УДК 519.64; 517.443; 519.254

В.К. ЗАДІРАКА

ЗАСТОСУВАННЯ РЕЗЕРВІВ ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ СКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Анотація. У статті розглянуто етапи розвитку досліджень з оптимізації обчислень в Україні, зокрема в Інституті кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, що стосуються елементів теорії похибок, оптимальних за точністю та швидкодією обчислювальних алгоритмів, наукоємних комп'ютерних технологій розв'язання задач обчислювальної та прикладної математики із заданими значеннями характеристики якості.

Ключові слова: обчислювальний алгоритм, наближений розв'язок, похибка наближеного розв'язку, оптимізація алгоритмів, резерви оптимізації обчислень, комп'ютерні технології.

Під складними задачами будемо розуміти такі задачі, які не можна розв'язати із заданою якістю за допомогою штатного математичного забезпечення комп'ютера.

Нехай задача $P(I)$ розв'язується алгоритмом $A(X)$ на комп'ютері $C(Y)$, де I, X, Y — скінченні множини (вектори) параметрів, від яких істотно залежать відповідно P, A, C. Компонентами вектора I можуть бути дані про апріорні властивості розв'язку задачі, наприклад, константи, що обмежують абсолютні значення ряду похідних від заданих функцій, дані про точність задання вхідних величин тощо. Компонентами вектора X можуть бути число ітерацій алгоритму, степінь апроксимації, крок сітки тощо. Вектор Y може містити число розрядів комірок пам'яті комп'ютера, загальний обсяг його оперативної пам'яті, час виконання операцій комп'ютера, кількість його процесорів, характеристики використовуваних операційних систем і трансляторів тощо.

У практиці числового розв'язання задач на комп'ютері розглядаються такі характеристики задач, алгоритмів і комп'ютерів: $E(I, X, Y)$ — повна похибка розв'язку задачі P на комп'ютері C за допомогою алгоритму A; $T(I, X, Y)$ — час, потрібний для отримання розв'язку задачі; $M(I, X, Y)$ — необхідна пам'ять комп'ютера. Наведені характеристики алгоритмів не єдині.

Замість M можна ввести характеристику $\log_2 M$ і назвати її ентропією алгоритму. Можна розглядати будь-які інші функції від введених характеристик, які взаємно однозначно з ними пов'язані, якщо до них на практиці можна застосувати більш прості оцінки.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК

На практиці відомі не E, T, M, а лише їхні оцінки $\widetilde{E}$, $\widetilde{T}$, $\widetilde{M}$. Оцінки можуть бути апріорні або апостеріорні, мажорантні або асимптотичні, детерміновані або стохастичні. Кожна з оцінок має свої «плюси» і «мінуси». Так, апріорні мажорантні детерміновані оцінки, з одного боку, є гарантованими, достатньо точно обчислюються, а з іншого боку, оцінка може бути завищеною і тому малозастосовною. Ситуація не змінюється в класі задач, навіть якщо оцінка є непокращуваною. Задача, на якій досягається ця оцінка, може мати екзотичний характер і на практиці майже не зустрічатися, тому можливості обчислювального алгоритму на інших задачах класу залишаються не використаними.

Асимптотичні апостеріорні оцінки можуть бути достатньо близькими до похибки, але така близькість досягається для значень параметру з певної області асимптотики, що не завжди зручно для практичних обчислень. Крім того, для таких оцінок використовується розв'язок задачі, а для його побудови потрібно виконати значний об'єм обчислень. Доцільність використання оцінок певного типу визначається обчислювальною ситуацією.

Гарантією якості похибки є комплексний підхід до оцінки точності, який враховує різні джерела її накопичення. Реальний обчислювальний процес супроводжують такі види похибок: неусувна, що виникає внаслідок неточності вхідної інформації про задачу, а також похибки методу та заокруглювання. Лише врахування всіх трьох видів похибок (так званої повної похибки) дасть змогу гарантувати оцінку якості наближеного розв'язку задачі [1, 2].

Для оцінки повної похибки наближеного розв'язку $E(I, X, Y)$ можна записати

$$E(I, X, Y) = E_{\text{н}}(\cdot) + E_{\text{м}}(\cdot) + E_{\text{з}}(\cdot),$$

$$\rho(E) \le \rho(E_{\text{н}}) + \rho(E_{\text{м}}) + \rho(E_{\text{з}}),$$

де $\rho(\cdot)$ — деяка міра похибки наближеного обчислення розв'язку задачі; $E_{\text{н}}(\cdot)$ — неусувна похибка; $E_{\text{м}}(\cdot)$ — похибка методу; $E_{\text{з}}(\cdot)$ — похибка заокруглювань.

Як зазначено вище, оцінка якості наближеного розв'язку задачі є гарантованою лише у разі врахування всіх трьох видів похибок. На жаль, у більшості результатів з обґрунтування тих чи інших методів наближеного розв'язання задач, як правило, проведено аналіз лише одного виду похибки і не враховано реальну обчислювальну ситуацію. Через це їх можна використовувати для з'ясування якості наближеного розв'язку задачі з відповідними застереженнями.

Треба зауважити, що навіть непокращувані оцінки не завжди є задовільними з причин, наведених вище. Тому доцільно використовувати разом з детермінованими оцінками ще й імовірнісні оцінки похибки.

Наведемо детерміновано-ймовірнісні оцінки точності обчислення оцінки математичного сподівання величини x

$$M^*(x) = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} x_\nu .$$

Припустимо, що замість x_ν ми маємо справу з $x_{\varepsilon\nu}$, причому

$$D(x_\nu - x_{\varepsilon\nu}) \le \varepsilon^2 .$$

Тоді замість $M^*(x)$ отримаємо

$$M_\varepsilon^*(x) = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} x_{\varepsilon\nu} .$$

Крім того, припускаючи, що $x_\nu - x_{\varepsilon\nu}$ є попарно незалежними, будемо мати

$$D[M^*(x) - M_\varepsilon^*(x)] = \frac{1}{N^2} \sum_{\nu=1}^{N} D(x_\nu - x_{\varepsilon\nu}) \le \frac{\varepsilon^2}{N} .$$

Звідси, в силу нерівності Чебишова

$$P(| x - M(x) | \le K\sqrt{D(x))} > 1 - \frac{1}{K^2},$$

отримаємо

$$|M^*(x) - M_\varepsilon^*(x)| \le 4{,}5\frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}$$

з імовірністю 0,95.

Для оцінки похибки заокруглювання обчислення $M^*(x)$ у режимі рухомої коми з τ розрядами у мантисі числа використовуємо таблицю Дж. Уілкінсона [3] похибок заокруглювання для виконання арифметичних операцій над дійсними числами. Нехай $\oplus$, $\otimes$ означають відповідно операції додавання і множення із заокругдюванням.

