УДК 519.714.7

А.И. ТИМОШКИН

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ СОКРАЩЕННЫХ ДНФ ПОРЯДКОВО-ВЫПУКЛЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Рассматривается проблема построения сокращенных дизъюнктивных нормальных форм порядково-выпуклых булевых функций. Предлагается оригинальный алгоритм нахождения этих форм. Алгоритм использует такие понятия теории упорядоченных множеств как идеал и коидеал и имеет существенно меньшую временную сложность, чем классический алгоритм Квайна–Мак-Класки.

Ключевые слова: импликант, решетка, порядково-выпуклое подмножество, идеал, коидеал.

Рассмотрим задачу построения сокращенных дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) для определенного класса булевых функций, а именно для порядково-выпуклых булевых функций. Предложим алгоритм нахождения сокращенных ДНФ порядково-выпуклых булевых функций, в котором снижены временные затраты по сравнению с классическими методами за счет использования операций образования порядковых идеалов и коидеалов. Подмножество I упорядоченного множества P называется идеалом в P, если для всех элементов x, $y \in P$ из условий $x \in I$ и $y \le x$ вытекает, что $y \in I$. Для $A \subseteq P$ множество $\{x \in P\colon x \le a$ для некоторого $a \in A\}$ будет идеалом. Его называют идеалом, порожденным подмножеством A. Двойственным к понятию идеала является понятие фильтра (коидеала) в P [1].

Алгоритм нахождения сокращенной ДНФ порядково-выпуклой булевой функции. Пусть имеются произвольная порядково-выпуклая (т.е. заданная на выпуклом подмножестве частично упорядоченного множества) булева функция от n переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ и A — некоторое подмножество решетки B всех n-мерных двоичных векторов, на котором функция f принимает единичное значение. Очевидно, что подмножество A решетки B в данном случае является порядково-выпуклым. Подмножество V частично упорядоченного множества P называется выпуклым подмножеством, если справедлива импликация [2]

$$((a, b \in V) \& (x \in P) \& (a \le x \le b)) \Rightarrow (x \in V).$$

Предлагаемый алгоритм нахождения сокращенной ДНФ порядково-выпуклой булевой функции заключается в следующем.

1. Необходимо проранжировать подмножество A множества B. Ранг произвольного n-мерного двоичного набора $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in B$ равен числу его единичных компонент. Тогда

$$r(A) = \{q_1, \ldots, q_m\} \subseteq \{0, \ldots, n\},$$

где r — ранговая функция.

Ранговая функция r порождает разбиение множества A на m непересекающихся подмножеств: $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_{q_i}$.

Пусть $q_1, \ldots, q_m$ — цепочка ранговых чисел, упорядоченных по возрастанию.

2. Сформируем коидеал $D(A_{q_1})$ и идеал $J(A_{q_m})$, порожденные множествами A_{q_1} и A_{q_m} соответственно. Если $A=D(A_{q_1})$ или $A=J(A_{q_m})$, то $f=\bigvee\limits_{a_{q_1}\in A_{q_1}}\left(\bigwedge\limits_{\alpha_i=1} x_i^{\alpha_i}\right)_{a_{q_1}}$ или $f=\bigvee\limits_{a_{q_m}\in A_{q_m}}\left(\bigwedge\limits_{\alpha_i=0} x_i^{\alpha_i}\right)_{a_{q_m}}$.

В противном случае найдем пересечение $D(A_{q_1})$ и $J(A_{q_m})$:

$$P_{q_1 q_m}=D(A_{q_1})\cap J(A_{q_m}).$$

Если $A=P_{q_1 q_m}$, то $f=\left(\bigvee\limits_{a_{q_1}\in A_{q_1}}\left(\bigwedge\limits_{\alpha_i=1} x_i^{\alpha_i}\right)_{a_{q_1}}\right)\bigwedge\left(\bigvee\limits_{\alpha_{q_m}\in A_{q_m}}\left(\bigwedge\limits_{\alpha_i=0} x_i^{\alpha_i}\right)_{a_{q_m}}\right)$,

где $a_{q_i}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)_{q_i}$. Раскрывая скобки и исключая произведения, содержащие переменную x_i и ее отрицание одновременно, получаем сокращенную дизъюнктивную нормальную форму. Если $A\neq P_{q_1 q_m}$, то имеем повторение по i процедуры.

