УДК 532.546:519.6

Х.М. ГАМЗАЕВ, С.О. ГУСЕЙНЗАДЕ, Г.Г. ГАСЫМОВ

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ МЛАДШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА И ИСТОЧНИКА В УРАВНЕНИИ КОНВЕКЦИИ–РЕАКЦИИ

Аннотация. Рассмотрена задача идентификации одновременно кинетического коэффициента реакции и функции источника, зависящих лишь от пространственной переменной, в одномерном линейном уравнении конвекции–реакции. В качестве дополнительных условий заданы нелокальное интегральное условие на решение уравнения и условие финального переопределения. Данная задача относится к классу комбинированных обратных задач. Путем интегрирования уравнения с использованием дополнительного интегрального условия задача преобразуется к коэффициентной обратной задаче с локальными условиями. Проводится дискретизация производной по пространственной переменной и предлагается специальное представление для решения полученной полудискретной задачи. В результате для каждого дискретного значения пространственной переменной полудискретная задача распадается на две: задачу Коши и линейное уравнение относительно приближенного значения искомого кинетического коэффициента. Для определения функции источника также получена явная формула. Для численного решения задач Коши используется неявный метод Эйлера. На основе предложенного метода проведены численные эксперименты.

Ключевые слова: уравнение конвекции–реакции, комбинированная обратная задача, коэффициентная обратная задача, нелокальное интегральное условие, полудискретная задача.

ВВЕДЕНИЕ

Для описания широкого класса процессов в гидродинамике, теплопередаче, экологии, акустике, химической технологии, физике плазмы и т.д. используется линейное неоднородное уравнение конвекции–реакции [1–3]. Аналитическому и численному исследованию прямых начально-краевых задач для уравнения конвекции–реакции посвящены многочисленные работы [1–4]. Однако во многих областях решения задач идентификации, связанных с восстановлением коэффициентов, внешнего источника, граничного режима и т.д. в уравнении конвекции–реакции, представляют несомненный практический интерес.

В настоящей статье рассматривается задача идентификации одновременно кинетического коэффициента реакции и неизвестной части источника в уравнении конвекции–реакции, представляя их функциями лишь от пространственной переменной. Общим методам решения задач идентификации моделей математической физики посвящены работы [5–7]. Вопросы существования и единственности, а также разрешимости некоторых задач идентификации коэффициентов параболических уравнений исследованы в [8–10]. Ряд работ посвящен численному исследованию проблемы восстановления младших коэффициентов, правой части одномерного уравнения диффузии–конвекции–реакции [11–13].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение конвекции–реакции

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\nu(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+k(x)u(x,t)=f(x)q(x,t),\ 0< x\le l,\ 0< t\le T, \qquad (1)$$

где $\nu(x)>0$, со следующими начальным и граничным условиями:

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le l, \tag{2}$$

$$u(0,t)=p(t),\ 0\le t\le T. \tag{3}$$

Здесь $u(x,t)$ — физическая величина (масса, концентрация, импульс, энергия и т.д.), $\nu(x)$ — коэффициент конвективного переноса (скорость конвекции), $k(x)$ — кинетический коэффициент реакции. Слагаемое $k(x)u(x,t)$ описывает поглощения или выделения физической величины, а слагаемое $f(x)q(x,t)$ описывает действие внешнего источника.

Известно, что прямая задача для уравнения (1) состоит в определении функции $u(x,t)$ из уравнения (1) с заданными коэффициентами $\nu(x)$, $k(x)$, правой частью $f(x)q(x,t)$ и дополнительными условиями (2), (3).

Предположим, что помимо функции $u(x,t)$ неизвестными являются функции $k(x)$ и $f(x)$. Очевидно, что для корректной постановки задачи помимо условий (2), (3) необходимо задавать дополнительные условия. Пусть дополнительные условия заданы в виде

$$u(x,T)=c(x),\ 0\le x\le l, \tag{4}$$

$$\int_0^T u(x,t)dt=w(x),\ 0\le x\le l, \tag{5}$$

где $c(x)$ и $w(x)$ — заданные функции. При этом выполняются условия согласования

