{0,k-1}$, — довільні вектори, $\tilde{\varphi}_2(t)$ необмежена в $L_{2,m}(0,T)$.

Зауважимо, що $\tilde{\varphi}_1+\tilde{\varphi}_2\in G$, і за рахунок довільних векторів c_s, $s=\overline{0,k-1}$, норма функції $\tilde{\varphi}_1+\tilde{\varphi}_2$ у просторі $L_{2,m}(0,T)$ може бути необмеженою.

Твердження 2. Має місце представлення

$$\varphi(t)=\int\limits_0^t\frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\varphi^{(k)}(\tau)d\tau+\sum_{s=0}^{k-1}c_s t^s, \tag{3}$$

де $c_s=\varphi^{(s)}(0)$, $s=\overline{0,k-1}$.

Доведення. Справедливість цього твердження перевіряється диференціюванням $k-1$ разів виразу (3). Отримуємо рівність

$$\varphi^{(k-1)}(t)=\int\limits_0^t u(\tau)\,d\tau+\varphi^{(k-1)}(0),$$

де $u(t)=\varphi^{(k)}(t)$.

Позначимо $y(t)$ та $\psi(t)$, $t\in(0,T)$, функції:

$$y(t)=x(t)-x(0)-\int\limits_0^t f(\tau,x(\tau))\,d\tau,\quad \psi(t)=\int\limits_0^t F(\tau,x(\tau))\varphi(\tau)d\tau,$$

а G_1 — множину $G_1=\{\varphi:\Phi(\varphi,\,y-\psi)\le\gamma^2(T)\}$.

Зауваження 1. Очевидно, що всі можливі функції $\varphi(t)$ для спостережень $x(t)$, $t\in(0,T)$, належать множині G_1.

Означення 2. Функцію $\hat{\varphi}(t)$, $t\in(0,T)$, яка знаходиться з умови $\hat{\varphi}\in\operatorname{Arg}\min\limits_{\varphi\in G_1}\Phi(\varphi,\,y-\psi)$, назвемо оптимальною за функціоналом.

Зауваження 2. Якщо функція $\hat{\varphi}(t)$, $t\in(0,T)$, існує, то $\hat{\varphi}(t)$ належить множині G_1.

Означення 3. Функцію $\hat{\varphi}_1$, $t\in(0,T)$, що знаходиться з умови

$$\inf_{\varphi_1\in G_1}\sup_{\varphi_2\in G_1}\|\varphi_1-\varphi_2\|=\sup_{\varphi_2\in G_1}\|\hat{\varphi}_1-\varphi_2\|=\sigma,$$

де

$$\|\varphi\|=\left\{\int\limits_0^T|\varphi(\tau)|^2\,d\tau\right\}^{1/2},$$

назвемо гарантованою L_2-оцінкою функції $\varphi(t)$, а величину σ — гарантованою L_2-похибкою функції $\hat{\varphi}_1(t)$.

Знайдемо спочатку оптимальну за функціоналом функцію $\hat{\varphi}(t)$, $t\in(0,T)$.

Лема 1. Має місце рівність

$$\Phi(\varphi, y-\psi)=\int_0^T q_1^2(t)\,|u(t)|^2\,dt+\int_0^T q_2^2(t)\left|y(t)-\int_0^T F_2(t,\tau)u(\tau)\,d\tau-\sum_{p=0}^{k-1} c_p g_p(t)\right|^2 dt,$$

де

$$F_2(t,s)=\int_0^T \chi_{(0,\tau)}(s)\frac{(\tau-s)^{k-1}}{(k-1)!}F_1(t,\tau)\,d\tau,\quad F_1(t,\tau)=\chi_{(0,t)}(\tau)F(\tau,x(\tau)),$$

$$\chi_{(0,t)}(\tau)=\begin{cases}1, & \tau\in(0,t),\\ 0, & \tau\notin(0,t),\end{cases}\quad g_p(t)=\int_0^T F_1(t,\tau)\tau^p\,d\tau,\quad p=\overline{1,k-1}.$$

Доведення. Зауважимо, що оскільки справедливе представлення

$$\psi(t)=\int_0^t F(\tau,x(\tau))\varphi(\tau)\,d\tau=\int_0^T \chi_{(0,t)}(\tau)F(\tau,x(\tau))\varphi(\tau)\,d\tau=\int_0^T F_1(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau,$$

і

$$\varphi(\tau)=\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{k-1}}{(k-1)!}u(s)\,ds+\sum_{p=0}^{k-1}c_p\tau^p,$$

отримуємо

$$\psi(t)=\int_0^T F_1(t,\tau)\left[\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{k-1}}{(k-1)!}u(s)\,ds+\sum_{p=0}^{k-1}c_p\tau^p\right]d\tau=$$

$$=\int_0^T F_1(t,\tau)\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{k-1}}{(k-1)!}u(s)\,ds d\tau+\int_0^T F_1(t,\tau)\sum_{p=0}^{k-1}c_p\tau^p\,d\tau=$$

$$=\int_0^T\int_0^T F_1(t,\tau)\chi_{(0,\tau)}(s)\frac{(\tau-s)^{k-1}}{(k-1)!}\,d\tau u(s)\,ds+\sum_{p=0}^{k-1}c_p g_p(t)=$$

$$=\int_0^T F_2(t,s)u(s)ds+\sum_{p=0}^{k-1}c_p g_p(t).$$

Враховуючи ці співвідношення, одержуємо потрібне представлення для функціоналу $\Phi(\varphi,\ y-\psi)$.

Позначимо далі $I(u,c)$ функціонал вигляду $I(u,c)=\Phi(\varphi,\ y-\psi)$, де $c=(c_0,\ldots,c_{k-1})^*$, знак $*$ — символ транспонування.