3. Сформируем коидеал $D(\widetilde{A}_{q_i})$, заданный рекурсивно:

$$\begin{cases} D(\widetilde{A}_{q_1})=D(A_{q_1}), \\ D(\widetilde{A}_{q_i})=D\left(A_{q_i}\setminus\bigcup\limits_{l=1}^{i-1} D(\widetilde{A}_{q_l})\right). \end{cases}$$

Если $A\neq\bigcup\limits_{l=1}^{i} D(\widetilde{A}_{q_l})$, то найдем пересечение $D(\widetilde{A}_{q_i})$ с $J(A_{q_m})$:

$$P_{q_i q_m}=D(\widetilde{A}_{q_i})\cap J(A_{q_m}).$$

Если $A=\bigcup\limits_{l=1}^{i} D(\widetilde{A}_{q_l})$ или $A=\bigcup\limits_{l=1}^{i} P_{q_l q_m}$, то формируется формула, соответствующая одному из объединений.

4. Если $A\neq\bigcup\limits_{l=1}^{m} D(\widetilde{A}_{q_l})$ и $A\neq\bigcup\limits_{l=1}^{m} P_{q_l q_m}$, то сформируем идеал $J(\widetilde{A}_{q_{m-1}})=J(A_{q_{m-1}})\setminus J(A_{q_m})$.

Если $A\neq J(A_{q_m})\bigcup J(\widetilde{A}_{q_{m-1}})$, то имеем повторение по i процедуры образования пересечения $P_{q_i q_{m-1}}=D(\widetilde{A}_{q_i})\bigcap J(\widetilde{A}_{q_{m-1}})$.

Если $A=J(A_{q_m})\bigcup J(\widetilde{A}_{q_{m-1}})$ или $A=\left(\bigcup\limits_{l=1}^{m} P_{q_l q_m}\right)\bigcup\left(\bigcup\limits_{l=1}^{i} P_{q_l q_{m-1}}\right)$, то образуется формула, соответствующая одному из объединений.

Если $A\neq\left(\bigcup\limits_{l=1}^{m} P_{q_l q_m}\right)\bigcup\left(\bigcup\limits_{l=1}^{m-1} P_{q_l q_{m-1}}\right)$, то имеем повторение по k процедуры.

5. Сформируем идеал $J(\widetilde{A}_{q_{m-k}})$, заданный рекурсивно:

$$\begin{cases} J(\widetilde{A}_{q_{m-0}})=J(A_{q_m}), \\ J(\widetilde{A}_{q_{m-k}})=J\left(A_{q_{m-k}}\setminus\bigcup\limits_{j=0}^{k-1} J(\widetilde{A}_{q_{m-j}})\right). \end{cases}$$

Если $A \neq \bigcup_{j=0}^{k} J(\widetilde{A}_{q_{m-j}})$, то имеем повторение по i процедур образования пересечения $P_{q_i q_{m-k}} = D(\widetilde{A}_{q_i}) \bigcap J(\widetilde{A}_{q_{m-k}})$, где $1 \leq i \leq m-k$. Если $A = \bigcup_{j=0}^{k} J(\widetilde{A}_{q_{m-j}})$ или $A = \left(\bigcup_{j=0}^{k-1} \left(\bigcup_{l=1}^{m-1} P_{q_l q_{m-j}} \right) \right) \bigcup \left(\bigcup_{l=1}^{i} P_{q_l q_{m-k}} \right)$, то формируется формула, соответствующая одному из объединений. Следует отметить, что множество A представимо в виде одного из трех возможных объединений: $A = \bigcup_{l=1}^{m} D(\widetilde{A}_{q_l})$ или $A = \bigcup_{j=0}^{m-1} J(\widetilde{A}_{q_{m-j}})$, или $A = \left(\bigcup_{j=0}^{m-1} \left(\bigcup_{l=1}^{m-j} P_{q_l q_{m-j}} \right) \right)$. Следовательно, порядково-выпуклой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ будет соответствовать одна из трех возможных обобщенных формул:

$$f = \bigvee_{l=1}^{m} \left(\bigvee_{a_{q_l} \in \widetilde{A}_{q_l}} \left(\bigwedge_{\alpha_{k=1}} x_k^{\alpha_k} \right) a_{q_l} \right)$$