$$p(0)=\varphi(0),\ \ p(T)=c(0),\ \int_0^T p(t)dt=w(0).$$

Таким образом, задача заключается в определении функций $u(x,t)$, $k(x)$ и $f(x)$, удовлетворяющих уравнению (1) и условиям (2)–(5). Ввиду того, что в задаче (1)–(5) требуется идентификация одновременно младшего коэффициента и функции источника для уравнения (1), поставленная задача считается комбинированной обратной задачей [5, 14]. Однако в данной задаче дополнительное условие (5) не является локальным условием для уравнения (1). Отметим, что вопросы существования и единственности решения комбинированных обратных задач для уравнения конвекции–реакции для общего случая исследованы в [15, 16]. Однако численные методы решения комбинированных обратных задач для уравнения конвекции–реакции в настоящее время разработаны недостаточно.

Предположим, что решение обратной задачи (1)–(5) существует и оно единственно. Вначале задачу (1)–(5) сведем к задаче с локальными условиями. Проинтегрируем уравнение (1) по переменной t на отрезке $[0,T]$. Выполнив интегрирования по частям, с учетом условий (2), (4), (5) получим

$$c(x)-\varphi(x)+\nu(x)\frac{dw(x)}{dx}+k(x)w(x)=f(x)g(x),$$

где $g(x)=\int_0^T q(x,t)dt$.

Разрешив последнее уравнение относительно $f(x)$, имеем

$$f(x)=\frac{c(x)-\varphi(x)+\nu(x)\dfrac{dw(x)}{dx}+k(x)w(x)}{g(x)}. \tag{6}$$

Тогда уравнение (1) с учетом (6) запишем в виде

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\nu(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+k(x)u(x,t)=r(x,t)k(x)+s(x,t),\ 0<x\le l,\ 0<t\le T, \quad (7)$$

где $r(x,t)=\dfrac{q(x,t)w(x)}{g(x)}$, $s(x,t)=\dfrac{q(x,t)\left(c(x)-\varphi(x)+\nu(x)\dfrac{dw(x)}{dx}\right)}{g(x)}$.

Теперь обратная задача состоит в восстановлении коэффициента $k(x)$ в уравнении (7) при выполнении условий (2)–(4). Очевидно, что решив задачи (7), (2)–(4), можно найти неизвестную функцию источника $f(x)$ по формуле (6). Полученную задачу преобразуем к полудискретной задаче. Для этого введем равномерную разностную сетку в области $[0\le x\le l]$ по переменной x

$$\overline{\omega_x}=\{x_i=i\Delta x,\ i=\overline{0,n}\}$$

с шагом $\Delta x=\dfrac{l}{n}$. Производную $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ в уравнении (7) при x_i, $i=\overline{1,n}$, аппроксимируем разностью «назад»:

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{(x_i,t)}\approx\frac{u(x_i,t)-u(x_{i-1},t)}{\Delta x},$$

а оператор реакции $k(x)u(x,t)$ при x_i, $i=\overline{1,n}$, аппроксимируем выражением $k(x_i)u(x_{i-1},t)$. Обозначив $u_i(t)\approx u(x_i,t)$, $k_i\approx k(x_i)$, уравнение (7) и условия (2)–(4) запишем в следующем виде:

$$\frac{du_i(t)}{dt}+\nu_i\frac{u_i(t)-u_{i-1}(t)}{\Delta x}+k_iu_{i-1}(t)=r_i(t)k_i+s_i(t),\ 0<t\le T, \quad (8)$$

$$u_i(0)=\varphi_i, \quad (9)$$

$$u_i(T)=c_i,\ i=1,\dots,n, \quad (10)$$

$$u_0(t)=p(t),\ 0\le t\le T, \quad (11)$$

где $\nu_i=\nu(x_i)$, $\varphi_i=\varphi(x_i)$, $r_i(t)=r(x_i,t)$, $s_i(t)=s(x_i,t)$, $c_i=c(x_i)$.

