УДК 519.21

Ю.В. ЖЕРНОВИЙ

ОБЧИСЛЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОКАНАЛЬНИХ СИСТЕМ ОБСЛУГОВУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ РОЗПОДІЛІВ ФАЗОВОГО ТИПУ

Анотація. Здійснено аналіз результатів застосування гіперекспоненціальної і ерлангівської апроксимацій з параметрами парадоксального і комплексного типу для обчислення методом фіктивних фаз стаціонарних характеристик систем обслуговування типу $G/G/1/m$. Результати верифіковано за допомогою імітаційних моделей.

Ключові слова: немарковська система обслуговування, гіперекспоненціальний розподіл, узагальнений розподіл Ерланга, комплексні і парадоксальні параметри розподілу, апроксимація.

ВСТУП

Для дослідження немарковських процесів надходження і обслуговування замовлень в системах масового обслуговування часто застосовують розподіли фазового типу у вигляді взаємозв'язаних паралельно-послідовних комбінацій фаз проходження замовлень з показниково розподіленими тривалостями затримок у них. У разі фіксації номера фази надходження або обслуговування замовлень стани системи володіють марковською властивістю, що дає змогу зобразити переходи між ними у вигляді дискретного марковського процесу з неперервним часом. Ідея методу фіктивних фаз була висунута ще А.К. Ерлангом. Порядком апроксимації природно вважати кількість збережених початкових моментів вихідного розподілу.

Найзагальнішою формою зображення фазових розподілів є схема Н'ютса [1], в якій тривалість кожної реалізації процесу відповідає випадковому часу блукання в мережі з показниковою затримкою в кожному вузлі та одним поглинаючим станом. У разі застосування схеми Н'ютса обчислення стаціонарних характеристик системи обслуговування здійснюється в термінах кронекерових матричних операцій, числова реалізація яких є вкрай неефективною [2]. Тому для апроксимації розподілів з коефіцієнтом варіації $V>1$ зазвичай використовують гіперекспоненціальну (H_k) апроксимацію, а у всіх інших випадках — ерлангівську (E_k). Параметри апроксимації вважають дійсними.

Останнім часом зростає інтерес до гіперекспоненціального розподілу, застосування якого показало високу ефективність для розв'язання задач підсумовування рекурентних потоків [3], обчислення характеристик систем обслуговування з «нетерплячими» замовленнями [4], джексонівських мереж масового обслуговування [5], а також для аналізу систем керування запасами [6].

У статті [2] наведено результати застосування гіперекспоненціального розподілу другого порядку (H_2) для обчислення стаціонарних характеристик систем обслуговування типу $M/G/1/\infty$ методом фіктивних фаз. Автори допускають використання H_2-розподілів з параметрами парадоксального або комплексного типу, що дає змогу апроксимувати час обслуговування з довільним (зокрема, меншим за одиницю) коефіцієнтом варіації. У статті відзначено, що під час розрахунку систем обслуговування із застосуванням H_2-апроксимації в області комплексних значень її параметрів потенційна патологія проявляється лише в проміжних результатах — імовірностях «фіктивних» мікростанів діаграми переходів, на які розщеплюються «фізичні» стани системи. На етапі підсумовування ймовірностей мікростанів їхні комплексні частини анігілюються і компоненти результату обчислень — імовірності кількості замовлень у системі — стають дійсними. Однак особливості апроксимації з використанням H_k-розподілів порядку $k>2$, а також узагальнених розподілів Ерланга (E_k) з парадоксальними та комплексними параметрами для розрахунку систем типу $G/\ G/n/m$ з кількістю каналів $n\geq 1$ залишаються недослідженими.

Комплексний або парадоксальний тип параметрів H_k- і E_k-розподілів підкреслює фіктивний характер розщеплення процесу на фази. Допустимість комплексних параметрів для дослідження випадкових процесів була вперше відзначена Д. Коксом у 1955 р. [7]. У роботі [8] автори спробували дати ймовірнісну інтерпретацію комплексних інтенсивностей переходів між станами ланцюга Маркова.

У статті наведено аналіз результатів застосування H_k- і E_k-розподілів порядку k $(2\leq k\leq 6)$ з парадоксальними та комплексними параметрами для обчислення методом фіктивних фаз стаціонарних характеристик систем обслуговування типу $G/\ G/1/m$.

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ H_k- ТА E_k-РОЗПОДІЛІВ

Гіперекспоненціальний розподіл порядку k є розподілом фазового типу і передбачає вибір випадковим процесом однієї з k альтернативних фаз. З імовірністю y_i процес потрапляє в i-у фазу і перебуває у ній протягом часу, розподіленого за показниковим законом з параметром θ_i. Для узагальненого ерлангівського розподілу порядку k процес послідовно проходить k фаз, тривалості яких розподілені за показниковими законами з параметрами $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ відповідно.