Зауважимо, що якщо $(\hat{u},\hat{c})\in\operatorname{Arg}\min\limits_u I(u,c)$, то

$$\varphi(t)=\int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\hat{u}(s)\,ds+\sum_{p=0}^{k-1}\hat{c}_p t^p.$$

Знайдемо функцію $\hat{u}$ з умови $\left.\dfrac{d}{d\tau}I(\hat{u}+\tau v)\right|_{\tau=0}\equiv 0\ \ \forall v\in L_{2,m}(0,T)$.

Позначимо $y_1(t),\ t\in(0,T)$, функцію

$$y_1(t)=y(t)-\sum_{p=0}^{k-1}c_p g_p(t);$$

тоді

$$\left.\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}I(\hat{u}+\tau v)\right|_{\tau=0}=\int_0^T q_1^2(t)(\hat{u}(t),v(t))\,dt-\int_0^T q_2^2(t)(y_1(t)-\psi_1(t),\overline{\psi}_1(t))\,dt=$$

$$= \int_0^T q_1^2(t)(\hat{u}(t), v(t))\,dt + \int_0^T \left(\int_0^T \bar{F}_2(t,\tau)\hat{u}(\tau)\,d\tau, v(t) \right) dt -$$

$$- \int_0^T q_2^2(t) \left(\int_0^T F_2^*(t,\tau) y_1(\tau) d\tau, v(t) \right) dt \equiv 0,$$

де

$$\psi_1(t) = \int_0^T F_2(t,\tau)\hat{u}(\tau)\,d\tau,\ \bar{\psi}_1(t) = \int_0^T F_2(t,\tau)v(\tau) d\tau,$$

$$\bar{F}_2(t,\tau) = \int_0^T q_2^2(s) F_2^*(t,s) F_2(t,\tau)\,ds,$$

звідки одержимо інтегральне рівняння

$$q_1^2(t)\hat{u}(t) + \int_0^T \bar{F}_2(t,\tau)\hat{u}(\tau)\,d\tau = \int_0^T q_2^2(\tau) F_2^*(t,\tau) y(\tau) d\tau - \sum_{p=0}^{k-1} c_p g_{1p}(t), \tag{4}$$

де $g_{1p}(t) = \int_0^T q_2^2(\tau) F_2^*(t,\tau) g_p(\tau)\,d\tau,\ \ p = \overline{0, k-1}.$

Твердження 3. Функція $\hat{u}(c)$ є єдиним розв'язком інтегрального рівняння (4).

Лема 2. Існує єдина функція $\hat{u}(c)$ така, що $\hat{u}(c) \in \operatorname{Arg} \min\limits_u I(u, c)\ \ \forall c.$

Доведення. Оскільки функціонал $I(u, c)$ для заданого вектора c є напівнеперервним знизу і сильно-опуклим, причому $\lim\limits_{\|u\| \to \infty} I(u, c) = \infty$, то згідно з [6] існує єдина функція $\hat{u}(c)$ така, що $\hat{u}(c) \in \operatorname{Arg} \min\limits_u I(u, c)$.

Позначимо $\bar{u}_1(t),\ t \in (0, T)$, розв'язок інтегрального рівняння

$$q_1^2(t)\hat{u}_1(t) + \int_0^T \bar{F}_2(t,\tau)\hat{u}_1(\tau) d\tau = \int_0^T q_2^2(\tau) F_2^*(t,\tau) y(\tau) d\tau, \tag{5}$$

а $U_p(t),\ p = \overline{0, k-1}$, — розв'язок системи інтегральних рівнянь

$$q_1^2(t) U_p(t) + \int_0^T \bar{F}_2(t,\tau) U_p(\tau)\,d\tau = -g_{1p}(t),\ \ p = \overline{0, k-1}. \tag{6}$$

Лема 3. Має місце рівність

$$\hat{u}(t) = \bar{u}_1(t) + \sum_{p=0}^{k-1} U_p(t) c_p. \tag{7}$$

Доведення. Справедливість представлення (7) випливає з лінійності інтегрального рівняння (4).

Твердження 4. Існує єдиний вектор з мінімальною нормою такий, що $\min\limits_c I(\hat{u}(c), c) = I(\hat{u}(\hat{c}), \hat{c})$.

Доведення. Оскільки

$$\int_0^T F_2(t,\tau)\hat{u}(c)\,d\tau = \int_0^T F_2(t,\tau)\bar{u}_1(\tau)\,d\tau + \sum_{p=0}^{k-1} c_p \int_0^T F_2(t,\tau) U_p(\tau) d\tau,$$

то справедливе представлення

$$I(\hat{u}(c), c) = \sum_{p_1, p_2 = 0}^{k-1} (A_{p_1, p_2} c_{p_2}, c_{p_1}) - 2 \sum_{p=0}^{k-1} (a_p, c_p) + b,$$

де

$$A_{p_1, p_2} = \int_0^T q_1^2(t) U_{p_1}^*(t) U_{p_2}(t)\,dt + \int_0^T q_2^2(t) F_{3p_1}^*(t) F_{3p_2}(t)\,dt,\ \ p_1, p_2 = \overline{0, k-1},$$

$$F_{3p}(t)=\int_0^T F_2(t,\tau)U_p(\tau)\,d\tau,\quad p=\overline{0,k-1},$$

$$a_p=-\int_0^T U_p^*(t)\bar{u}_1(t)q_1^2(t)\,dt+\int_0^T q_2^2(t)F_{3p}^*(t)\bar{y}(t)\,dt,\quad p=\overline{0,k-1},$$

$$\bar{y}(t)=y_1(t)-\int_0^T F_2(t,\tau)\bar{u}_1(\tau)\,d\tau,\quad b=\int_0^T q_1^2(t)\,|\,\bar{u}_1(t)|^2\,dt+\int_0^T q_2^2(t)\,|\,y_1(t)|^2\,dt.$$

Очевидно, що множина векторів таких, що $\hat{c}\in\operatorname{Arg}\min\limits_c I(\hat{u}(c),c)$, є розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

$$\sum_{p_2=0}^{k-1}A_{p_1,p_2}c_{p_2}=a_{p_1},\quad p_1=\overline{0,k-1}. \tag{8}$$

Таку СЛАР (8) можна представити у матричному вигляді

$$Ac=a, \tag{9}$$

де $A=\{A_{p_1,p_2}\}_{p_1,p_2=0}^{k-1}$, $a=(a_0,\ldots,a_{k-1})^*$.