Тоді з точністю до перших степенів $2^{-\tau}$ (асимптотична оцінка) [2] отримуємо

$$\frac{1}{N}\otimes\sum_{\nu=1}^{N}\oplus x_{\varepsilon\nu_\tau} = \frac{1}{N}\otimes\left[\sum_{\nu=1}^{r-1}\oplus x_{\varepsilon\nu_\tau} \oplus x_{\varepsilon r_\tau}\right],\ r=\overline{2, N},$$

$$M_\varepsilon^*(X)_\tau = \frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} x_{\varepsilon\nu}(1+\xi_{x\varepsilon_\nu})(1+\eta_1)(1+\eta_2)\ldots(1+\eta_{N-\nu})(1+\eta),$$

$$|\xi_{x\varepsilon_\nu}|,\ |\eta_i|,\ |\eta| \le 2^{-\tau}.$$

Звідси

$$|M_\varepsilon^*(x) - M_\varepsilon^*(x)_\tau| \le \frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N}|x_{\varepsilon\nu}|[(1+2^{-\tau})^{N-\nu+2} - 1].$$

Якщо $r\cdot 2^{-\tau} < 0{,}1$, то $(1+2^{-\tau})^r - 1 < 1{,}06\ \cdot r\cdot 2^{-\tau}$.

Тому за умови $(N+1)2^{-\tau} < 0{,}1$ маємо

$$|M_\varepsilon^*(x) - M_\varepsilon^*(x)_\tau| \le \frac{1{,}06}{N}\sum_{\nu=1}^{N}|x_{\varepsilon\nu}|(N-\nu+2)2^{-\tau} \le 1{,}06\max_\nu|x_{\varepsilon\nu}|\cdot\frac{N(N+3)}{2}\cdot 2^{-\tau}.$$

Для великого N похибка заокруглювання може бути значною. Щоб уникнути цього, потрібно здійснювати додавання на комп'ютері по можливості без заокруглювання [4].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ

Оптимізація обчислень полягає в оптимізації однієї з уведених характеристик (у загальному випадку по I, X, Y) за певних обмежень на інші [1].

Перша основна задача — мінімізація повної похибки $E(I, X, Y)$ за дотримання реальних (Re) обмежень на M, T:

$$E(I, X, Y) = \min_{I, X, Y},$$

$$M(I, X, Y) \le M_{\mathrm{Re}},\ E(I, X, Y) \le E_{\mathrm{Re}}.$$

Друга основна задача — мінімізація часу $T(I, X, Y)$ за дотримання реальних (Re) обмежень на M, E:

$$T(I, X, Y) = \min_{I, X, Y},$$

$$M(I, X, Y) \le M_{\mathrm{Re}},\ E(I, X, Y) \le E_{\mathrm{Re}}.$$

Нехай комп'ютер $C(Y)$ фіксовано. Тоді T, M, E залежать лише від I, X. Зручно вважати I випадковою величиною і розглядати ймовірнісні характеристики T, M, E, які також будуть характеристиками обчислювального алгоритму A і залежатимуть лише від X.

Одним з основних критеріїв оптимальності наближеного розв'язку задач може бути вимога його максимальної точності (чи мінімальної похибки) за заданими ресурсами, які можна використовувати в процесі розв'язання. У поняття ресурсу входять обсяг і точність вхідних даних задачі, вільна для використання пам'ять комп'ютера, мінімум часу обчислень на комп'ютері, наявний запас математичного забезпечення тощо.

На початку дослідження в такій постановці доцільно розглянути питання про «потенційну спроможність» чисельних методів, тобто про ту максимальну точність розв'язку, яка може бути досягнута для використаної вхідної інформації про задачу.

Кожний обчислювальний алгоритм розв'язання конкретної задачі використовує лише скінченну кількість вхідних даних про задачу і тим самим автоматично є обчислювальним алгоритмом розв'язання класу всіх тих задач, які мають такі самі вхідні дані. На цій множині задач завжди знайдуться дві задачі, під час розв'язання яких досягаються найгірша і найкраща границі характеристики, що оптимізуються. Тому кожний, у тому числі оптимальний обчислювальний алгоритм розв'язання задачі, який нас цікавить, буде мати певну «потенційну спроможність». Якщо, наприклад, існують дві задачі з однаковими вхідними даними, точні розв'язки яких x_1 і x_2 є елементами метричного простору, причому відстань між ними $\rho(x_1, x_2) \geq d > 0$, то для кожного обчислювального алгоритму їхнього розв'язання отримується розв'язок x, що має властивість

$$\max \rho(x, x_i) \geq \frac{d}{2}. \tag{1}$$

Це означає, що не існує обчислювального алгоритму, який би отримував розв'язок розглянутої задачі з гарантованою точністю, меншою за $d/2$. Якщо потрібно підвищити точність розв'язку задачі, необхідно залучити додаткові відомості про неї. Тоді задача буде належати новому, більш «вузькому» класу задач, обчислювальні алгоритми розв'язання яких будуть мати нову, більш потужну «потенційну спроможність». Аналогічні міркування справедливі стосовно будь-якого іншого показника (характеристики) обчислювального алгоритму і задач.

Велике значення має отримання непокращуваних характеристик типу (1). У цьому випадку знак рівності досягатиметься на оптимальному обчислювальному алгоритмі і різниця між правою і лівою частинами в (1) для кожного обчислювального алгоритму буде характеристикою розриву між досліджуваним і оптимальним обчислювальним алгоритмом.

Розглянемо оптимальні алгоритми для задач обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій*

$$I(\omega) = \int_0^1 f(x) \sin \omega x \, dx, \tag{2}$$

у випадку, коли $f(x) \in F$ та інформація про $f(x)$ задана за допомогою не більше ніж N інформаційних операторів та $|\omega| \geq \pi$ (умова швидкої осциляції підінтегральної функції).

Для обчислення інтегралів (2), які мають досить широке коло застосувань, класичні формули інтегрування дають погану точність, оскільки похибка заокруглювання для $|\omega| > \pi$ буде значною і треба застосовувати квадратурні формули типу формул Файлона.

* У [5] розглядаються інші приклади швидкоосцилюючих функцій.

Розглянемо побудову оптимальних за точністю та близьких до них квадратурних формул обчислення інтегралів (2) в умовах найбільш повного використання інформації про підінтегральну функцію.

При цьому зменшується чебишовський радіус інформації області значень інтеграла (2) і тим самим покращується точність обчислення (2) на інтерполяційному класі функцій F_N [1].

Покращення точності відбувається за рахунок погіршення оцінки складності квадратурної формули, оскільки клас (F_N) враховує всю вихідну інформацію про задачу, яка входить і в квадратурну формулу, і в оцінки точності.