Враховуючи, що для обох розподілів функція розподілу є лінійною комбінацією експонент

$$F_{E_k}(t)=1-(-1)^{k-1}\prod_{i=1}^{k}\theta_i\sum_{j=1}^{k}\frac{e^{-\theta_j t}}{\theta_j\prod_{s\neq j}^{k}(\theta_j-\theta_s)},\quad t>0,$$

$$F_{H_k}(t)=1-\sum_{j=1}^{k}y_j e^{-\theta_j t},\quad t>0,$$

можна отримати зображення будь-якого E_k-розподілу з параметрами (інтенсивностями) $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ з використанням H_k-розподілу з тими самими інтенсивностями і псевдоймовірностями (парадоксальними ймовірностями), які визначаються у вигляді

$$y_j=(-1)^{k-1}\prod_{i=1}^{k}\theta_i\frac{1}{\theta_j\prod_{s\neq j}^{k}(\theta_j-\theta_s)},\qquad 1\leq j\leq k. \tag{1}$$

Сталі y_j ми називаємо «псевдоймовірностями», оскільки вони задовольняють умову нормування $\sum_{j=1}^{k}y_j=1$, але не всі вони належать проміжку $[0,1]$. Обчислення показують, що в задачі визначення стаціонарних характеристик будь-якої системи обслуговування з E_k-розподілами часу обслуговування та (або) інтервалів між моментами надходження замовлень заміна E_k-розподілу на H_k-розподіл з тими самими параметрами і псевдоймовірностями вигляду (1) не впливає на отримані результати.

Апроксимація довільного розподілу для немарковської системи обслуговування розподілом фазового типу за допомогою методу моментів у більшості випадків призводить до того, що параметри апроксимувального розподілу є парадоксальними (тобто від'ємними або з імовірностями, які виходять за межі проміжку [0; 1]) або комплексними.

Система рівнянь методу моментів для H_k-апроксимації має вигляд

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{y_j}{\theta_j^i} = f_i, \qquad 0 \le i \le 2k-1, \tag{2}$$

де $f_i = \widetilde{f}_i / i!$, $\widetilde{f}_i$ — початковий момент порядку i вихідного розподілу. Для з'ясування структури системи рівнянь методу моментів у випадку E_k-апроксимації наведемо рівняння для $k=2$

$$\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} = f_1, \qquad \frac{1}{\theta_1^2} + \frac{1}{\theta_2^2} + \frac{1}{\theta_1 \theta_2} = f_2 \tag{3}$$

і $k=3$

$$\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3} = f_1, \qquad \frac{1}{\theta_1^2} + \frac{1}{\theta_2^2} + \frac{1}{\theta_3^2} + \frac{1}{\theta_1\theta_2} + \frac{1}{\theta_1\theta_3} + \frac{1}{\theta_2\theta_3} = f_2,$$

$$\frac{1}{\theta_1^3} + \frac{1}{\theta_2^3} + \frac{1}{\theta_3^3} + \frac{1}{\theta_1\theta_2\theta_3} + \frac{1}{\theta_1^2\theta_2} + \frac{1}{\theta_1^2\theta_3} + \frac{1}{\theta_2^2\theta_3} + \frac{1}{\theta_2^2\theta_1} + \frac{1}{\theta_3^2\theta_1} + \frac{1}{\theta_3^2\theta_2} = f_3 .$$

Отже, початкові моменти H_k-розподілу обчислюються за простішими формулами, ніж моменти E_k-розподілу, і дають змогу вирівнювати $2k-1$ моментів під час апроксимації довільного розподілу (для E_k-розподілу можна вирівняти лише k моментів), тому апроксимація за допомогою H_k-розподілу значно ефективніша.

Розв'язки системи рівнянь (3) можна виразити через коефіцієнт варіації V вихідного розподілу:

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{\widetilde{f}_1 (V^2 - 1)} \left(-1 \pm \sqrt{2V^2 - 1} \right).$$

Отже, параметри θ_1, θ_2 E_2-апроксимації є комплексними для $0 \le V < 1/\sqrt{2}$, додатними для $1/\sqrt{2} < V < 1$ і мають різні знаки для $V > 1$. Розв'язування системи рівнянь методу моментів у випадку E_k-апроксимації для значень $k \ge 3$ на прикладах вихідних двопараметричних гамма-розподілів і розподілів Вейбулла з різними коефіцієнтами варіації не виявило таких значень V, для яких всі параметри θ_i є додатними.

Розв'язування системи рівнянь (2) для $k \ge 2$ на прикладах вихідних гамма-розподілів і розподілів Вейбулла з різними коефіцієнтами варіації дало змогу з'ясувати, що параметри H_k-апроксимації є комплексними для $0 < V < a_k < 1$, додатними з парадоксальними ймовірностями y_i для $a_k < V < 1$ і додатними з реальними ймовірностями y_i для $V > 1$. Для гамма-розподілів $a_k = 1/\sqrt{2}$, а для розподілів Вейбулла сталі a_k є близькими до одиниці, їхні значення залежать від $\widetilde{f}_1$, і інтервал $(a_k, 1)$ звужується зі зростанням k.

Для з'ясування особливостей застосування H_k- і E_k-розподілів під час обчислення стаціонарних характеристик систем обслуговування типу G/G/1/m методом фіктивних фаз використовуватимемо такі розподіли:

1) для інтервалів між замовленнями у вхідному потоці (середнє значення 1,25): U_1 — рівномірний на проміжку [0,25; 2,25] (коефіцієнт варіації $V \approx 0{,}462$); $\Gamma_1(1{,}5)$ — гамма з параметром форми 1,5 ($V \approx 0{,}816$); $\Gamma_1(0{,}5)$ — гамма з параметром форми 0,5 ($V \approx 1{,}414$); D_1 — вироджений зі сталим значенням 1,25 ($V = 0$);

2) для часу обслуговування (середнє значення 1): U_2 — рівномірний на проміжку [0; 2] (коефіцієнт варіації $V \approx 0{,}577$); $\Gamma_2(1{,}5)$ — гамма з параметром форми 1,5 ($V \approx 0{,}816$); $\Gamma_2(0{,}5)$ — гамма з параметром форми 0,5 ($V \approx 1{,}414$); D_2 — вироджений зі сталим значенням 1 $(V = 0)$.