Предположим, что решение полученной полудискретной задачи (8)–(11) при каждом значении $i=1,2,3,\dots,n$ представляется в виде [11–14]:

$$u_i(t)=y_i(t)+k_iz_i(t), \quad (12)$$

где $y_i(t)$, $z_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, — неизвестные функции. Подставив соотношение (12) в уравнение (8), получим

$$\frac{dy_i(t)}{dt}+k_i\frac{dz_i(t)}{dt}+\nu_i\frac{y_i(t)+k_iz_i(t)-u_{i-1}(t)}{\Delta x}+k_iu_{i-1}(t)=r_i(t)k_i+s_i(t)$$

или

$$\left[\frac{dy_i(t)}{dt}+\nu_i\frac{y_i(t)-u_{i-1}(t)}{\Delta x}-s_i(t)\right]+k_i\left[\frac{dz_i(t)}{dt}+\nu_i\frac{z_i(t)}{\Delta x}+u_{i-1}(t)-r_i(t)\right]=0.$$

Соотношение (12) также подставим в начальное условие (9):

$$y_i(0)+k_iz_i(0)=\varphi_i.$$

В силу произвольности функций $y_i(t)$, $z_i(t)$ из последних соотношений можно получить следующие задачи Коши относительно функций $y_i(t)$, $z_i(t)$:

$$\frac{dy_i(t)}{dt} + \nu_i \frac{y_i(t) - u_{i-1}(t)}{\Delta x} - s_i(t) = 0, \; 0 < t \le T, \tag{13}$$

$$y_i(0) = \varphi_i, \tag{14}$$

$$\frac{dz_i(t)}{dt} + \nu_i \frac{z_i(t)}{\Delta x} + u_{i-1}(t) - r_i(t) = 0, \; 0 < t \le T, \tag{15}$$

$$z_i(0) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{16}$$

а подстановка соотношения (12) в дополнительное условие (10) определяет соотношение

$$y_i(T) + k_i z_i(T) = c_i. \tag{17}$$

Таким образом, алгоритм численного решения задачи (8)–(11) по определению $u_i(t)$ и k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, состоит из таких последовательных этапов.

1. Принимается $i = 1$.

2. Определяются решения задач (13), (14) и (15), (16), т.е. функции $y_i(t)$ и $z_i(t)$ на отрезке $[0, l]$.

3. Из соотношения (17) определяется приближенное значение искомой функции $k(x)$ при $x = x_i$, т.е. k_i:

$$k_i = \frac{c_i - y_i(T)}{z_i(T)}.$$

4. По формуле (6) определяется приближенное значение искомой функции $f(x)$ при $x = x_i$.

5. По формуле $u_i(t) = y_i(t) + k_i z_i(t)$ определяется приближение к искомой функции $u(x, t)$ при $x = x_i$.

6. Принимается $i = i + 1$ и вычислительный процесс повторяется, начиная со второго этапа.

Процесс вычисления продолжается до тех пор, пока ни будет выполнено условие $i \le n$.

При каждом фиксированном значении $i = 1, 2, \ldots, n$ решения задач (13), (14) и (15), (16) можно найти методом конечных разностей. Введем равномерную разностную сетку в области $[0 \le t \le T]$ по переменной t

$$\overline{\omega_t} = \{t_j = j\Delta t, \; j = \overline{0, m}\}$$

с шагом $\Delta t = \dfrac{T}{m}$. Разностные аналоги задач (13), (14) и (15), (16) на разностной сетке $\overline{\omega_t}$ представим в виде неявной схемы Эйлера:

$$\frac{y_i^j - y_i^{j-1}}{\Delta t} + \nu_i \frac{y_i^j - u_{i-1}^j}{\Delta x} - s_i^j = 0, \; j = \overline{1, m}, \tag{18}$$

$$y_i^0 = \varphi_i, \tag{19}$$

$$\frac{z_i^j - z_i^{j-1}}{\Delta t} + \nu_i \frac{z_i^j}{\Delta x} + u_{i-1}^j - r_i^j = 0, \; j = \overline{1, m}, \tag{20}$$

$$z_i^0 = 0, \tag{21}$$

где $y_i^j \approx y_i(t_j)$, $z_i^j \approx z_i(t_j)$, $s_i^j = s(x_i, t_j)$, $r_i^j = r(x_i, t_j)$, $u_{i-1}^j \approx u_{i-1}(t_j)$.