или

$$f = \bigvee_{j=0}^{m-1} \left(\bigvee_{a_{q_{m-j}} \in \widetilde{A}_{q_{m-j}}} \left(\bigwedge_{\alpha_{k=0}} x_k^{\alpha_k} \right) a_{q_{m-j}} \right),$$

или

$$f = \bigvee_{j=0}^{m-1} \left(\bigvee_{l=1}^{m-j} \left(\left(\bigvee_{a_{q_l} \in \widetilde{A}_{q_l}} \left(\bigwedge_{\alpha_{k=1}} x_k^{\alpha_k} \right) a_{q_l} \right) \wedge \left(\bigvee_{a_{q_{m-j}} \in \widetilde{A}_{q_{m-j}}} \left(\bigwedge_{\alpha_{k=0}} x_k^{\alpha_k} \right) a_{q_{m-j}} \right) \right) \right). \quad (1)$$

Для получения сокращенной ДНФ из (1) необходимо раскрыть скобки и исключить произведения, содержащие одновременно переменную x_k и ее отрицание одновременно.

Обоснование предлагаемого алгоритма. Покажем, что данный алгоритм действительно строит сокращенную ДНФ порядково-выпуклой булевой функции. Поскольку множество A является порядково-выпуклым, то произвольный интервал $[a_{q_i}, a_{q_{m-k}}] \neq \varnothing$ содержится в A, где $a_{q_i} \in A_{q_i}$ и $a_{q_{m-k}} \in A_{q_{m-k}}$ [3]. Следовательно, $D(A_{q_i}) \bigcap J(A_{q_{m-k}}) \subset A$ всегда для произвольных i и k. Очевидно также, что $A = D(A_{\min}) \bigcap J(A_{\max})$, где $A_{\min}$ и $A_{\max}$ — подмножества минимальных и максимальных элементов множества A. При этом $D(A_{\min}) = \bigcup_{a \in A_{\min}} D(a)$ и $J(A_{\max}) = \bigcup_{a \in A_{\max}} J(a)$, где $D(a)$ — главный коидеал и $J(a)$ — главный идеал. Следовательно, в алгоритме целесообразно использование процедуры образования идеалов и коидеалов, порождаемых подмножествами антицепей, элементы которых являются максимальными и минимальными элементами множества A. Произвольный элемент $a_{q_i} \in \widetilde{A}_{q_i}$ $(1 \leq i \leq m)$ является минимальным в силу определения множества $\widetilde{A}_{q_i}$, задаваемого рекурсивно. Следовательно, коидеал $D(a_{q_i})$ такой, что $a_{q_i} \in \widetilde{A}_{q_i}$, является максимальным в множестве главных коидеалов, порожденных элементами множества A [3]. Аналогично произвольный элемент $a_{q_{m-k}} \in \widetilde{A}_{q_{m-k}}$ в силу рекурсивно заданного определения множества $\widetilde{A}_{q_{m-k}}$ является максимальным. Поэтому идеал $J(a_{q_{m-k}})$ такой, что $a_{q_{m-k}} \in \widetilde{A}_{q_{m-k}}$, является максимальным в множестве главных идеалов, порожденных элементами множества A. Порядковые коидеал $D(\widetilde{A}_{q_i})$ и идеал $J(\widetilde{A}_{q_{m-k}})$ представимы в виде объединения максимальных главных коидеалов и идеалов: $D(\widetilde{A}_{q_i}) = \bigcup\limits_{a \in \widetilde{A}_{q_i}} D(a)$; $J(\widetilde{A}_{q_{m-k}}) = \bigcup\limits_{a \in \widetilde{A}_{q_{m-k}}} J(a)$. Следовательно, $P_{q_i q_{m-k}}$ представляет объединение максимальных интервалов частично упорядоченного множества интервалов, определяемых множеством A для произвольных i и k. Таким образом, объединение $\left(\bigcup\limits_{j=0}^{m-1} \left(\bigcup\limits_{l=1}^{m-j} P_{q_l q_{m-j}} \right) \right)$ представляет множество всех максимальных интервалов, лежащих в A, а объединения $\bigcup\limits_{l=1}^{m} D(\widetilde{A}_{q_l})$ и $\bigcup\limits_{j=0}^{m-1} J(\widetilde{A}_{q_{m-j}})$ являются множествами всех максимальных главных коидеалов и идеалов, лежащих в A, если $q_m = n$ или $q_1 = 0$. Каждому максимальному интервалу, лежащему в A, соответствует простая импликанта функции f [4]. Следовательно, совокупности всех максимальных интервалов, находящихся в A, соответствует совокупность всех простых импликант порядково-выпуклой функции f, т.е. ее сокращенная ДНФ.