Для параметрів H_k- і E_k-розподілів, які використовуватимемо для апроксимації розподілів інтервалів між замовленнями та часу обслуговування, введемо позначення: $\theta_i = \lambda_i$, $y_i = \alpha_i$ і $\theta_i = \mu_i$, $y_i = \beta_i$ відповідно.

Нижче наведемо значення параметрів H_k- і E_k-розподілів, отримані в результаті розв'язання системи рівнянь методу моментів під час апроксимації вихідних розподілів:

розподіл U_1:

E_2: $\lambda_{1,2} = 1{,}017 \pm 0{,}770i$;

E_4: $\lambda_{1,2} = 1{,}348 \pm 1{,}390i$, $\lambda_3 = -17{,}362$, $\lambda_4 = 1{,}700$;

E_5: $\lambda_{1,2} = 1{,}582 \pm 1{,}601i$, $\lambda_3 = 2{,}179$, $\lambda_4 = -6{,}450$, $\lambda_5 = 3{,}109$;

H_2: $\lambda_{1,2} = 1{,}408 \pm 0{,}822i$, $\alpha_{1,2} = 0{,}5 \pm 1{,}164i$;

H_3: $\lambda_{1,2} = 1{,}618 \pm 1{,}506i$, $\lambda_3 = 2{,}005$, $\alpha_{1,2} = -0{,}819 \pm 0{,}774i$, $\alpha_3 = 2{,}638$;

H_4: $\lambda_{1,2} = 1{,}839 \pm 2{,}357i$, $\lambda_{3,4} = 2{,}565 \pm 0{,}777i$, $\alpha_{1,2} = -0{,}629 \mp 0{,}943i$,
$\alpha_{3,4} = 1{,}129 \pm 5{,}548i$;

H_5: $\lambda_{1,2} = 2{,}107 \pm 3{,}225i$, $\lambda_{3,4} = 3{,}026 \pm 1{,}567i$, $\lambda_5 = 3{,}286$,
$\alpha_{1,2} = 1{,}310 \mp 0{,}458i$, $\alpha_{3,4} = -10{,}118 \pm 2{,}541i$, $\alpha_5 = 18{,}616$;

розподіл $\Gamma_1(1{,}5)$:

E_4: $\lambda_{1,2} = -3{,}145 \pm 5{,}512i$, $\lambda_3 = 1{,}110$, $\lambda_4 = 1{,}979$;

E_5: $\lambda_{1,2} = -0{,}062 \pm 4{,}521i$, $\lambda_3 = 1{,}777$, $\lambda_4 = 1{,}128$, $\lambda_5 = -5{,}181$;

H_5: $\lambda_1 = 12{,}316$, $\lambda_2 = 3{,}404$, $\lambda_3 = 1{,}797$, $\lambda_4 = 1{,}300$, $\lambda_5 = 1{,}183$,
$\alpha_1 = -0{,}022$, $\alpha_2 = -0{,}111$, $\alpha_3 = -0{,}414$, $\alpha_4 = -2{,}721$, $\alpha_5 = 4{,}268$;

розподіл $\Gamma_1(0{,}5)$:

E_2: $\lambda_1 = -2{,}186$, $\lambda_2 = 0{,}586$;

E_4: $\lambda_{1,2} = 0{,}028 \pm 1{,}063i$, $\lambda_3 = -1{,}185$, $\lambda_4 = 0{,}489$;

H_5: $\lambda_1 = 0{,}8, \lambda_2 = 1{,}941$, $\lambda_3 = 0{,}504$, $\lambda_4 = 16{,}345, \lambda_5 = 0{,}410$; $\alpha_i = 0{,}2$, $1 \le i \le 5$;

розподіл D_1:

E_4: $\lambda_{1,2} = 0{,}216 \pm 2{,}004i$, $\lambda_{3,4} = 1{,}384 \pm 0{,}711i$;

E_5: $\lambda_{1,2} = 1{,}320 \pm 1{,}355i$, $\lambda_{3,4} = -0{,}192 \pm 2{,}503i$, $\lambda_5 = 1{,}744$;

H_5: $\lambda_{1,2} = 2{,}925 \pm 5{,}235i$, $\lambda_{3,4} = 4{,}561 \pm 2{,}568i$, $\lambda_5 = 5{,}029$,
$\alpha_{1,2} = 3{,}840 \mp 0{,}274i$, $\alpha_{3,4} = -25{,}079 \pm 2{,}187i$, $\alpha_5 = 43{,}480$;

H_6: $\lambda_{1,2} = 3{,}231 \pm 6{,}676i$, $\lambda_{3,4} = 5{,}176 \pm 3{,}920i$, $\lambda_{5,6} = 5{,}992 \pm 1{,}297i$,
$\alpha_{1,2} = -0{,}684 \pm 4{,}883i$, $\alpha_{3,4} = -0{,}491 \mp 46{,}781i$, $\alpha_{5,6} = 1{,}674 \pm 122{,}163i$;

розподіл U_2:

E_2: $\mu_{1,2} = 1{,}5 \pm 0{,}866i$;

E_4: $\mu_{1,2} = 1{,}562 \pm 1{,}464i$, $\mu_3 = 1{,}939$, $\mu_4 = -5{,}064$;

H_2: $\mu_{1,2} = 1{,}5 \pm 0{,}866i$, $\beta_{1,2} = 0{,}5 \pm 0{,}866i$;