Таким чином, доцільно крім класів підінтегральних функцій F, які зазвичай вивчаються в теорії функцій і математичному аналізі, дослідити більш вузькі класи функцій F_N (інтерполяційні) та $F_{N,\varepsilon}$ (інтерполяційні з наближено заданою вхідною інформацією) [5, 6]. Саме класи $F_{N,\varepsilon}$ найкращим чином описують конкретну задачу, яку ми розв'язуємо.

Серед наукових шкіл, які розбудовують загальну теорію оптимальних алгоритмів, слід відзначити школи, які працюють у Каліфорнійському, Московському, Варшавському університетах, в Інститутах кібернетики та математики НАН України та Українській інженерно-педагогічній академії (м. Харків).

Відмінність української школи полягає у побудові оптимальних квадратурних і кубатурних формул не лише для класів підінтегральних функцій F, а також для класів F_N та $F_{N,\varepsilon}$. Всього розглянуто 53 класи підінтегральних функцій різної гладкості і для них отримано оптимальні за точністю та близькі до них квадратурні та кубатурні формули.

Для отримання результатів у класах F використано метод «капелюхів», розроблений у Московському державному університеті ім. Михайла Ломоносова, а в класах F_N, $F_{N,\varepsilon}$ — метод граничних функцій (МГФ), розроблений в Інституті кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України [1].

Розглянемо метод МГФ. Побудуємо $I^{\pm}(\omega)$ — верхню (мажоранту) і нижню (міноранту) границі можливих значень інтеграла $I(\omega)$ в області інтегрування, які досягаються на $f^{\pm}(x) \in F_N$ — відповідно мажоранти і міноранти класу $F_N \subset F$. Таким чином, задача зводиться до побудови функцій $f^{\pm}(x) \in F_N$, значення яких у вузлах $\{x_i\}_0^{N-1}$ повинні збігатися із значеннями f_i, $i = \overline{0, N-1}$: $f^{\pm}(x_i) = f_i^{\pm}(x) = f_i$, $i = \overline{0, N-1}$. Їх необхідно будувати з урахуванням поведінки осцилюючих функцій. Далі знаходимо чебишовський центр $I^*(\omega)$ і чебишовський радіус $\rho^*(\omega)$ області невизначеності розв'язку задачі, які представляють собою відповідно оптимальне за точністю значення інтегралу $I(\omega)$ і оптимальну оцінку похибки чисельного інтегрування $I(\omega)$ на класі F_N. Для використаної інформації про задачу жодна з квадратурних формул не може дати точність, кращу ніж $\rho^*(\omega)$. Для інтерполяційних класів F_N чебишовський радіус $\rho^*(\omega)$ збігається з оптимальною оцінкою [6].

Наведемо два результати стосовно розроблення та обґрунтування оптимальних квадратурних формул обчислення інтеграла (2) для $F \equiv Q_M$ (Q_M — клас обмежених функцій, що мають кусково-неперервні перші похідні, обмежені константою M) та $F_N \equiv W_{2,N,\varepsilon,\delta}$ (цей клас розглянемо нижче).

Теорема 1. Нехай $f(x) \in O_M$, $N \le |\omega|$ і на елементарних відрізках $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$, відбуваються коливання функції $\sin \omega x$. Квадратурна формула $R_1(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} f_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin \omega x \, dx$ наближеного обчислення $I(\omega)$ є асимптотично оптимальною в класі O_M з оцінкою зверху

$$V(O_M, R_1, \omega) \le \frac{2M}{\omega^2}\left(\left[\frac{|\omega|}{\pi}\right]+1\right). \tag{3}$$

Доведення. Для обґрунтування оцінки (3) наведемо вираз для «поганої» функції $f^*(x)$ класу O_M у випадку сильної осциляції підінтегральної функції.

Запишемо її у вигляді $f^*(x)=\varphi(x)\operatorname{sign}(\sin \omega x)$ і наведемо вираз для $\varphi(x)$ на відрізках $[x_i, x_{i+1}]$, $i=\overline{0, N-1}$:

а) на відрізку $[0, x_0]$ функція $\varphi(x)$ має вигляд

$$\varphi(x)=\begin{cases} M(x-x_{0,k_0}), & x\in\left[x_{0,k_0}, \frac{1}{2}(x_{0,k_0}+x_{0,k_0+1})\right], \\ M(x_{0,k_0+1}-x), & x\in\left[\frac{1}{2}(x_{0,k_0}+x_{0,k_0+1}), x_{0,k_0+1}\right], \end{cases}$$

$$p_0\ne 0,\ k_0=\overline{-1, p_0+1},\ x_{0,-1}=0,\ x_{0,p_0+1}=x_0,\ p_0=\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_0+\frac{1}{2}\right].$$

б) на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$, $i=\overline{0, N-1}$, функція $\varphi(x)$ має вигляд:

$$\varphi(x)=\begin{cases} M(x-x_i), & x\in\left[x_{i,k_i}, \frac{1}{2}(x_i+x_{i,0})\right], \\ M(x_{i,0}-x), & x\in\left[\frac{1}{2}(x_i+x_{i,0}), x_{i,0}\right], \\ M(x-x_{i,k_i}), & x\in\left[x_{i,k_i}, \frac{1}{2}(x_{i,k_i}+x_{i,k_i+1})\right], \\ M(x_{i,k_i+1}-x), & x\in\left[\frac{1}{2}(x_{i,k_i}+x_{i,k_i+1}), x_{i,k_i+1}\right], \\ M(x-x_{i,p_i}), & x\in\left[x_{i,p_i}, \frac{1}{2}(x_{i,p_i}+x_{i+1})\right], \\ M(x_{i+1}-x), & x\in\left[\frac{1}{2}(x_{i,p_i}+x_{i+1}), x_{i+1}\right], \end{cases}$$

$k_i=\overline{-1, p_i+1}$, $x_{i,-1}=x_i$, $x_{i,p_i+1}=x_{i+1}$, $i=\overline{0, N-1}$, p_i $(i=\overline{0, N-1})$ — число коливань функції $\sin \omega x$;

в) на відрізку $[x_{N-1}, 1]$ функція $\varphi(x)$ має вигляд

$$\varphi(x)=\begin{cases} M(x-x_{N-1,n}), & x\in\left[x_{N-1,n}, \frac{1}{2}(x_{N-1,n}+x_{N-1,n+1})\right], \\ M(x_{N-1,n+1}-x), & x\in\left[\frac{1}{2}(x_{N-1,n}+x_{N-1,n+1}), x_{N-1,n}\right], \end{cases}$$

$$n=\overline{-1, p_N+1},\ x_{N-1,-1}=x_{N-1},\ x_{N-1,p_N+1}=1,$$

де p_0, p_i, $i=\overline{0, N_1-1}$, p_N — відповідно число коливань функції $\sin \omega x$ на відрізках $[0, x_0]$, $[x_i, x_{i+1}]$, $[x_{N-1}, 1]$; $p_0=\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_0\right]$, $p_i=\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_{i+1}\right]-\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_i\right]$,