Решения разностных задач (18), (19) и (20), (21) определяются по формулам

$$y_i^j = \frac{y_i^{j-1} + \nu_i u_{i-1}^j \Delta t / \Delta x + s_i^j \Delta t}{1 + \nu_i \Delta t / \Delta x}, \ j = \overline{1, m}, \ y_i^0 = \varphi_i,$$

$$z_i^j = \frac{z_i^{j-1} - u_{i-1}^j \Delta t + r_i^j \Delta t}{1 + \nu_i \Delta t / \Delta x}, \ j = \overline{1, m}, \ z_i^0 = 0.$$

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

На основании предложенного вычислительного алгоритма проведены численные эксперименты для модельных задач. Результаты численного эксперимента, проведенного для случая (все переменные безразмерные) $l = 3$, $T = 1$, $v(x) = 3.2$, $q(x, t) = 1 + 4.4t / x$, $\varphi(x) = 0$, $p(t) = 0$, $c(x) = 2.5x$, $w(x) = 1.25x$ представлены в табл. 1. При этом точным решением задачи (1)–(5) являются функции

$$u(x, t) = 2.5xt, \ k(x) = \frac{1.2}{x}, \ f(x) = 2.5x.$$

Численные расчеты проводились на пространственно-временной разностной сетке с шагами $h = 0.0001$, $\tau = 0.02$. Результаты численных экспериментов показывают, что при использовании невозмущенных входных данных искомые функции $k(x)$ и $f(x)$ восстанавливаются с достаточно высокой точностью при всех расчетных сетках по времени. При этом максимальная относительная погрешность восстановления искомых функций не превышает 0.32 %. При использовании возмущенных входных данных, погрешность которых имеет флуктуационный характер, проявляется слабая чувствительность восстановления этих функций от погрешности во входных данных. При этом эффект регуляризации обеспечивается за счет выбора разностной сетки. Анализ результатов численного экспериментирования свидетельствует, что за счет выбора разностной сетки можно уменьшить влияние погрешности во входных данных на точность восстановления значений функций $k(x)$ и $f(x)$.

Таблица 1

x_i	Результаты численных экспериментов для задач			
	Значение функции $k(x)$		Значение функции $f(x)$	
	точное	вычисленное	точное	вычисленное
0.2	6.000	6.024	0.500	0.502
0.4	3.000	3.013	1.000	1.001
0.6	2.000	2.005	1.500	1.501
0.8	1.500	1.503	2.000	2.001
1.0	1.200	1.202	2.500	2.501
1.2	1.000	1.001	3.000	3.001
1.4	0.857	0.858	3.500	3.501
1.6	0.750	0.751	4.000	4.001
1.8	0.667	0.667	4.500	4.501
2.0	0.600	0.601	5.000	5.001
2.2	0.545	0.546	5.500	5.501
2.4	0.500	0.501	6.000	6.001
2.6	0.462	0.462	6.500	6.501
2.8	0.429	0.429	7.000	7.001
3.0	0.400	0.400	7.500	7.501

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача идентификации кинетического коэффициента реакции и источника для уравнения конвекции–реакции. Задача путем дискретизации по пространственной переменной преобразуется к полудискретной задаче, для решения которой предлагается специальное представление. В отличие от методов регуляризации в предложенном подходе значения искомых функций определяются последовательно по явным формулам. Такой подход может быть применен для восстановления коэффициента и источника одновременно для широкого класса неоднородных уравнений конвекции–реакции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1. Москва: Мир, 1990. 384 с.
2. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. Москва: Наука, 1984. 288 с.
3. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. Москва: Мир, 1980. 528 с.
4. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции–диффузии. Москва: ЛИБРОКОМ, 2015. 248 с.
5. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1988. 288 с.
6. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. Москва: Издательство ЛКИ, 2009. 480 с.
7. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
8. Камынин В.Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения. *Матем. заметки*. 2013. Т. 94, вып. 2. С. 207–217.
9. Кожанов А.И. Параболические уравнения с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени. *Журнал вычисл. математики и мат. физики*. 2017. Т. 57, № 6. С. 961–972.
10. Костин А.Б. Восстановление коэффициента перед u_t в уравнении теплопроводности по условию нелокального наблюдения по времени. *Журнал вычисл. математики и мат. физики*, 2015. Т 55, № 1. С. 89–104.
11. Вабищевич П.Н., Клибанов М.В. Вычислительная идентификация старшего коэффициента параболического уравнения. *Дифференциальные уравнения*. 2016. Т. 52, № 7. С. 896–903.
12. Айда-заде К.Р., Рагимов А.Б. К решению одной коэффициентно-обратной задачи. *Сиб. журн. индустр. матем*. 2013. Т. 16, № 2. С. 3–13.
13. Вабищевич П.Н., Васильев В.И., Васильева М.В. Вычислительная идентификация правой части параболического уравнения. *Журнал вычисл. математики и мат. физики*. 2015. Т. 55, № 6. С. 1020–1027.
14. Gamzaev Kh.M. Numerical solution of combined inverse problem for generalized burgers equation. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 221, N 6. P. 833–839.
15. Прилепко А.И., Иванков А.Л. Обратные задачи определения коэффициента, индикатрисы рассеяния и правой части нестационарного многоскоростного уравнения переноса. *Дифференциальные уравнения*. 1985. Т. 21, № 5. С. 870–885.
16. Прилепко А.И., Волков Н.П. Обратные задачи определения параметров нестационарного уравнения переноса по переопределениям интегрального типа. *Дифференциальные уравнения*. 1987. Т. 23, № 1. С. 124–136.