H_3: $\mu_{1,2} = 1{,}839 \pm 1{,}754i$, $\mu_3 = 2{,}322$, $\beta_{1,2} = -0{,}826 \pm 0{,}604i$, $\beta_3 = 2{,}652$;

H_4: $\mu_{1,2} = 2{,}104 \pm 2{,}657i$, $\mu_{3,4} = 2{,}896 \pm 0{,}867i$, $\beta_{1,2} = -0{,}589 \mp 0{,}897i$,
$\beta_{3,4} = 1{,}089 \pm 4{,}956i$;

H_5: $\mu_{1,2} = 2{,}325 \pm 3{,}571i$, $\mu_{3,4} = 3{,}352 \pm 1{,}743i$, $\mu_5 = 3{,}647$,
$\beta_{1,2} = 1{,}028 \mp 0{,}494i$, $\beta_{3,4} = -8{,}151 \pm 2{,}371i$, $\beta_5 = 15{,}245$;

розподіл $\Gamma_2(1,5)$:

E_5: $\mu_{1,2}=0{,}078\pm 5{,}651i$, $\mu_3=2{,}221$, $\mu_4=1{,}410$, $\mu_5=-6{,}476$;

H_5: $\mu_1=15{,}396$, $\mu_2=4{,}255$, $\mu_3=2{,}246$, $\mu_4=1{,}625$, $\mu_5=1{,}478$,
$\beta_1=-0{,}022$, $\beta_2=-0{,}111$, $\beta_3=-0{,}414$, $\beta_4=-2{,}721$, $\beta_5=4{,}268$;

H_6: $\mu_1=22{,}082$, $\mu_2=5{,}917$, $\mu_3=2{,}958$, $\mu_4=1{,}972$, $\mu_5=1{,}585$, $\mu_6=1{,}485$,
$\beta_1=-0{,}012$, $\beta_2=-0{,}057$, $\beta_3=-0{,}174$, $\beta_4=-0{,}545$, $\beta_5=-3{,}323$,
$\beta_6=5{,}111$;

розподіл $\Gamma_2(0,5)$:

E_2: $\mu_1=-2{,}732$, $\mu_2=0{,}732$;

E_4: $\mu_{1,2}=0{,}035\pm 1{,}329i$, $\mu_3=-1{,}481$, $\mu_4=0{,}611$;

H_5: $\mu_1=1$, $\mu_2=2{,}426$, $\mu_3=0{,}630$, $\mu_4=20{,}432$, $\mu_5=0{,}513$,
$\alpha_i=0{,}2$, $1\le i\le 5$;

H_6: $\mu_1=3{,}414$, $\mu_2=0{,}586$, $\mu_3=1{,}349$, $\mu_4=0{,}794$, $\mu_5=29{,}348$,
$\mu_6=0{,}509$, $\alpha_i=1/6$, $1\le i\le 6$;

розподіл D_2:

E_2: $\mu_{1,2}=0{,}5(1\pm i)$;

E_4: $\mu_{1,2}=0{,}271\pm 2{,}505i$, $\mu_{3,4}=1{,}729\pm 0{,}889i$;

H_5: $\mu_{1,2}=3{,}656\pm 6{,}544i$, $\mu_{3,4}=5{,}701\pm 3{,}210i$, $\mu_5=6{,}287$,
$\beta_{1,2}=3{,}840\mp 0{,}274i$, $\beta_{3,4}=-25{,}079\pm 2{,}187i$, $\beta_5=43{,}480$;

H_6: $\mu_{1,2}=4{,}039\pm 8{,}346i$, $\mu_{3,4}=6{,}471\pm 4{,}900i$, $\mu_{5,6}=7{,}491\pm 1{,}622i$,
$\beta_{1,2}=-0{,}684\pm 4{,}883i$, $\beta_{3,4}=-0{,}491\mp 46{,}781i$, $\beta_{5,6}=1{,}674\pm 122{,}163i$.

Таблиця 1. Стаціонарні характеристики системи $U_1/U_2/1/15$

Стаціонарна характеристика	Значення стаціонарних характеристик, обчислених вказаними способами							
	E_2 / E_2	H_2 / H_2	E_4 / E_4	E_5 / E_4	H_3 / H_3	H_4 / H_4	H_5 / H_5	GPSS, середнє значення
p_0	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000
p_1	0,3565	0,3730	0,3776	0,3799	0,3793	0,3789	0,3789	0,3789
p_2	0,2251	0,2354	0,2362	0,2347	0,2359	0,2360	0,2360	0,2360
p_3	0,1164	0,1127	0,1079	0,1072	0,1066	0,1067	0,1067	0,1067
p_4	0,0556	0,0480	0,0455	0,0453	0,0451	0,0452	0,0452	0,0452
p_5	0,0256	0,0192	0,0190	0,0190	0,0191	0,0191	0,0191	0,0191
p_6	0,0116	0,0073	0,0080	0,0080	0,0081	0,0081	0,0081	0,0081
p_7	0,0052	0,0027	0,0034	0,0034	0,0034	0,0034	0,0034	0,0034
p_8	0,0023	0,0010	0,0014	0,0015	0,0015	0,0015	0,0015	0,0015
p_9	0,0010	0,0004	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006
p_{10}	0,0004	0,0001	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
p_{11}	0,0002	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
p_{12}	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
p_{13}	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
p_{14}	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
p_{15}	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
p_{16}	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
N	1,6459	1,5464	1,5440	1,5409	1,5411	1,5421	1,5421	1,5423
Δ_p, $\Delta_p^{(sim)}$	0,0666	0,0178	0,0033	0,0031	0,0008	0,0002	0,0002	0,0011

Ми навели параметри лише тих H_k- і E_k-розподілів, з використанням яких отримано результати, представлені в табл. 1 і 2.