Якщо матриця A вироджена, то всі розв'язки системи рівнянь (9) мають вигляд

$$c=A^+a+v,$$

де $v\in\ker A$, тобто $Av=0$, A^+ — псевдообернена матриця.

У такому разі справедливе представлення

$$|\,c|^2=|\,A^+a\,|^2+|\,v\,|^2,$$

і мінімальна норма досягається на векторі $\hat{c}=A^+a$.

Твердження 5. Нехай $\bar{u}_1(t)$, $U_p(t)$, $p=\overline{0,k-1}$, $t\in(0,T)$, та вектор $\hat{c}=(\hat{c}_0,\ldots,\hat{c}_{k-1})^*$ задовольняють системам рівнянь (5), (6), (8). Тоді має місце рівність

$$\min_{u,c}I(u(c),c)=I(\hat{u}(\hat{c}),\hat{c}),$$

де $\hat{u}(\hat{c})=\bar{u}_1(t)+\sum\limits_{p=0}^{k-1}U_p(t)\hat{c}_p$.

Доведення. Для $\min\limits_{u,c}I(u(c),c)$ справедлива низка рівностей

$$\min_{u,c}I(u(c),c)=\min_c\min_u I(u(c),c)=\min_c I(\hat{u}(c),c)=I(\hat{u}(\hat{c}),\hat{c}),$$

що й потрібно було показати.

Наслідок 1. Оптимальна за функціоналом функція $\hat{\varphi}(t)$, $t\in(0,T)$, має вигляд

$$\hat{\varphi}(t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\hat{u}(s)\,ds+\sum_{p=0}^{k-1}\hat{c}_p t^p,$$

де $\hat{u}(s)=\bar{u}_1(s)+\sum\limits_{p=0}^{k-1}U_p(s)\hat{c}_p$.

Знайдемо далі умови обмеженості множини G_1.

Лема 4. Функціонал

$$I(\varphi)=\int_0^T q_1^2(t)\,|\,\varphi^{(k)}(t)\,|^2\,dt+\int_0^T q_2^2(t)\,|\,y(t)-\psi(t,\varphi)\,|^2\,dt,$$

де $\psi(t,\varphi)=\int\limits_0^t F(\tau,x(\tau))\varphi(\tau)\,d\tau$, можна подати у вигляді

$$I(\varphi)=I(\hat\varphi)+\int\limits_0^T q_1^2(t)\,|(\varphi(t)-\hat\varphi(t))^{(k)}|^2\,dt+\int\limits_0^T q_2^2(t)\,|\psi(t,\varphi-\hat\varphi)|^2\,dt=I(\hat\varphi)+I_1(\varphi-\hat\varphi),$$

де $I_1(\varphi)=\int\limits_0^T q_1^2(t)\,|\varphi^{(k)}(t)|^2\,dt+\int\limits_0^T q_2^2(t)\,|\psi(t,\varphi)|^2\,dt.$

Доведення. Оскільки $I(\varphi)=I(\hat\varphi+\tau(\varphi-\hat\varphi))|_{\tau=1}$, з формули Тейлора одержуємо потрібне представлення.

Наслідок 1. Множина G_1 має вигляд

$$G_1=\{\varphi: I_1(\varphi-\hat\varphi)\le\gamma^2(T)-I(\hat\varphi)\}.$$

Наслідок 2. Нехай існує число $\beta\ne 0$ таке, що виконується нерівність

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^T (K(t,s)\varphi(s),\varphi(t))\,dt\,ds\ge\beta^2\int\limits_0^T|\varphi(t)|^2\,dt\quad\forall\varphi\in L_{2,m}(0,T),\tag{10}$$

де $K(t,s)=\int\limits_0^T q_2^2(\tau)F_1^*(t,\tau)F_1(t,s)\,d\tau$. Тоді множина G_1 обмежена.

Доведення. Із справедливості нерівностей

$$I_1(\varphi-\hat\varphi)\ge\int\limits_0^T q_2^2(t)\,|\psi(t,\varphi-\hat\varphi)|^2\,dt=$$

$$=\int\limits_0^T q_2^2(t)K(t,\tau)(\varphi(\tau)-\hat\varphi(\tau),\varphi(t)-\hat\varphi(t))\,d\tau\,dt\ge\beta^2\int\limits_0^T|\varphi(t)-\hat\varphi(t)|^2\,dt$$

випливає, що множина G_1 міститься у множині

$$\overline{G_1}=\left\{\varphi:\ \int\limits_0^T|\varphi(t)-\hat\varphi(t)|^2\,dt\le\beta^{-2}(\gamma^2(T)-I(\hat\varphi))\right\},$$

яка є обмеженою.

Наслідок 3. Нехай виконується нерівність (10), тоді L_2-похибка функції $\hat\varphi(t)$, $t\in(0,T)$, для якої проводиться спостереження, задовольняє нерівність

$$\left\{\int\limits_0^T|\varphi(t)-\hat\varphi(t)|^2\,dt\right\}^2\le\{\beta^{-2}(\gamma^2(T)-I(\hat\varphi))\}^2.$$

Твердження 6. Нехай множина G_1 — обмежена, тоді $\hat\varphi(t)$, $t\in(0,T)$, є гарантованою L_2-оцінкою функції $\varphi(t)$, і при цьому гарантована L_2-похибка функції $\hat\varphi(t)$ має вигляд

$$\sigma=\sup_{\varphi\in G_2}||\varphi||\,(\gamma^2(T)-I(\hat\varphi))^2,$$

де $G_2=\{\varphi: I_1(\varphi)\le 1\}$.