Надійшла до редакції 05.02.2018

Х.М. Гамзаєв, С.О. Гусейнзаде, Г.Г. Гасімов

ЧИСЛОВИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ МОЛОДШОГО КОЕФІЦІЄНТА ТА ДЖЕРЕЛА В РІВНЯННІ КОНВЕКЦІЇ–РЕАКЦІЇ

Анотація. Розглянуто задачу ідентифікації одночасно кінетичного коефіцієнта реакції та функції джерела, залежних тільки від просторової змінної, в одновимірному лінійному рівнянні конвекції–реакції. Як додаткові умови задано нелокальну інтегральну умову для розв'язання рівняння і умову фінального перевизначення. Ця задача належить до класу комбінованих обернених задач. Шляхом інтегрування рівняння з використанням додаткової інтегральної умови задачу перетворюють у коефіцієнтну обернену задачу з локальними умовами. Проведено дискретизацію похідної за просторовою змінною та запропоновано спеціальний вигляд для розв'язку отриманої напівдискретної задачі. У результаті для кожного дискретного значення просторової змінної напівдискретна задача розкладається на дві: задачу Коші та лінійне рівняння відносно наближеного значення шуканого кінетичного коефіцієнта. Для визначення функції джерела також отримано явну формулу. Для числового розв'язання задач Коші використано неявний метод Ейлера. На основі запропонованого методу проведено числові експерименти.

Ключові слова: рівняння конвекції–реакції, комбінована обернена задача, коефіцієнтна обернена задача, нелокальна інтегральна умова, напівдискретна задача.

Kh.M. Gamzaev, S.O. Huseynzade, G.G. Gasimov

A NUMERICAL METHOD TO SOLVE IDENTIFICATION PROBLEM FOR THE LOWER COEFFICIENT AND THE SOURCE IN THE CONVECTION–REACTION EQUATION

Abstract. We consider the problem of identifying simultaneously the kinetic reaction coefficient and source function depending only on a spatial variable in one-dimensional linear convection–reaction equation. As additional conditions, a non-local integral condition for the solution of the equation and the condition of the final overdetermination are given. This problem belongs to the class of combined inverse problems. By integrating the equation using the additional integral condition, the problem is transformed to a coefficient inverse problem with local conditions. The derivative with respect to the spatial variable is discretized and a special representation is proposed for solving the resultant semi-discrete problem. As a result, for each discrete value of the spatial variable, the semidiscrete problem splits into two parts: the Cauchy problem and a linear equation with respect to the approximate value of the unknown kinetic coefficient. To determine the source function, an explicit formula is also obtained. The numerical solution of the Cauchy problem uses the implicit Euler method. Numerical experiments were carried out on the basis of the proposed method.

Keywords: convection–reaction equation, combined inverse problem, coefficient inverse problem, nonlocal integral condition, semi-discrete problem.

Гамзаев Ханлар Мехвали оглу,
доктор техн. наук, профессор кафедры Азербайджанского Государственного Университета нефти и промышленности, Баку, e-mail: xan.h@rambler.ru.

Гусейнзаде Севил Огтай гызы,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Азербайджанского Государственного Университета нефти и промышленности, Баку, e-mail: sevilhuseynzade@gmail.com.

Гасымов Гасым Гурбан оглу,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Азербайджанского Государственного Университета нефти и промышленности, Баку, e-mail: q.qasim56@gmail.com.