З метою оцінки якості H_k-апроксимації розглянемо величини

$$\Delta_{ki} = \left| \sum_{j=1}^{k} \frac{y_j}{\theta_j^i} - f_i \right|, \quad \delta_{kn} = \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta_{ki} \Big/ \sum_{i=1}^{n} f_i \right) 100\%.$$

Очевидно, що $\Delta_{ki} = 0$ для $0 \le i \le 2k-1$, а за допомогою δ_{kn} можна оцінити у відсотках відносну похибку H_k-апроксимації, якщо розглядати перші n початкових моментів вихідного розподілу. Значення δ_{kn} для $k = 2$; 3; 4; 5; $n = 10$; 100 наведено у табл. 3.

Т а б л и ц я 2. Результати обчислення стаціонарних характеристик систем з різними розподілами

<table>
<tr><th rowspan="3">Найменування характеристики</th><th colspan="7">Найменування системи, спосіб обчислення</th></tr>
<tr><th colspan="3">$U_1 / \Gamma_2(1{,}5) / 1 / 15$</th><th colspan="4">$U_1 / \Gamma_2(0{,}5) / 1 / 15$</th></tr>
<tr><th>E_5 / E_5</th><th>H_5 / H_5</th><th>GPSS</th><th colspan="2">E_2 / E_2</th><th>H_5 / H_5</th><th>GPSS</th></tr>
<tr><td>N</td><td>2,0545</td><td>2,0550</td><td>2,0529</td><td colspan="2">3,8882</td><td>3,6646</td><td>3,6634</td></tr>
<tr><td>Δ_p, $\Delta_p^{(sim)}$</td><td>0,0009</td><td>0,0005</td><td>0,0015</td><td colspan="2">0,0570</td><td>0,0008</td><td>0,0022</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><th colspan="3">$\Gamma_1(1{,}5) / U_2 / 1 / 15$</th><th colspan="4">$\Gamma_1(1{,}5) / \Gamma_2(1{,}5) / 1 / 15$</th></tr>
<tr><th>E_4 / E_4</th><th>H_5 / H_5</th><th>GPSS</th><th colspan="2">E_5 / E_5</th><th>H_5 / H_5</th><th>GPSS</th></tr>
<tr><td>N</td><td>2,3159</td><td>2,3155</td><td>2,3131</td><td colspan="2">2,7865</td><td>2,7877</td><td>2,7873</td></tr>
<tr><td>Δ_p, $\Delta_p^{(sim)}$</td><td>0,0020</td><td>0,0009</td><td>0,0012</td><td colspan="2">0,0014</td><td>0,0004</td><td>0,0015</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><th colspan="3">$\Gamma_1(0{,}5) / \Gamma_2(0{,}5) / 1 / 15$</th><th colspan="4">$U_1 / D_2 / 1 / 15$</th></tr>
<tr><th>E_4 / E_4</th><th>H_5 / H_5</th><th>GPSS</th><th colspan="2">H_5 / H_5</th><th>H_6 / H_6</th><th>GPSS</th></tr>
<tr><td>N</td><td>4,8348</td><td>4,8516</td><td>4,8490</td><td colspan="2">1,1258</td><td>1,1250</td><td>1,1236</td></tr>
<tr><td>Δ_p, $\Delta_p^{(sim)}$</td><td>0,0417</td><td>0,0009</td><td>0,0021</td><td colspan="2">0,0040</td><td>0,0028</td><td>0,0006</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><th colspan="3">$\Gamma_1(1{,}5) / D_2 / 1 / 15$</th><th colspan="4">$\Gamma_1(0{,}5) / D_2 / 1 / 15$</th></tr>
<tr><th>E_5 / E_4</th><th>H_5 / H_5</th><th>GPSS</th><th colspan="2">E_2 / E_2</th><th>H_5 / H_5</th><th>GPSS</th></tr>
<tr><td>N</td><td>1,8107</td><td>1,8100</td><td>1,8099</td><td colspan="2">4,9606</td><td>3,7329</td><td>3,7304</td></tr>
<tr><td>Δ_p, $\Delta_p^{(sim)}$</td><td>0,0091</td><td>0,0001</td><td>0,0008</td><td colspan="2">0,4275</td><td>0,0007</td><td>0,0016</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><th colspan="3">$\Gamma_1(1{,}5) / \Gamma_2(0{,}5) / 1 / 15$</th><th colspan="4">$D_1 / U_2 / 1 / 15$</th></tr>
<tr><th colspan="2">H_5 / H_5</th><th>GPSS</th><th>E_5 / E_4</th><th>H_5 / H_5</th><th>H_6 / H_6</th><th>GPSS</th></tr>
<tr><td>N</td><td colspan="2">4,0928</td><td>4,0920</td><td>1,1185</td><td>1,1216</td><td>1,1232</td><td>1,1237</td></tr>
<tr><td>Δ_p, $\Delta_p^{(sim)}$</td><td colspan="2">0,0004</td><td>0,0020</td><td>0,0208</td><td>0,0058</td><td>0,0034</td><td>0,0007</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><th colspan="3">$\Gamma_1(0{,}5) / U_2 / 1 / 15$</th><th colspan="4">$D_1 / \Gamma_2(1{,}5) / 1 / 15$</th></tr>
<tr><th colspan="2">H_5 / H_5</th><th>GPSS</th><th>E_5 / E_5</th><th>H_5 / H_5</th><th>H_6 / H_6</th><th>GPSS</th></tr>
<tr><td>N</td><td colspan="2">4,0213</td><td>4,0249</td><td>1,6512</td><td>1,6504</td><td>1,6505</td><td>1,6510</td></tr>
<tr><td>Δ_p, $\Delta_p^{(sim)}$</td><td colspan="2">0,0008</td><td>0,0015</td><td>0,0027</td><td>0,0035</td><td>0,0034</td><td>0,0010</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><th colspan="3">$\Gamma_1(0{,}5) / \Gamma_2(1{,}5) / 1 / 15$</th><th colspan="4">$D_1 / \Gamma_2(0{,}5) / 1 / 15$</th></tr>
<tr><th colspan="2">H_5 / H_5</th><th>GPSS</th><th>E_4 / E_2</th><th>H_5 / H_5</th><th>H_6 / H_6</th><th>GPSS</th></tr>
<tr><td>N</td><td colspan="2">4,2401</td><td>4,2388</td><td>3,3713</td><td>3,4054</td><td>3,4053</td><td>3,4061</td></tr>
<tr><td>Δ_p, $\Delta_p^{(sim)}$</td><td colspan="2">0,0006</td><td>0,0020</td><td>0,0424</td><td>0,0104</td><td>0,0104</td><td>0,0016</td></tr>
</table>