Доведення. Має місце нерівність:

$$\inf_{\varphi_1\in G_1}\sup_{\varphi_2\in G_1}||\varphi_1-\varphi_2||^2\ge\sup_{||l||\le 1}\inf_{\varphi_1\in G_1}\sup_{\varphi_2\in G_1}(l(\varphi_1)-l(\varphi_2))^2,$$

де $||\varphi||=\left\{\int\limits_0^T|\varphi(t)|^2\,dt\right\}^{1/2}$.

Обчислимо $\sup\limits_{\varphi_2 \in G_1} (l(\varphi_1) - l(\varphi_2))^2$. Покладемо $\varphi_2 - \hat{\varphi} = \overline{\varphi}_2$, тоді отримуємо

$$\sup_{\varphi_2 \in G_1} (l(\varphi_1) - l(\varphi_2))^2 = \sup_{\overline{\varphi}_2 \in \widetilde{G}_1} (l(\varphi_1) - l(\overline{\varphi}_2 - \hat{\varphi}))^2 =$$

$$= \left[\sup_{\overline{\varphi}_2 \in \widetilde{G}_1} l(\overline{\varphi}_2) + | l(\varphi_1) - l(\hat{\varphi}) | \right]^2 \geq \sup_{\overline{\varphi}_2 \in \widetilde{G}_1} l^2(\overline{\varphi}_2) = \sup_{\varphi \in G_2} l(\varphi)(\gamma^2(T) - I(\hat{\varphi}))^2,$$

де $\widetilde{G}_1 = \{\overline{\varphi} : I_1(\overline{\varphi}) \leq \gamma^2(T) - I(\hat{\varphi})\}$.

Нижня границя досягається для $\varphi_1 = \hat{\varphi}$, і тоді одержуємо вираз

$$\inf_{\varphi_1 \in G_1} \sup_{\varphi_2 \in G_1} (l(\varphi_1) - l(\varphi_2))^2 = \sup_{\varphi \in G_2} l^2(\varphi)(\gamma^2(T) - I(\hat{\varphi}))^2.$$

Із справедливості рівності

$$\sup_{\| l \| \leq 1} \sup_{\varphi \in G_1} l^2(\varphi)(\gamma^2(T) - I(\hat{\varphi}))^2 = \sup_{\varphi \in G_1} \| \varphi \| (\gamma^2(T) - I(\hat{\varphi}))^2$$

одержуємо необхідний вираз для σ.

Нехай в точках $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N+1} < T$ далі спостерігаються вектори $x(t_j)$, $j = \overline{1, N+1}$, для деяких значень $\varphi(t)$, $t \in (0, T)$, та η_j, $j = \overline{1, N+1}$, де $x(t_j)$ — розв'язок системи рівнянь

$$x(t_j) = x_0 + \sum_{s=1}^{N} \chi_{(0, t_j)}(t_s) F(t_s, x(t_s)) \Delta t_s \varphi(t_s) + \sum_{s=1}^{N} \chi_{(0, t_j)}(t_s) f(t_s, x(t_s)) \Delta t_s + \eta_j,$$

$$\Delta t_j = t_{j+1} - t_j, \ j = \overline{1, N},$$

де $F_s = F(t_s, x(t_s)) \Delta t_s$ та $f_s = f(t_s, x(t_s)) \Delta t_s$, $s = \overline{1, N}$, — відомі матриці розміру $n \times m$ та вектори з простору R^n відповідно.

Припустимо, що у функції $\varphi(t)$, $t \in (0, T)$, існує узагальнена похідна, яка належить простору $L_{2,m}(0, T)$, причому $\varphi(t)$ належить множині G_1, де

$$G_1 = \{\varphi : \Phi_1(\varphi) \leq \gamma_1^2(T)\}, \ \Phi_1(\varphi) = \int_0^T q_1^2(t) \left| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|^2 dt,$$

а $q_1^2(t)$ — відома функція, $\gamma_1(T)$ — відоме значення.

Нехай послідовність $\eta_1, \ldots, \eta_N$ належить множині G_2, де

$$G_2 = \left\{ \eta : \sum_{j=1}^{N} q_{2j}^2 | \eta_j |^2 \leq \gamma_2^2(N) \right\},$$

а $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_N)^*$ — відомий вектор, $\gamma_2(N)$, q_{2j}, $j = \overline{1, N}$, — відомі значення.

Позначимо G_3 множину вигляду

$$G_3 = \left\{ \varphi : \sum_{j=1}^{N} q_{2j}^2 | y_j - \psi_j |^2 \leq \gamma_2^2(N) \right\} \cap G_1,$$

де $y_j = x(t_j) - x_0 - \sum\limits_{s=1}^{N} \chi_{(0, t_j)}(t_s) f_s$, $\psi_j = \sum\limits_{s=1}^{N} \chi_{(0, t_j)}(t_s) F_s \varphi(t_s)$, $j = \overline{1, N}$.

Знайдемо оцінку, оптимальну за функціоналом $\Phi_2(\varphi) = \sum\limits_{j=1}^{N} q_{2j}^2 | y_j - \psi_j |^2$.

Позначимо $u(t)$ узагальнену похідну $\dfrac{d\varphi(t)}{dt}$; тоді $\varphi(t_j) = \int_0^{t_j} u(\tau)d\tau + c$, де c — довільний вектор.

Позначимо $I(u, c)$ функціонал $\Phi_2(\varphi)$.