$p_N = \left[\frac{|\omega|}{\pi}\right] - \left[\frac{|\omega|}{\pi} x_{N-1} + 1\right]$; x_{i,k_i}, $k_i = \overline{0, p_i - 1}$, $i = \overline{0, N-1}$, — нулі функції $\sin \omega x$ на елементарному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$; $x_{0,k_0} = \left\{\left[\frac{|\omega|}{\pi} x_0 + 1\right] + (k_0 - 1)\right\} \frac{\pi}{|\omega|}$, $x_{i,k_i} = \left\{\left[\frac{|\omega|}{\pi} x_i + 1\right] + (k_i - 1)\right\} \frac{\pi}{|\omega|}$, $x_{i,p_i+1} = \left\{\left[\frac{|\omega|}{\pi} x_{i+1}\right]\right\} \frac{\pi}{|\omega|}$, $(x_{i,k_i} + x_{i,k_i+1})/2 = = \left\{\left[\frac{|\omega|}{\pi} x_i + 1\right] + k_i + \frac{1}{2}\right\} \frac{\pi}{|\omega|}$, $\frac{x_{0,k_0} + x_{0,k_0+1}}{2} = \frac{(2k_0 + 1)\pi}{2|\omega|}$, $x_{N-1,n} = \left\{\left[\frac{|\omega|}{\pi} x_{N-1} + 1\right] + (n-1)\right\} \frac{\pi}{|\omega|}$, $x_{N-1,p_N} = \left[\frac{|\omega|}{\pi}\right] \frac{\pi}{\omega}$.

Неважко переконатися, що $f^*(x) \in O_M$ і $f^*(x_i) = 0$, $i = \overline{0, N-1}$.

Доведення проведемо для квадратурної формули $R_1(\omega)$.

Отримаємо оцінку зверху для $V(O_M, R_1, \omega)$:

$$V(O_M, R_1, \omega) \le \sup_{f(x) \in O_M} \left| \int_0^1 f(x) \sin \omega x\, dx - \sum_{i=0}^{N-1} f_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin \omega x\, dx \right| =$$

$$= \sup_{f(x) \in O_L} \left| \left\{ \int_0^{x_0} (f(x) - f_0) \sin \omega x dx + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f_i) \sin \omega x\, dx + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{x_{N-1}}^{1} (f(x) - f_{N-1}) \sin \omega x\, dx \right\} \right| = \int_0^{x_0} f^*(x) \sin \omega x\, dx +$$

$$+ \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f^*(x) \sin \omega x dx + \int_{x_{N-1}}^{1} f^*(x) \sin \omega x\, dx = \frac{M}{\omega^2} \left\{ 2\left[\frac{|\omega|}{\pi} x_0\right] + \right.$$

$$+ \operatorname{sign}(\sin \omega x_0) \left[2 \sin \frac{\omega}{2} (x_{0,p_0} + x_0) - \sin \omega x_0 \right] +$$

$$+ \sum_{i=0}^{N-2} \left\{ 2\left\{ \left[\frac{|\omega|}{\pi} x_{i+1}\right] - \left[\frac{|\omega|}{\pi} x_i\right] \right\} + \operatorname{sign}(\sin \omega x_i) \left[2 \sin \frac{\omega}{2} (x_i + x_{i,0}) - \sin \omega x_i \right] + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sign}(\sin \omega x_{i+1}) \left[2 \sin \frac{\omega}{2} (x_i + x_{i,p_i}) - \sin \omega x_{i+1}] \right] \right\} + 2\left\{ \left[\frac{|\omega|}{\pi}\right] - \left[\frac{|\omega|}{\pi} x_{N-1}\right] \right\} +$$

$$+ \operatorname{sign}(\sin \omega x_{N-1}) \left[2 \sin \frac{\omega}{2} (x_{N-1} + x_{N-1,0}) - \sin \omega x_{N-1} \right] +$$

$$\left. + \operatorname{sign}(\sin \omega) \left[2 \sin \frac{\omega}{2} (x_{N-1,p_N} + 1) - \sin \omega \right] \right\}.$$

З геометричних міркувань очевидно, що

$$\int_{x_{i-1,p_{i-1}}}^{x_i} f^*(x) \sin \omega x + \int_{x_i}^{x_{i,0}} f^*(x) \sin \omega x \le \int_{x_{i-1,k_i}}^{x_{i,k_{i+1}}} f^*(x) \sin \omega x,$$

тобто

$$\frac{M}{\omega^2} \operatorname{sign}(\sin \omega x_i) \left\{ \left[2 \sin \frac{\omega}{2} (x_i + x_{i,0}) - \sin \omega x_i \right] + \right.$$

$$+\left[2\sin\frac{\omega}{2}(x_i+x_{i,p_i})-\sin\omega x_{i+1}\right]\Bigg]\Bigg\}\le\frac{2M}{\omega^2}, \tag{4}$$

$$i=\overline{0,\,N-1},\ x_{-1,p_{-1}}=x_{0,k_0},\ x_{0,0}=0,\ x_N=1.$$

Обчислимо

$$p_0+\sum_{i=0}^{N-2}p_i+p_N=\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_0\right]+\sum_{i=0}^{N-2}\left\{\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_{i+1}\right]-\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_i\right]\right\}+\left[\frac{|\omega|}{\pi}\right]-\left[\frac{|\omega|}{\pi}x_{N-1}\right]=\left[\frac{|\omega|}{\pi}\right]-N$$

.

(Випадок $\left[\frac{|\omega|}{\pi}\right]=N$ означає, що на відрізку $[0,1]$ нема коливань функції $\sin\omega x$).