Таблиця 3. Відносна похибка апроксимації методом моментів для різних розподілів

n	δ_{kn} (%) для U_2				δ_{kn} (%) для U_1			
	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
10	9,05	0,23	$2{,}3\cdot10^{-3}$	$4{,}6\cdot10^{-6}$	11,45	0,53	$6{,}0\cdot10^{-3}$	$1{,}0\cdot10^{-5}$
100	8,86	0,25	$3{,}8\cdot10^{-3}$	$3{,}8\cdot10^{-5}$	11,11	0,63	0,01	$1{,}1\cdot10^{-4}$
n	δ_{kn} (%) для D_2				δ_{kn} (%) для D_1			
	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
10	3,02	0,03	$1{,}2\cdot10^{-4}$	$1{,}3\cdot10^{-7}$	7,07	0,10	$5{,}9\cdot10^{-4}$	$8{,}2\cdot10^{-7}$
100	3,00	0,03	$1{,}3\cdot10^{-4}$	$3{,}9\cdot10^{-7}$	6,96	0,10	$7{,}3\cdot10^{-4}$	$3{,}4\cdot10^{-6}$
n	δ_{kn} (%) для Γ_2 (1,5)				δ_{kn} (%) для Γ_2 (0,5)			
	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
10	1,78	0,04	$4{,}8\cdot10^{-4}$	$1{,}0\cdot10^{-6}$	34,22	3,60	0,12	$5{,}1\cdot10^{-4}$
100	3,27	0,17	0,01	$6{,}7\cdot10^{-4}$	100,00	99,38	90,51	69,59
n	δ_{kn} (%) для Γ_1 (1,5)				δ_{kn} (%) для Γ_1 (0,5)			
	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
10	4,28	0,12	$1{,}7\cdot10^{-3}$	$3{,}8\cdot10^{-6}$	36,80	4,07	0,14	$6{,}2\cdot10^{-4}$
100	31,96	2,85	0,39	0,06	100,00	99,40	90,62	69,80

Видно, що значення відносної похибки $\delta_{5,100}$ значно менші від 1% для всіх розподілів, крім $\Gamma_1(0{,}5)$ і $\Gamma_2(0{,}5)$, для яких $\delta_{5,100} \approx 70\%$. Причина в тому, що для цих розподілів значення f_{100} досягає 10^{38} і 10^{28} відповідно, але ця особливість не впливає на можливість обчислення з достатньою точністю стаціонарних характеристик систем обслуговування з такими розподілами.

ОБЧИСЛЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Вивчимо особливості H_k- і E_k-апроксимації з довільним типом параметрів на прикладі одноканальних систем обслуговування $G/G/1/m$ з обмеженням на довжину черги $m=15$. Відповідно до позначень, введених для розподілів, розглянемо такі системи:

$$U_1/U_2/1/15,\ U_1/\Gamma_2(1{,}5)/1/15,\ U_1/\Gamma_2(0{,}5)/1/15,\ \Gamma_1(1{,}5)/U_2/1/15,$$
$$\Gamma_1(0{,}5)/U_2/1/15,\ \Gamma_1(1{,}5)/\Gamma_2(1{,}5)/1/15,\ \Gamma_1(1{,}5)/\Gamma_2(0{,}5)/1/15,$$
$$\Gamma_1(0{,}5)/\Gamma_2(1{,}5)/1/15,\ \Gamma_1(0{,}5)/\Gamma_2(0{,}5)/1/15,\ D_1/\Gamma_2(1{,}5)/1/15,$$
$$D_1/\Gamma_2(0{,}5)/1/15,\ \Gamma_1(1{,}5)/D_2/1/15,\ \Gamma_1(0{,}5)/D_2/1/15,\ D_1/U_2/1/15,$$
$$U_1/D_2/1/15.$$

У табл. 1 наведено значення стаціонарних характеристик системи $U_1/U_2/1/15$, отримані методом фіктивних фаз в результаті застосування різних варіантів поєднань H_k- і E_k-апроксимацій для розподілів інтервалів між замовленнями та часу обслуговування. Усі ці апроксимації містять комплексні параметри. Зазначимо, що E_3- і E_5-апроксимації не існують для розподілу U_2, оскільки відповідні системи рівнянь методу моментів не мають достатньої кількості (відповідно три та п’ять) скінченних розв’язків.