Твердження 7. Існує єдиний вектор з мінімальною нормою такий, що $\min_c I(u, c) = I(u, \hat{c})$, причому $\hat{c}$ обчислюється за формулою:

$$\hat{c} = A^+ b, \tag{11}$$

де

$$A = \sum_{j=1}^N L_j^* L_j q_{2j}^2, \quad b = \sum_{j=1}^N L_j^* \bar{y}_j q_{2j}^2, \quad L_j = \sum_{s=1}^N \chi_{(0, t_j)}(t_s) F_s,$$

$$\bar{y}_j = y_j - \int_0^T F_j(\tau) u(\tau)\, d\tau, \quad F_j(\tau) = \sum_{s=1}^N \chi_{(0, t_j)}(t_s) \chi_{(0, t_s)}(\tau) F_s, \quad j = \overline{1, N}.$$

Доведення. Зауважимо, що оскільки

$$\psi_j = \sum_{s=1}^N \chi_{(0,t_j)}(t_s) F_s \varphi(t_s) = \int_0^T F_j(\tau) u(\tau) d\tau + L_j c, \ j = \overline{1, N},$$

функціонал $I(u, c)$ матиме вигляд

$$I(u, c) = \sum_{j=1}^N q_{2j}^2 \left| \ y_j - \int_0^T F_j(\tau) u(\tau) d\tau - L_j c \ \right|^2,$$

звідки отримаємо представлення для градієнта функціонала

$$\frac{1}{2} \nabla I(u, c) = -\sum_{j=1}^N L_j^* \bar{y}_j q_{2j}^2,$$

а, отже, вектор $\hat{c}$ є розв'язком системи рівнянь

$$\left(\sum_{j=1}^N L_j^* L_j q_{2j}^2 \right) \hat{c} = \sum_{j=1}^N L_j^* \bar{y}_j q_{2j}^2.$$

Позначимо $I_1(u) = I(u, \hat{c})$.

Лема 5. Функціонал $I_1(u)$ має вигляд

$$I_1(u) = \sum_{j=1}^N q_{2j}^2 | \, y_{1j} - \int_0^T C_j(\tau) u(\tau) d\tau \, |^2,$$

де

$$y_{1j} = y_j - \sum_{s=1}^N L_j A^+ L_s^* y_s q_{2s}^2,$$

$$C_j(\tau) = F_j(\tau) - \sum_{s=1}^N L_j A^+ L_s^* F_s(\tau) q_{2s}^2, \quad j = \overline{1, N}.$$

Доведення. Зауважимо, що для вектора $\hat{c}$ справедливі рівності:

$$\hat{c} = A^+ b = A^+ \sum_{s=1}^N L_s^* \bar{y}_s q_{2s}^2 = \sum_{s=1}^N A^+ L_s^* \left(\ y_s - \int_0^T F_s(\tau) u(\tau)\, d\tau \right) q_{2s}^2 =$$

$$= \sum_{s=1}^N A^+ L_s^* y_s q_{2s}^2 - \sum_{s=1}^N A^+ L_s^* \int_0^T F_s(\tau) u(\tau)\, d\tau q_{2s}^2.$$

Тоді отримуємо представлення

$$\hat{c} = \sum_{s=1}^N A^+ L_s^* y_s q_{2s}^2 - \int_0^T \left(\sum_{s=1}^N A^+ L_s^* F_s(\tau) q_{2s}^2 \right) u(\tau) d\tau, \tag{12}$$

звідки одержуємо формулу для функціоналу $I_1(u)$

$$I_1(u)=\sum_{j=1}^{N} q_{2j}^2 \left| y_j-\int_0^T F_j(\tau)u(\tau)\,d\tau - L_j\hat{c}\right|^2=$$

$$=\sum_{j=1}^{N} q_{2j}^2 \left| y_j-\int_0^T F_j(\tau)u(\tau)d\tau - L_j\left[\sum_{s=1}^{N} A^+L_s^* y_s q_{2s}^2-\int_0^T\left(\sum_{s=1}^{N} A^+L_s^* F_s(\tau)q_{2s}^2\right)u(\tau)\,d\tau\right]\right|^2=$$

$$=\sum_{j=1}^{N} q_{2j}^2 \left| y_j-\sum_{s=1}^{N} L_jA^+L_s^* y_s q_{2s}^2-\int_0^T\left[F_j(\tau)-L_j\sum_{s=1}^{N} A^+L_s^* F_s(\tau)\,q_{2s}^2\right]u(\tau)\,d\tau\right|^2.$$

Розглянемо функціонал $I_\alpha(u)=I_1(u)+\alpha^2\int_0^T q_1^2(t)\,|\,u(t)\,|^2\,dt.$

Твердження 8. Існує число $\hat{\alpha}$ таке, що

$$\min_{u\in U} I_1(u)=\min_{u\in U} I_{\hat{\alpha}}(u)=I_\alpha(\hat{u}_{\hat{\alpha}}),$$

де $U=\left\{u:\int_0^T q_1^2(t)\,|\,u(t)\,|^2 dt\le\gamma_1^2(T)\right\}$, причому $\hat{\alpha}\equiv 0$, якщо $\int_0^T q_1^2(t)\,|\,\hat{u}_0(t)\,|^2 dt\le\gamma_1^2(T)$;

в іншому разі $\hat{\alpha}$ можна знайти з умови $\int_0^T q_1^2(t)\,|\,\hat{u}_{\hat{\alpha}}(t)\,|^2\,dt=\gamma_1^2(T).$

Доведення. Справедливість цього твердження випливає із загальних теорем про мінімум квадратичних функціоналів [6].

Твердження 9. Існує єдина функція $\overline{u}(t)$, $t\in(0,T)$, така, що $\min\limits_{u\in U} I_\alpha(u)=I_\alpha(\overline{u})$ для $\alpha>0$, причому ця функція може бути знайдена як розв'язок інтегрального рівняння

$$q_1^2(t)\alpha^2\overline{u}(t)+\int_0^T\sum_{j=1}^{N} q_{2j}^2 C_j^*(t)C_j(\tau)\overline{u}(\tau)\,d\tau=\sum_{j=1}^{N} q_{2j}^2 C_j^*(t)\,y_{1j}. \qquad (13)$$

Доведення. Існування та єдиність розв'язку інтегрального рівняння (13) випливає із загальних теорем про мінімум квадратичних функціоналів [6].