Використовуючи співвідношення (4), остаточно маємо

$$V(O_L,R_1,\omega)=\frac{2M}{\omega^2}\left\{\left[\frac{|\omega|}{\pi}\right]-N\right\}+\frac{M}{\omega^2}\Bigg\{\operatorname{sign}(\sin\omega x_0)\times$$

$$\times\left\{2\sin\frac{\omega(x_0+x_{0,k_0})}{2}-\sin\omega x_0+2\sin\frac{\omega(x_0+x_{0,0})}{2}-\sin\omega x_0\right\}+$$

$$+\operatorname{sign}(\sin\omega x_1)\left\{2\sin\frac{\omega(x_1+x_{0,p_0})}{2}-\sin\omega x_1+2\sin\frac{\omega(x_{1,0}+x_1)}{2}-\sin\omega x_1\right\}+\ldots$$

$$\ldots+\operatorname{sign}(\sin\omega x_{N-1})\left\{2\sin\frac{\omega(x_{N-2,P_{N-2}}+x_{N-1})}{2}-\sin\omega x_{N-1}\right\}+$$

$$+\operatorname{sign}(\sin\omega x_{N-1,0})\left\{2\sin\frac{\omega(x_{N-1,0}+x_{N-1})}{2}-\sin\omega x_{N-1}\right\}+$$

$$+\operatorname{sign}(\sin\omega)\left\{2\sin\frac{w(1+x_{N,p_N})}{2}-\sin\omega\right\}\Bigg\}\le\frac{2L}{\omega^2}\left\{\left[\frac{|\omega|}{\pi}\right]+1\right\}.$$

Для доведення асимптотичної оптимальності квадратурної формули $R_1(\omega)$ обчислимо

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{V(O_M,R_1,\omega)}{V(O_M,\omega)}=\frac{\frac{2M}{\omega^2}\left\{\left[\frac{|\omega|}{\pi}\right]+1\right\}}{\frac{2M}{\omega^2}\left\{\left[\frac{|\omega|}{\pi}-\frac{1}{2}\right]+1+\frac{1}{2}(-1)^{\left[\frac{|\omega|}{\pi}+\frac{1}{2}\right]}\sin\omega\right\}}\le$$

$$\le\lim_{\omega\to\infty}\frac{1+\frac{\pi}{2|\omega|}}{1+\frac{\pi(-1)^{\left[\frac{|\omega|}{\pi}+\frac{1}{2}\right]}\sin\omega}{2|\omega|}}=1.$$

Крім того,

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{V(O_M,R_1,\omega)}{V(O_M,\omega)}\ge\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{1+\left(2+(-1)^{\left[\frac{|\omega|}{\pi}+\frac{1}{2}\right]}\sin\omega\right)\frac{\pi}{2|\omega|}}=1.$$

При цьому використовувалися співвідношення $\left[\frac{|\omega|}{\pi}\right] \le \frac{|\omega|}{\pi}, \left[\frac{|\omega|}{\pi} - \frac{1}{2}\right] >$ $> \frac{|\omega|}{\pi} - 1, \left[\frac{|\omega|}{\pi} - \frac{1}{2}\right] \le \frac{|\omega|}{\pi}$.

Таким чином,

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{V(O_M, R_1, \omega)}{V(O_M, \omega)} = 1.$$

Це доводить асимптотичну оптимальність квадратурної формули $R_1(\omega)$ та завершує доведення теореми.

Нехай $W_{2,N,\varepsilon,\delta}$ — клас функцій, що належать $W_{2,N,L}$ [6] з наближено заданими вхідними даними: $|\widetilde{f}_\nu - f_\nu| \le \varepsilon_\nu$, $|\widetilde{f}'_\nu - f'_\nu| \le \delta_\nu$, $\nu = \overline{1, N-1}$.

Розглянемо випадок, коли $f(x) \in W_{2,N,L,\varepsilon,\delta}$ і наведемо на відрізках $[x_\nu, x_{\nu+1}]$, $\nu = \overline{0, N-1}$, функції $f^{\pm}(x)$, на яких досягаються відповідно $I^{\pm}(\omega)$ на класі $W_{2,N,\varepsilon,\delta}$ та вирази для чебишовського центру та радіусу:

$$f^{\pm}(x) = \begin{cases} \widetilde{f}_\nu \pm \varepsilon_\nu \operatorname{sign}(\omega x_\nu) + \left\{ \widetilde{f}'_\nu + \dfrac{\eta_\nu^+ + \eta_\nu^-}{2} \pm \dfrac{\eta_\nu^+ - \eta_\nu^-}{2} \operatorname{sign}(\sin \omega x_\nu) \right\} \times \\ \times (x - x_\nu) \pm \dfrac{L}{2}(x - x_\nu)^2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_\nu), \; x \in [x_\nu, \widetilde{x}_\nu^{\pm}], \\ \widetilde{f}_{\nu+1} \pm \varepsilon_{\nu+1} \operatorname{sign}(\omega x_\nu) + \left\{ \widetilde{f}'_{\nu+1} + \dfrac{\eta_{\nu+1}^+ + \eta_{\nu+1}^-}{2} \pm \dfrac{\eta_{\nu+1}^+ - \eta_{\nu+1}^-}{2} \operatorname{sign}(\omega x_\nu) \right\} \times \\ \times (x - x_{\nu+1}) \pm \dfrac{L}{2}(x - x_{\nu+1})^2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_\nu), \; x \in [\widetilde{x}_\nu^{\pm}, x_{\nu+1}]. \end{cases} \tag{5}$$

Тут

$$\widetilde{x}_i^{\pm} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \pm \varphi_i, \; \varphi_i = \frac{s_i}{p_i}, \; s_i = \frac{\Delta x_i}{2}[\widetilde{f}_i' + \widetilde{f}'_{i+1} + 1/2(\eta_i^+ + \eta_i^- + \eta_{i+1}^+ + \eta_{i+1}^-) +$$

$$+ 1/2 \operatorname{sign}(\sin \omega x_i)(\eta_i^+ - \eta_i^- + \eta_{i+1}^+ - \eta_{i+1}^-)] - (\Delta \widetilde{f}_i - \Delta \varepsilon_i),$$

$$p_i = \Delta \widetilde{f}'_i + \frac{1}{2}(\Delta \eta_i^+ + \Delta \eta_i^-)(1 + \operatorname{sign}(\sin \omega x_i)) + L \operatorname{sign}(\sin \omega x_i) \Delta x_i,$$

η_i^+, η_i^- — відповідно максимально і мінімально допустимі розв'язки системи лінійних нерівностей

$$\begin{cases} -\delta_i \le \eta_i \le \delta_i, & i = \overline{0, N-1}, \\ -L\Delta x_i - \Delta \widetilde{f}_i' \le \eta_{i+1} - \eta_i \le L\Delta x_i - \Delta \widetilde{f}_i', & i = \overline{0, N-2}. \end{cases}$$

Сукупності функцій $f^+(x)$, $f^-(x)$ на відрізку $[0, 1]$ позначимо відповідно $f_{\varepsilon,\delta}^+(x)$, $f_{\varepsilon,\delta}^-(x)$.