Отримані значення тут верифікуються за допомогою імітаційних моделей системи $U_1/U_2/1/15$, побудованих шляхом використання інструментальних засобів GPSS World [9]. Результати, одержані за допомогою GPSS World, навіть для великих значень часу моделювання ($t=10^7$) незначно відрізняються один від одного для різних номерів бібліотечних генераторів випадкових чисел, які застосовуються для моделювання випадкових величин — інтервалів між замовленнями та часу обслуговування. Тому в останньому стовпці табл. 1 наведено середні значення кожної характеристики, отримані за допомогою десяти імітаційних моделей з різними значеннями номерів генераторів випадкових чисел, які набувають значень натуральних чисел від одиниці до десяти.

Введемо позначення для стаціонарних характеристик систем обслуговування, які використовуються в табл. 1 і 2: p_j — ймовірність наявності у системі j замовлень, N — середня кількість замовлень у системі,

$$\Delta_p = \sum_{j=0}^{16} | \widetilde{p}_j - p_j^{(sim)} |, \quad \Delta_p^{(sim)} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \Delta_p^{(sim(i))} ;$$

$$\Delta_p^{(sim(i))} = \sum_{j=0}^{16} | p_j^{(sim(i))} - p_j^{(sim)} | , \; 1 \le i \le 10 ;$$

$$p_j^{(sim)} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} p_j^{(sim(i))}, \quad 0 \le j \le 16 .$$

Тут $p_j^{(sim(i))}$ і $\widetilde{p}_j$ — це значення ймовірностей p_j, отримані за допомогою імітаційної моделі з використанням генератора випадкових чисел номер i та H_k- або E_k-апроксимацій відповідно, $p_j^{(sim)}$ — середнє значення ймовірностей $p_j^{(sim(i))}$ для $1 \le i \le 10$. Отже, величини Δ_p і $\Delta_p^{(sim(i))}$ є мірами відхилення розподілів $\widetilde{p}_j$ і $p_j^{(sim(i))}$ відповідно від усередненого розподілу $p_j^{(sim)}$, який вважаємо еталонним, а $\Delta_p^{(sim)}$ — це середнє значення відхилень $\Delta_p^{(sim(i))}$ для $1 \le i \le 10$.

У табл. 1 найменшого значення 0,002 величина Δ_p набуває для апроксимацій вигляду H_4 / H_4 і H_5 / H_5, причому в цих випадках $\Delta_p < \Delta_p^{(sim)}$. З точністю до 10^{-4}, яку ми розглядаємо в табл. 1, значення стаціонарних характеристик, одержані за допомогою цих апроксимацій і GPSS World, збігаються.

Для всіх інших систем обслуговування, які ми розглядаємо, в табл. 2 подано значення стаціонарної характеристики N і величин Δ_p, $\Delta_p^{(sim)}$, отримані у результаті використання тих поєднань апроксимацій E_k / E_k і H_k / H_k, для яких вдається досягти найменших значень Δ_p. Загалом ми обмежуємось апроксимаціями 5-го порядку, але для тих систем, для яких $\Delta_p > 0{,}001$ і $\Delta_p > \Delta_p^{(sim)}$ (систем $D_1 / U_2 / 1/15$, $U_1 / D_2 / 1/15$, $D_1 / \Gamma_2 (1{,}5) / 1/15$ і $D_1 / \Gamma_2 (0{,}5) / 1/15$, в яких присутні вироджені розподіли з коефіцієнтом варіації $V = 0$) використовуємо також апроксимації вигляду H_6 / H_6. Для систем $D_1 / \Gamma_2 (1{,}5) / 1/15$ і $D_1 / \Gamma_2 (0{,}5) / 1/15$ застосування апроксимацій H_6 / H_6 не призводить до зменшення величини Δ_p у порівнянні з випадком застосування апроксимацій H_5 / H_5.

Для всіх систем крім $D_1 / U_2 / 1/15$, $U_1 / D_2 / 1/15$, $D_1 / \Gamma_2 (1{,}5) / 1/15$ і $D_1 / \Gamma_2 (0{,}5) / 1/15$, виконуються нерівності $\Delta_p < 0{,}001$ і $\Delta_p < \Delta_p^{(sim)}$. Отже, відхилення стаціонарного розподілу $\widetilde{p}_j$ $(0 \le j \le 16)$ від еталонного є меншим, ніж середнє відхилення від еталонного для розподілів $p_j^{(sim(i))}$ $(0 \le j \le 16)$ для $1 \le i \le 10$.

Для систем $U_1 / \Gamma_2 (1{,}5) / 1/15$, $\Gamma_1 (1{,}5) / \Gamma_2 (1{,}5) / 1/15$, $\Gamma_1 (0{,}5) / \Gamma_2 (1{,}5) / 1/15$, $D_1 / \Gamma_2 (1{,}5) / 1/15$, $\Gamma_1 (1{,}5) / D_2 / 1/15$ і $\Gamma_1 (0{,}5) / D_2 / 1/15$ застосування деяких поєднань апроксимацій типу H_k / H_k $(k < 5)$ призводить до парадоксальних або комплексних значень характеристик, але в результаті застосування апроксимацій H_5 / H_5 для всіх систем отримуємо реальні значення стаціонарних імовірностей.