Інтегральне рівняння (13) випливає з умови

$$\left.\frac{d}{d\tau} I_\alpha(\overline{u}+\tau v)\right|_{\tau=0}\equiv 0\quad \forall v\in L_{2,m}(0,T).$$

Наслідок 1. Нехай $\overline{u}(t)$, $t\in(0,T)$, — розв'язок інтегрального рівняння (13); тоді він має вигляд:

$$q_1^2(t)\alpha^2\overline{u}(t)=-\sum_{j=1}^{N} q_{2j}^2 C_j^*(t)\beta_j+\sum_{j=1}^{N} q_{2j}^2 C_j^*(t)\,y_{1j}, \qquad (14)$$

де вектори β_j, $j=\overline{1,N}$, є розв'язками систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\alpha^2\beta_j+\sum_{s=1}^{N} D_{js}\beta_s=d_j,\ \ j=\overline{1,N}.$$

Тут

$$D_{js}=\int_0^T C_j(\tau)C_s^*(\tau)q_{2s}^2 q_1^{-2}(\tau)\,d\tau,\ \ j,s=\overline{1,N},\ \ d_j=\sum_{s=1}^{N} D_{js}y_{1s},\ \ j=\overline{1,N}.$$

Доведення. Із (13) випливає:

$$\alpha^2\overline{u}(t)=-q_1^{-2}(t)\sum_{j=1}^{N} q_{2j}^2 C_j^*(t)\beta_j+q_1^{-2}(t)\sum_{j=1}^{N} q_{2j}^2 C_j^*(t)\,y_{1j},$$

де $\beta_j=\int_0^T C_j(\tau)\bar u(\tau)d\tau,\ j=\overline{1,N}$, звідки отримуємо такі рівності:

$$\alpha^2\int_0^T C_j(\tau)\bar u(\tau)d\tau=-\int_0^T C_j(\tau)q_1^{-2}(\tau)\sum_{s=1}^N q_{2s}^2C_s^*(\tau)\beta_s d\tau+$$

$$+\int_0^T C_j(\tau)q_1^{-2}(\tau)\sum_{s=1}^N q_{2s}^2C_s^*(\tau)y_{1s}d\tau,\ j=\overline{1,N},$$

$$\alpha^2\beta_j=-\sum_{s=1}^N\left[\int_0^T C_j(\tau)C_s^*(\tau)q_{2s}^2q_1^{-2}(\tau)\,d\tau\right]\beta_s+$$

$$+\sum_{s=1}^N\left[\int_0^T C_j(\tau)C_s^*(\tau)q_{2s}^2q_1^{-2}(\tau)\,d\tau\right]y_{1s},\ j=\overline{1,N},$$

що і потрібно було показати.

Наслідок 2. Має місце рівність

$$\bar\varphi(t)=\int_0^t\bar u(\tau)d\tau+\hat c,$$

де $\hat c$ знаходимо із системи рівнянь (11) та (12) для $u(t)=\bar u(t)$, $t\in(0,T)$, а функція $\bar u(t)$, $t\in(0,T)$, має вигляд (14).

Нехай $\varphi(t)$ та $\psi(t)$, $t\in(0,T)$, — вектор-функції з простору $L_{2,m}(0,T)$. Позначимо $I(\varphi)$, $I_1(\varphi)$ та $\sigma(\varphi)$ функціонали:

$$I(\varphi)=\gamma_1^{-2}(T)\Phi_1(\varphi)+\gamma_2^{-2}(N)\sum_{j=1}^N q_{2j}^2|\,y_j-\psi_j\,|^2,$$

$$I_1(\varphi)=\gamma_1^{-2}(T)\Phi_1(\varphi)+\gamma_2^{-2}(N)\sum_{j=1}^N q_{2j}^2|\,\psi_j\,|^2,\ \sigma(\varphi)=\sup_{\psi\in\bar G}||\,\varphi-\psi\,||,$$

а G_-, G_+, $\bar G$ — множини:

$$G_-=\{\varphi:I(\varphi)\le 1\},\ G_+=\{\varphi:I(\varphi)\le 2\},\ \bar G=\{\varphi:I_1(\varphi)\le 1\}.$$

Лема 6. Припускаємо, що існує таке додатне число γ, що виконується умова

$$\sum_{j=1}^N q_{2j}^2|\bar\psi_k(c)|^2\ge\gamma|c|^2\quad\forall c\in R^m,$$

де $\bar\psi_j(c)=\sum_{s=1}^N\varphi_{(0,t_j)}(t_s)F_sc,\ j=\overline{1,N}$. Тоді існує єдина функція $\hat\varphi(t)$, $t\in(0,T)$, така, що $\inf\limits_{\varphi\in G_1}I(\varphi)=I(\hat\varphi)$.

Доведення. Оскільки $\varphi(t_j)=\int_0^{t_j}u(\tau)\,d\tau+c,\ j=\overline{1,N}$, де $u(t)=\dfrac{d\varphi(t)}{dt}$, c — довільна константа, то, враховуючи, що функціонал $I(\varphi)=I(u,c)$ є сильно опуклим, напівнеперервним знизу і таким, що $\lim\limits_{\|u\|+|c|\to\infty}I(u,c)=\infty$, то згідно з теоремами з [6] існує єдина функція $\hat u(t)$, $t\in(0,T)$, та $\hat c$ такі, що

$$\inf_{\varphi\in G_1}I(\varphi)=\inf_{u,c}I(u,c)=I(\hat u,\hat c);$$

при цьому $\hat\varphi(t)=\int_0^t\hat u(\tau)\,d\tau+\hat c$.