Оценка временной сложности предлагаемого алгоритма. Отметим, что для выполнения операции склеивания кубов и операции нахождения порядкового идеала (коидеала) требуется одинаковое время. Тогда при $q_m = n$ время выполнения предложенного алгоритма для произвольной порядково-выпуклой функции не превышает $k_1 m$, где k_1 — некоторая константа. Аналогично в случае, когда $q_1 = 0$, время выполнения предложенного алгоритма не превышает $k_2 m$, где k_2 — константа. Затраты времени на выполнение классического алгоритма Квайна–Мак-Класки в этих двух случаях можно оценить снизу величинами $\sum\limits_{i=1}^{m-2} |A_{q_i}| \cdot |A_{q_{i+1}}| + |A_{q_{m-1}}|$ и $\sum\limits_{i=2}^{m-1} |A_{q_i}| \cdot |A_{q_{i+1}}| + |A_{q_1}|$ соответственно, где $|A_{q_i}|$ — число элементов множества A_{q_i}.

В случае, когда $q_m \neq n$ или $q_1 \neq 0$, время выполнения предложенного алгоритма не превышает $k_3 m^2$, где k_3 — константа. Затраты времени на выполнение алгоритма Квайна–Мак-Класки в этом случае оцениваются снизу величиной $\sum\limits_{i=1}^{m-1} |A_{q_i}| \cdot |A_{q_{i+1}}| = \sum\limits_{i=1}^{m-1} g_i C_n^{q_i} \cdot C_n^{q_{i+1}}$, где g_i — некоторые константы. Если $|A_{q_1}| = C_n^{q_1}$ и $|A_{q_m}| = C_n^{q_m}$, то для достаточно больших n имеем $k_3 m^2 < n^2 (m-1) < \sum\limits_{i=1}^{m-1} C_n^{q_i} \cdot C_n^{q_{i+1}}$, поскольку $m < n$.

Таким образом, предлагаемый алгоритм обладает гораздо меньшими временными затратами, чем классический алгоритм Квайна–Мак-Класки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айгнер М. Комбинаторная теория. Пер. с англ. Москва: Мир, 1982. 558 с.
2. Ковалев М.М. Матроиды в дискретной оптимизации. Минск: Изд. «Университетское», 1987. 222 с.
3. Биркгоф Г. Теория решеток. Москва: Наука, 1984. 568с.
4. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. Москва: Наука, 1986. 384 с.

Надійшла до редакції 10.05.2018

А.І. Тімошкін

ПРО ОДИН АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ СКОРОЧЕННИХ ДНФ ПОРЯДКОВО-ОПУКЛИХ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Анотація. Розглянуто проблему побудови скорочених диз'юнктивних нормальних форм порядково-опуклих булевих функцій. Запропоновано оригінальний алгоритм знаходження цих форм. Алгоритм використовує такі вирази теорії упорядкованих множин як ідеал і коідеал і має істотно меншу часову складність, ніж класичний алгоритм Квайна–Мак-Класкі.

Ключові слова: імплікант, решітка, порядково-опукла підмножина, ідеал, коідеал.

A.I. Timoshkin

ON AN ALGORITHM FOR CONSTRUCTING REDUCED DNF OF ORDER-PROMINENT BOOLEAN FUNCTIONS

Abstract. The problem of building the reduced disjunctive normal forms of order-convex Boolean functions is considered. An algorithm of finding the reduced disjunctive normal forms of order-convex Boolean functions is proposed. The algorithm uses notions of partial order theory such as ideal and coideal and has much less time complexity than classical Quine and McCluskey's algorithm.

Keywords: implicant, lattice, order-convex subset, ideal, coideal.

Тимошкин Андрей Иванович,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Национальной металлургической академии Украины, Днепр, e-mail: timoshkin1964@gmail.com.