Для систем типу $M/G/1/\infty$ з найпростішим вхідним потоком існують відомі формули для стаціонарних значень середньої довжини черги і середньої кількості замовлень у системі. Одержані за допомогою цих формул значення можна використати для верифікації наближених обчислень. Застосування методу фіктивних фаз для обчислення стаціонарних характеристик систем $M/U_2/1/\infty$, $M/\Gamma_2(1{,}5)/1/\infty$, $M/\Gamma_2(0{,}5)/1/\infty$ і $M/D_2/1/\infty$ показало, що достатньо використати H_2-апроксимацію для досягнення високої точності визначення усередненої характеристики N, на відміну від систем типу $G/G/1/m$, для яких, як ми з'ясували, потрібно використовувати H_k-апроксимації як мінімум п'ятого або шостого порядку.

ВИСНОВКИ

Застосування гіперекспоненціальної апроксимації, а в окремих випадках і апроксимації за допомогою узагальненого закону Ерланга, дає змогу з високою точністю визначати стаціонарні характеристики немарковських систем обслуговування з довільними коефіцієнтами варіації часу обслуговування та інтервалів між замовленнями вхідного потоку. За умови застосування H_k-апроксимації порядку $k \geq 5$, а в більшості випадків і H_k- та E_k-апроксимацій нижчих порядків, комплексні і парадоксальні значення параметрів розподілів H_k та E_k не впливають на кінцевий результат, оскільки під час підсумовування ймовірностей мікростанів щаблів діаграми апроксимувальної системи їхні комплексні і парадоксальні частини анігілюються. Для перевірки достовірності отриманого в результаті застосування апроксимації стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі потрібно його зіставити з результатами, одержаними альтернативними методами, зокрема за допомогою імітаційного моделювання. У більшості випадків (крім систем з виродженими розподілами) є підстави вважати наближені результати, одержані шляхом застосування H_k-апроксимації, більш точними, ніж результати застосування окремої імітаційної моделі з конкретними значеннями номерів генераторів випадкових чисел.

Оскільки будь-який розподіл E_k можна зобразити як розподіл H_k з псевдоймовірностями і тими самими параметрами-інтенсивностями, визначення стаціонарних характеристик систем обслуговування типів $E_r/E_s/n/m$, $G/E_s/n/m$ і $E_r/G/n/m$ можна звести до розгляду систем $H_r/H_s/n/m$, $G/H_s/n/m$ і $H_r/G/n/m$ відповідно.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Neuts M.F. Matrix-geometric solutions in stochastic models. Baltimore: The John's Hopkins University Press, 1981. 390 p.
2. Рыжиков Ю.И., Уланов А.В. Применение гиперэкспоненциальной аппроксимации в задачах расчета немарковских систем массового обслуживания. Вестник Томского государственного университета. *Управление, вычислительная техника и информатика.* 2016. № 3 (36). С. 60–65.
3. Рыжиков Ю.И., Уланов А.В. Применение гиперэкспоненциальной аппроксимации в задачах суммирования потоков. *Интеллектуальные технологии на транспорте.* 2015. № 4. С. 34–39.
4. Рыжиков Ю.И., Уланов А.В. Расчет гиперэкспоненциальной системы $M/H_2/n-H_2$ с заявками, нетерпеливыми в очереди. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2014. № 2 (27). С. 47–53.
5. Цициашвили Г.Ш. Синергетический эффект в сети с гиперэкспоненциальными распределениями времен обслуживания. *Вестник Томского государственного университета*. *Управление, вычислительная техника и информатика*. 2016. № 1 (34). С. 65–68.
6. Назаров А.А., Бронер В.И. Система управления запасами с гиперэкспоненциальным распределением объемов потребления ресурсов. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* 2016. № 1(34). С. 43–49.
7. Cox D.R. A use of complex probabilities in the theory of stochastic process. *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.* 1955. P. 313–323.

8. Bidabad B., Bidabad B. Complex probability and Markov stochastic process. *Proc. of the First Iranian Statistics Conference* (Isfahan University of Technology, 1992). Isfahan, 1992. P. 1–8.

9. Zhernovyi Yu. Creating models of queueing systems using GPSS World: Programs, detailed explanations and analysis of results. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. 220 p.

Надійшла до редакції 05.09.2017

Ю.В. Жерновый

РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ФАЗОВОГО ТИПА

Аннотация. Осуществлен анализ результатов применения гиперэкспоненциальной и эрланговой аппроксимаций с параметрами парадоксального и комплексного типа для расчета методом фиктивных фаз стационарных характеристик систем обслуживания типа $G/G/1/m$. Результаты верифицированы с помощью имитационных моделей.

Ключевые слова: немарковская система обслуживания, гиперэкспоненциальное распределение, обобщенное распределение Эрланга, комплексные и парадоксальные параметры распределения, аппроксимация.

Yu.V. Zhernovyi

CALCULATION OF STEADY-STATE CHARACTERISTICS OF SINGLE-CHANNEL QUEUEING SYSTEMS USING PHASE-TYPE DISTRIBUTIONS

Abstract. The paper analyzes the results of application of hyper-exponential and Erlang approximations with parameters of paradoxical and complex type for calculating the steady-state characteristics of $G/G/1/m$ queueing systems by the fictitious phase method. The results are verified using simulation models.

Keywords: non-Markovian queueing system, hyper-exponential distribution, generalized Erlang distribution, complex and paradoxical parameters of distribution, approximation.

Жерновий Юрій Васильович,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри Львівського національного університету імені Івана Франка,
e-mail: yu.zhernovyi@lnu.edu.ua.