Наслідок 1. Має місце рівність

$$\hat{\varphi}(t) = \int_0^t \hat{u}(\tau)\, d\tau + \hat{c},$$

де $\hat{c}$ знаходимо із систем рівнянь (11) та (12) для $u(t) = \hat{u}(t)$, $t \in (0, T)$, а функцію $\hat{u}(t)$, $t \in (0, T)$, можна знайти з рівності

$$(\gamma_2(N)/\gamma_1(T))^2\, \hat{u}(t) = -\sum_{j=1}^{N} q_{2j}^2 C_j^*(t) \beta_j + \sum_{j=1}^{N} q_{2j}^2 C_j^*(t) y_{1j},$$

де вектори β_j, $j = \overline{1, N}$, є розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$(\gamma_2(N)/\gamma_1(T))^2\, \beta_j + \sum_{s=1}^{N} D_{js} \beta_s = d_j, \ \ j = \overline{1, N}.$$

Лема 7. Множини G_- та G_+ мають вигляд:

$$G_- = \{\varphi : I_1(\varphi) \le 1 - I(\hat{\varphi})\}, \quad G_+ = \{\varphi : I_1(\varphi) \le 2 - I(\hat{\varphi})\}.$$

Доведення. Оскільки $\hat{\varphi} \in \operatorname{Arg}\min\limits_{\varphi \in G_1} I(\varphi)$, то з формули Тейлора для функції $g(\tau) = I(\hat{\varphi} + \tau(\varphi - \hat{\varphi}))$ одержуємо рівність $I(\varphi) = I(\hat{\varphi}) + I_1(\varphi - \hat{\varphi})$, звідки випливають вирази для G_- та G_+.

Твердження 10. Мають місце нерівності

$$\tilde{\sigma}(1 - I(\hat{\varphi}))^{1/2} \le \inf_{\varphi \in \overline{G}} \sigma(\varphi) \le \tilde{\sigma}(2 - I(\hat{\varphi}))^{1/2},$$

де $\tilde{\sigma} = \sup\limits_{\varphi \in \overline{G}} \|\varphi\|$.

Доведення. Покажемо спочатку, що справедлива оцінка

$$\inf_{\varphi \in \overline{G}} \sigma(\varphi) \ge \tilde{\sigma}(1 - I(\hat{\varphi}))^{1/2}.$$

Оскільки $G_- \subset \overline{G}$, то

$$\sigma(\varphi) = \sup_{\psi \in \overline{G}} \|\varphi - \psi\| \ge \sup_{\psi \in G_-} \|\varphi - \psi\|.$$

Тоді з рівності $\|\varphi - \psi\| = \sup\limits_{\|l\|=1} |(l, \varphi) - (l, \psi)|$, де (l, φ) та (l, ψ) — скалярні добутки функцій $l(t)$, $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ у просторі $L_{2,m}(0, T)$, одержуємо, що

$$\sup_{\psi \in G_-} \|\varphi - \psi\| = \sup_{\|l\|=1} \sup_{\psi \in G_-} |(l, \varphi) - (l, \psi)| = \sup_{\|l\|=1} (\sigma_1 + |(l, \varphi) - (l, \hat{\psi})|) \ge \sup_{\|l\|=1} \sigma_1,$$

де

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left[\sup_{\psi \in G_-} (l, \psi) + \inf_{\psi \in G_-} (l, \psi)\right], \ (l, \hat{\psi}) = \frac{1}{2}\left[\sup_{\psi \in G_-} (l, \psi) - \inf_{\psi \in G_-} (l, \psi)\right].$$

Із леми 7 випливає, що $\sigma_1 = \sup\limits_{\psi \in \overline{G}} (l, \psi)[1 - I(\hat{\varphi})]^{1/2}$.

Таким чином,

$$\sup_{\|l\|=1} \sigma_1 = \sup_{\psi \in \overline{G}} \sup_{\|l\|=1} (l, \psi)[1 - I(\hat{\varphi})]^{1/2} = \sup_{\psi \in \overline{G}} \|\psi\| [1 - I(\hat{\varphi})]^{1/2},$$

звідки одержуємо потрібну нерівність. Подібним чином доводиться нерівність

$$\inf_{\varphi \in \overline{G}} \sigma(\varphi) \le \tilde{\sigma}(2 - I(\hat{\varphi}))^{1/2}.$$

Зауваження 3. Оцінка $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0, T)$, що задовольняє умову $\hat{\varphi} \in \operatorname{Arg}\min\limits_{\varphi \in \overline{G}} I(\varphi)$, є наближеною до гарантованої оцінки функції $\varphi(t)$, $t \in (0, T)$.

Як приклад наведемо результати оцінювання параметрів для системи диференціальних рівнянь, що зустрічається в задачах розповсюдження інформації [7–10].

Процес розповсюдження інформації одного виду в соціумі можна представити за допомогою рівняння

$$\dot{x}(t)=(\varphi(t)-b(t)x(t))(L-x(t)),\ x(0)=x_0,\ \ t\in(0,T).$$

Нехай у точках $0<t_1<t_2<\ldots<t_{99}<10$ спостерігаються вектори $x(t_j)$, $j=\overline{1,99}$, — розв'язки системи рівнянь

$$x(t_j)=20+\sum_{s=1}^{98}\chi_{(0,t_j)}(t_s)(100-x(t_s))\varphi(t_s)\Delta t+$$

$$+0.003\sum_{s=1}^{98}\chi_{(0,t_j)}(t_s)x(t_s)(100-x(t_s))\Delta t+\eta_j,\ \ j=\overline{1,98}, \qquad (15)$$

де $\Delta t=t_{i+1}-t_i=0.1$, $i=\overline{1,98}$, тобто на часовому проміжку $t\in(0,10)$ спостерігається система поширення інформації одного виду у спільноті чисельністю $L=100$ осіб з відомим параметром інтенсивності спілкування $b(t)=0.003$, невідомим параметром зовнішнього впливу $\varphi(t)$, $t\in(0,10)$, та початковою умовою $x(0)=20$.

Результати побудови оптимальної оцінки $\hat{\varphi}(t)=\int_0^t \hat{u}(\tau)d\tau+\hat{c}$, $t\in(0,10)$, з відомими параметрами $q_1(t)=1$, $t\in(0,10)$, $q_{2j}=1$, $j=\overline{1,98}$, $\gamma_1(10)=1.3$, $\gamma_2(98)=1.5$ для математичної моделі (15) за допомогою чисельних методів наведено на рис. 1, *а* (штриховою лінією позначено $\varphi(t)$, $t\in(0,T)$, суцільною — $\hat{\varphi}(t)$, $t\in(0,T)$, а знаками + — коридор похибки гарантованої L_2-оцінки).