Тоді

$$f^*(x) = \frac{1}{2}[f^+(x) + f^-(x)] =$$

$$= \begin{cases} \widetilde{f}_\nu + \left(\widetilde{f}' + \dfrac{1}{2}(\eta_\nu^+ + \eta_\nu^-) \right)(x - x_\nu), \; x \in [x_\nu, \bar{x}_\nu], \\ \dfrac{1}{2}[\widetilde{f}_\nu + \widetilde{f}'_\nu(x - x_\nu) + \widetilde{f}'_{\nu+1}(x - x_{\nu+1}) + \widetilde{f}_{\nu+1}] + \dfrac{L}{4} \operatorname{sign}(\Delta \widetilde{f}'_\nu) \times \\ \times \left[\dfrac{L}{2}(x - x_\nu)^2 + \dfrac{L}{2}(x - x_{\nu+1})^2 \right] + \dfrac{1}{2}\Delta \varepsilon_\nu + \dfrac{1}{4}\{[(1 + \operatorname{sign}(\Delta \widetilde{f}'_\nu))\eta_\nu^+ + \\ + (1 - \operatorname{sign}(\Delta \widetilde{f}'_\nu))\eta_\nu^-](x - x_\nu) + [(1 + \operatorname{sign}(\Delta \widetilde{f}'_\nu))\eta_{\nu+1}^- + \\ + (1 - \operatorname{sign}(\Delta \widetilde{f}'_\nu))\eta_{\nu+1}^+](x - x_{\nu+1})\}, \; x \in [\bar{x}_\nu, \bar{\bar{x}}_\nu], \\ \widetilde{f}_{\nu+1} + \left(\widetilde{f}'_{\nu+1} + \dfrac{1}{2}(\eta_{\nu+1}^+ + \eta_{\nu+1}^-) \right)(x - x_{\nu+1}), \; x \in [\bar{\bar{x}}_\nu, x_{\nu+1}]; \end{cases} \tag{6}$$

$$\varphi_{\varepsilon,\delta}(x)=\frac{1}{2}[f^{+}(x)-f^{-}(x)]=$$

$$=\begin{cases}\varepsilon_i+\frac{1}{2}(\eta_i^{+}-\eta_i^{-})(x-x_i)-\frac{L}{2}(x-x_i)^2, \ x\in[x_\nu,\bar{x}_\nu],\\ \frac{L}{4}[(x-x_i)^2-(x-x_{i+1})^2]+\frac{1}{2}(\varepsilon_i+\varepsilon_{i+1})+\frac{1}{4}\{[(1-\operatorname{sign}(\Delta\widetilde{f}_i'))\eta_i^{+}-\\ -(1-\operatorname{sign}(\Delta\widetilde{f}_i'))\eta_i^{-}](x-x_i)+[(1-\operatorname{sign}(\Delta\widetilde{f}_i'))\eta_{i+1}^{+}-(1-\operatorname{sign}(\Delta\widetilde{f}_i'))\eta_{i+1}^{-}]\times\\ \times(x-x_{i+1})\frac{1}{2}\operatorname{sign}(\Delta\widetilde{f}_i')[\widetilde{f}_i+\widetilde{f}_i'(x-x_i)-\widetilde{f}_{+1i}-\widetilde{f}_{i+1}'(x-x_{i+1})], \ x\in[\bar{x}_\nu,\bar{\bar{x}}_\nu],\\ \varepsilon_{i+1}+\frac{1}{2}(\eta_{i+1}^{+}-\eta_{i+1}^{-})(x-x_{i+1})-\frac{L}{2}(x-x_{i+1})^2, \ x\in[\bar{\bar{x}}_\nu,x_{\nu+1}];\end{cases} \quad (7)$$

$\bar{x}_\nu=\min(\widetilde{x}_\nu^{-},\widetilde{x}_\nu^{+})$, $\bar{\bar{x}}_\nu=\max(\widetilde{x}_\nu^{-},\widetilde{x}_\nu^{+})$

Теорема 2. Нехай $f(x)\in W_{2,N,L,\varepsilon,\delta}$, та виконуються такі умови:

У1) нехай $\{[|\omega|/\pi]+1\}$ нулів функцій $\sin\omega x$ на відрізку $[0,1]$ входять в число вузлів x_ν, $\nu=\overline{1,N}$, квадратурної формули;

У2) виконується рівність

$$\left|\frac{f_\nu'+f_{\nu+1}'}{2}\Delta x_\nu-\Delta\widetilde{f}_\nu-\frac{\Delta\widetilde{f}_\nu'}{4L}(\Delta\eta_\nu^{+}-\Delta\eta_\nu^{-})+\frac{\Delta x_\nu}{4}(\eta_\nu^{+}+\eta_{\nu+1}^{+}+\eta_\nu^{-}+\eta_{\nu+1}^{-})-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{8L}((\Delta\eta_\nu^{+})^2-(\Delta\eta_\nu^{-})^2)\right|=\left|\frac{\Delta\widetilde{f}_\nu'^{\,2}}{4L^2}-\frac{L}{4}\Delta x_\nu^2+\Delta\varepsilon_\nu+\right.$$
$$\left.+\frac{\Delta\widetilde{f}_\nu'^{\,2}}{4L}(\Delta\eta_\upsilon^{+}-\Delta\eta_\nu^{-})+\frac{\Delta x_\nu}{4}(\eta_\nu^{-}+\eta_{\nu+1}^{-}-\eta_\nu^{+}-\eta_{\nu+1}^{+})+\frac{1}{8L}((\Delta\eta_\nu^{+})^2-(\Delta\eta_\nu^{-})^2)\right|.$$

Тоді квадратурна формула $R_2(\omega)=\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f^{*}(x)\sin\omega x\,dx$ наближеного обчислення $I(\omega)$ є оптимальною за точністю для $N\ge|\omega|$ та $N=[|\omega|/\pi]+1$.

Доведення зводиться до побудови $I^{+}(\omega)$ і $I^{-}(\omega)$ на класі $W_{2,N,\varepsilon,\delta}$. При цьому використовують співвідношення (5)–(7). Оптимальна оцінка $\delta=\delta(W_{2,N,L,\varepsilon,\delta},\{\widetilde{f}_\nu\}_0^{N-1},$ $\{\widetilde{f}_\nu'\}_0^{N-1},\{x_\nu\}_0^{N-1},\{\varepsilon_\nu\}_0^{N-1},\{\delta_\nu\}_0^{N-1},\omega)$ збігається з чебишовським радіусом і визначається таким чином ($[a,b]\equiv[0,1]$):

$$\delta=\frac{1}{2}\left\{\int_0^1 f_{\varepsilon,\delta}^{+}(x)\sin\omega x\,dx-\int_0^1 f_{\varepsilon,\delta}^{-}(x)\sin\omega x\,dx\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N-1}\{f^{+}(x)-f^{-}(x)\}\sin\omega x dx=\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}\varphi_{\varepsilon,\delta}(x)\sin\omega x\,dx.$$

Далі доведення аналогічне доведенню теореми 2.16 [6].

Теорема 2 справедлива, коли задано значення $\{\widetilde{f}_\nu\}_0^{N-1}$, $\{\widetilde{f}_\nu'\}_0^{N-1}$, $\nu=\overline{0,N-1}$, у вузлових точках. Слід зазначити, що в деяких роботах, наприклад [5], наведено вирази чебишовських центрів з використанням сплайн-апроксимацій спеціального вигляду для таких класів функцій:

- $C_{2,L,N,\varepsilon}$ — класу функцій $f(x)$, які мають неперервні перші і обмежені константою L другі похідні і які задовольняють умові $|f(x_\nu)-y_\nu|\le\varepsilon_\nu$, $\nu=\overline{0,N-1}$, і y_ν, ε_ν — задані дійсні числа;
- $C_{s+1,L,N}=\{\varphi\,|\,\varphi^{(k)}(x_\nu)=\varphi_\nu,\ k=\overline{0,s},\ \nu=\overline{1,N},\ |\varphi^{(s+1)}(x)|\le L\}$.

Розглянуті класи є близькими до класів $W_{2,N}$ і $W_{2,N,\varepsilon,\delta}$ для $s=1$. Наведені в [5] результати можна використати для побудови оптимальних (або близьких до них) квадратурних формул обчислення $I(\omega)$ у цих класах.

ОПТИМАЛЬНІ ЗА ШВИДКОДІЄЮ ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ АЛГОРИТМИ

Якщо потрібно розв'язати високоточну задачу, то слід використовувати оптимальні за точністю або близькі до них алгоритми. Якщо треба розв'язувати задачу в реальному масштабі часу, то потрібно використовувати оптимальні за швидкодією обчислювальні алгоритми.

Нехай для задачі $P(I)$: $I=(i_1, i_2, \dots, i_N)$, $I \in \Im$, — вхідні дані, M — множина алгоритмів A розв'язання задачі із заданою точністю ε, $\varepsilon>0$, на фіксованому комп'ютері та $Q(A, I, \varepsilon)$ — кількість арифметичних операцій для реалізації алгоритму A. Розглянемо характеристики

$$Q_N(A,\varepsilon)=\sup_{I\in\Im} Q(A,I,\varepsilon), \qquad Q_N(\varepsilon)=\inf_{A\in M} Q_N(A,\varepsilon).$$

Алгоритм, на якому досягається $Q_N(\varepsilon)$, назвемо оптимальним за швидкодією. Якщо $Q_N(A^*, \varepsilon)=Q_N(\varepsilon)+\xi$, $\xi>0$, то A^* назвемо оптимальним за швидкодією з точністю до ξ. Якщо ж $\xi=o[Q_N(\varepsilon)]$ або $\xi=O[Q_N(\varepsilon)]$, то A^* назвемо відповідно асимптотично оптимальним або оптимальним за порядком за швидкодією алгоритмом.

Відзначимо деякі результати з цієї галузі досліджень. Це насамперед праці В.М. Глушкова з алгебри алгоритмів, А.О. Самарського з економічних різницевих схем, М.М. Яненка про метод дробових кроків, Г.І. Марчука про ітеративні процеси, І.Я. Акушського, В.М. Амербаєва, Я.М. Николайчука про системи залишкових класів, А.В. Єфімова з мультиплікативних інтегралів Фур'є, Р.П. Брента (R.P. Brent) зі змінної розрядності, А. Бородіна (A. Borodin), І. Монро (I. Munro), І. Міклошка (J. Miklosko) з алгоритмів над алгебраїчними структурами, А. Ахо, Дж. Хопкрофта, Дж. Ульмана з теорії складності обчислень, В.К. Задіраки з швидких алгоритмів розв'язання задач цифрової обробки сигналів, а також роботи В.М. Глушкова, О.А. Летичевського, Ю.В. Капітонової, І.М. Молчанова, О.М. Хіміча, Д.К. Фаддєєва, В.М. Фаддєєвої, В.В. Воєводіна, Ф. Штрассена, Д. Геллера, Дж. Трауба, І. Міклошка з паралельних обчислень.

Не можна не відмітити роботи Дж. Кулі (J.W. Cooley) і Дж. Тьюкі (J.W. Tukey), У. Джентльмена (W.M. Gentleman) і Г. Санде (G. Sande), В.Штрассена (V. Strassen), Г. Нуссбаумера (H.J. Nussbaumer), Дж. Монгестерна (J. Morgenstern), Ш. Винограда (S. Winograd) і багатьох інших авторів, дослідження яких є суттєвим вкладом в оптимізацію алгоритмів обчислення лінійних дискретних перетворень.

Особлива потреба у швидких алгоритмах виникає у разі використання методів математичного моделювання, які зводять сучасні задачі до великорозмірних надскладних обчислювальних задач. Наприклад, під час математичного моделювання характеристик міцності літака в цілому виникає потреба у розв'язанні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, порядок якої становить понад 30 млн. Постає проблема подолання трансобчислювальної складності. При цьому високопродуктивні обчислення і суперкомп'ютерні технології на основі паралельних обчислень є одним з основних інструментів математичного моделювання у наукових та інженерних дослідженнях.

Відомо, що під час розв'язання наукових та інженерних задач на комп'ютері користувачі одержують комп'ютерні моделі, які не мають фізичного змісту. Це відбувається через похибки у вихідних даних, відмінності властивостей математичних і комп'ютерних моделей, похибки заокруглювання. Похибки заокруглювання можуть бути суттєвими у випадку великої обчислювальної складності задачі.

Тому актуальними задачами є контроль накопичення похибки заокруглювання і, як наслідок, необхідність переходу до багаторозрядної арифметики. Тут важливим є розроблення ефективних за швидкодією алгоритмів оперування з багаторозрядними числами з використанням різних моделей обчислень [8].

Зокрема в роботі [8] проаналізовано складність за числом векторних однослівних операцій множення для реалізації багаторозрядної операції множення в паралельній моделі обчислень (GPU).

Швидкі алгоритми виконання арифметичних операцій і обчислення криптопримітивів найчастіше використовують для підвищення продуктивності алгоритмів двоключової криптографії [4] та створення стійких стеганографічних систем [7].

РЕЗЕРВИ ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ

Складні задачі завжди були каталізатором створення нових поколінь комп'ютерів та розвитку чисельних методів. Дослідження показують, що використання оптимальних за точністю та швидкодією обчислювальних алгоритмів у випадку розв'язання важливих класів задач (оптимізації, цифрової обробки сигналів тощо) дає ефект, порівняний з ефектом від використання нової елементної бази та архітектури комп'ютера [9].