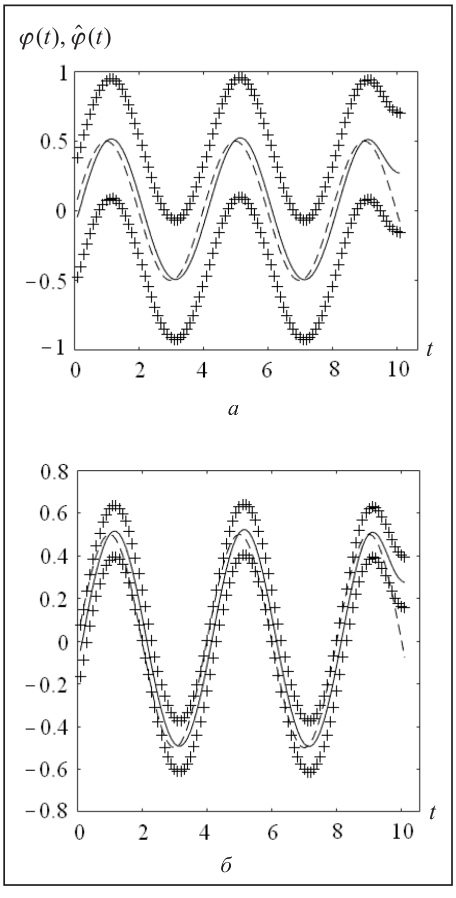

Рис. 1

Якщо параметр $\gamma_1(10)=1.25$, тобто допустима область $G_1=\{\varphi:\Phi_1(\varphi)\le \le\gamma_1^2(10)\}$ звузиться порівняно з попереднім випадком, то величина похибки гарантованої L_2-оцінки $\hat{\varphi}(t)$, $t\in(0,T)$, зменшиться. На рис. 1, *б* зображено графік оцінки параметра зовнішнього спілкування математичної моделі (15) з відомими параметрами $q_1(t)=1$, $t\in(0,10)$, $q_{2j}=1$, $j=\overline{1,98}$, $\gamma_1(10)=1.25$, $\gamma_2(98)=1.5$.

Наведено алгоритми знаходження оптимальних за функціоналом та гарантованих оцінок нестаціонарних параметрів системи диференціальних рівнянь для різних видів спостережень. Розглянуто приклад знаходження оптимальної за функціоналом оцінки параметрів. Представлено результати чисельного експерименту для задачі оцінки параметрів математичної моделі поширення інформації одного виду в соціумі, які дають змогу зробити висновок про практичну важливість застосування цього підходу, зокрема, до задач прогнозування динаміки систем з невідомими параметрами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Київ: Наук. думка, 2006. 264 с.
2. Губарев В.Ф., Дарьин А.Н., Лысюченко И.А. Нелинейный оцениватель состояния по данным на скользящем интервале и возможность его применения в задаче ориентации космического аппарата. *Проблемы управления и информатики.* 2011. № 1. С. 118–132.
3. Gubarev V.F., Shevchenko V.N., Gummel A.V. State estimation for systems subjected to bounded uncertainty using moving horizon approach. Prep. of the 15th IFAC Symposium on system identification. Saint-Malo (France), 6–8 July. 2009. P. 910–915.
4. Наконечний О.Г. Оцінювання параметрів в умовах невизначеності. *Наукові записки Київського національного університету, факультет кібернетики*. 2004. Т. VII. С. 102–111.
5. Наконечний О.Г. Задачі гарантованого оцінювання параметрів в динаміці. *Тези XVII Міжнародної конференції «Problem of decision making under uncertainties»* (Східниця (Україна), 23–27 травня 2011 р.). 2011. P. 141.
6. Экланд Н., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. Москва: Мир, 1979. 400 с.
7. Mikhailov A.P., Petrov A.P., Proncheva O.G., Marevtseva N.A. Mathematical modeling of information warfare in a society. *Mediterranean Journal of Social Sciences*. 2015. Vol. 6, N 5. P. 27–35. DOI: 10.5901/mjss.2015.v6n5s2p27.
8. Михайлов А.П., Петров А.П., Маревцева Н.А., Третьякова И.В. Развитие модели распространения информации в социуме. *Математическое моделирование*. 2014. № 3 (26). С. 65–74.
9. Наконечний О.Г., Зінько П.М. Задачі протиборства в системах з динамікою Гомперца. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2015. № 3 (120). С. 50–60.
10. Наконечний О.Г., Шевчук Ю.М. Математична модель розповсюдження інформації з нестаціонарними параметрами. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фіз.-мат. науки*. 2016. № 3. С. 98–105.

Надійшла до редакції 26.02.2018

А.Г. Наконечный, Ю.М Шевчук, В.К. Чикрий

ОЦЕНКА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Аннотация. Представлен алгоритм нахождения оптимальных по функционалу и гарантированных оценок нестационарных параметров систем дифференциальных уравнений. Полученные результаты распространены на случай дискретных наблюдений для систем дифференциальных уравнений. В качестве примера представлены результаты оценки параметров для математической модели распространения информации одного вида в социуме.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, нестационарные параметры, оптимальные по функционалу оценки, гарантированные оценки, неопределенность.

O.G. Nakonechnyi, Iu.M. Shevchuk, V.K. Chikrii

ESTIMATION OF NONSTATIONARY PARAMETERS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS UNDER UNCERTAINTY

Abstract. The algorithms of constructing optimal functional estimates and guaranteed estimates of nonstationary parameters of differential equations are proposed. The results are generalized to discrete-time models. These algorithms can be used to predict the dynamics of systems of differential equations. The results of a numerical experiment for the problem of constructing guaranteed estimates for the mathematical model of propagation of one type of information are considered.

Keywords: differential equations, nonstationary parameters, optimal functional estimation, guaranteed estimation, uncertainty.

Наконечний Олександр Григорович,
доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: a.nakonechniy@gmail.com.

Шевчук Юлія Михайлівна,
аспірантка Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: nysya@hotmail.com.

Чикрій Вікторія Кирилівна,
студентка Київського національного університету імені Тараса Шевченка.