Наведемо деякі резерви оптимізації обчислень.

1. Резерви зменшення міри похибок, зумовлених:

а) неточністю вхідних даних ($\rho(E_{H})$):

— уточнення класу задач;

— коригування вхідної інформації;

— підвищення точності вхідної інформації;

б) методом ($\rho(E_{\mu})$):

— використання оптимальних та оптимальних за порядком точності обчислювальних алгоритмів (ОА);

— оптимізація інформаційного набору функціоналів (наприклад, оптимальна сітка вузлів під час чисельного інтегрування);

— збільшення кількості функціоналів в інформаційному наборі;

— перехід в інший клас інформаційних операторів, що забезпечує більший оптимальний порядок ОА, ніж в даному класі інформаційних операторів;

— повне використання вхідної інформації для звуження класу задач;

в) заокруглюванням ($\rho(E_{\tau})$):

— використання методів оптимального порядку точності для високоточних обчислень;

— звуження класу задач (з метою зменшення кількості функціоналів в інформаційному наборі);

— використання схем обчислень, що мінімізують швидкість накопичення похибки заокруглювань;

— збільшення оптимального порядку точності шляхом вибору класу інформаційних операторів;

— збільшення довжини розрядної сітки;

— вибір та моделювання правила заокруглювання;

— використання оптимізованого інформаційного набору функціоналів.

2. Резерви зменшення процесорного часу:

— уточнення класу задач;

— використання методів оптимального порядку точності;

— використання точної вхідної інформації (наслідок — менш жорсткі обмеження на похибки методу та заокруглювань);

— покращення точності оцінок похибок методу та заокруглювань;

— підвищення точності обчислення параметрів обчислювального процесу;

— узгодження ОА з архітектурою комп'ютера;

— «швидка» арифметика;

— розпаралелювання обчислень;

— спеціалізовані обчислювачі (вибір архітектури комп'ютера, що кращим чином узгоджується з ОА розв'язання задач даного класу).

Зазначені резерви оптимізації обчислень використовуються в сучасних комп'ютерних технологіях розв'язання задач прикладної та обчислювальної математики із заданими характеристиками якості за точністю та швидкодією [10].

НАУКОЄМНІ КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ІЗ ЗАДАНИМИ ЗНАЧЕННЯМИ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЯКОСТІ

Концепція цієї технології є такою:

— виходячи з умов використання шуканого розв'язку прикладної задачі, яка описується деякою математичною моделлю, задають вимоги до точності, з якою слід обчислити наближений розв'язок відповідної задачі обчислювальної математики; до процесорного часу обчислення розв'язку; до деяких інших характеристик обчислювального процесу побудови розв'язку, наприклад, до необхідної оперативної пам'яті комп'ютера, до інтерпретації одержаного розв'язку з урахуванням оцінок характеристик цього розв'язку і обчислювального процесу;

— з деякої множини відомих (або тих, що розробляються) ОА і програм, орієнтованих на розв'язання класу задач обчислювальної математики, до якого зведено задану прикладну задачу, за допомогою оцінок зазначених характеристик знаходять (або розробляють) ОА-програму, яка зможе забезпечити на відповідному комп'ютері побудову розв'язку прикладної задачі із заданими обмеженнями на значення цих характеристик якості, або встановлюють, що ОА-програма із вказаними властивостями для розв'язуваної задачі при заданій вхідній інформації на цей час не існує;

— за допомогою розробленої або наявної ОА-програми з потрібними властивостями обчислюють розв'язок прикладної задачі із заданими значеннями характеристик якості у разі використання обраного комп'ютера і програмної системи.

Постановка задачі: обчислити наближений розв'язок задачі за таких умов:

$$\rho(E(I, X, Y)) \le \varepsilon, \tag{8}$$

$$T(\varepsilon, I, X, Y) \le T_0(\varepsilon), \tag{9}$$

$$M(\varepsilon, I, X, Y) \le M_0(\varepsilon), \tag{10}$$

де $\rho(\cdot)$ — деяка міра похибки наближеного розв'язку задачі; ε, $T_0(\varepsilon)$, $M_0(\varepsilon)$ — обмеження, задані на основі вимог до математичного моделювання і властивостей вхідної інформації (об'єму, точності, структури).

Наближений розв'язок, для якого виконана умова (8), називається ε-розв'язком. Обчислювальний алгоритм, який задовольняє умови (8), (9), називається Т-ефективним. Послідовності кроків комп'ютерної технології (КТ) наведено в [10].

Запропонована і покроково описана інформаційно-комп'ютерна технологія розв'язування задач прикладної та обчислювальної математики із заданими значеннями характеристик якості розв'язку (8)–(10) у випадку її застосування до конкретних прикладних задач (або класів задач) дає можливість:

— здійснити системний підхід як до самої постановки прикладної задачі, так і до її розв'язання;

— вивчити обчислювальну ситуацію для розв'язання прикладної задачі і виявити усі кроки, які потрібно здійснити, щоб забезпечити розв'язання задачі із заданими значеннями (8)–(10) характеристик якості розв'язку;

— виходячи з обчислювальної ситуації, здійснити розробку відповідної ОА-програми для розв'язання задачі;

— використати за наявності такої можливості для розв'язання прикладної задачі відповідну програму з відомих програмних систем (наприклад, Mathematica, Matlab, Mathcad або Pyton), здійснюючи (за потреби) тестування для виявлення тієї програми, яка забезпечує розв'язання прикладної задачі із заданими значеннями характеристик якості розв'язку;

— використати запропоновану інформаційно-комп'ютерну технологію для розв'язання прикладної задачі з підвищеними вимогами до значень (8)–(10) характеристик якості її розв'язку.

МІЖНАРОДНІ НАУКОВІ ФОРУМИ «ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ»

Більшість результатів з теорії похибок, теорії обчислень, загальної теорії оптимальних алгоритмів, теорії тестування якості прикладного програмного забезпечення, сучасних комп'ютерних технологій розв'язання задач із заданою якістю, отриманих в Україні та за її межами, було представлено на Міжнародних наукових форумах «Питання оптимізації обчислень» [11, 12].

На сьогоднішній день проведено 45 міжнародних наукових форуми з питань оптимізації обчислень. Наукові форуми згуртовують навколо себе фахівців з обчислювальної і прикладної математики. В Україні більше немає таких наукових колективів, які б провели стільки ж наукових математичних форумів. Це свідчить про те, що напрям наукових досліджень був визначений вдало і надалі завжди відповідав основним актуальним проблемам в обчислювальній математиці.

Розглянемо основні напрямки розвитку теорії обчислень.

1. Аналіз точності та ефективності обчислювальних алгоритмів. Перший науковий форум відбувся в 1969 р. На той час ситуація в обчислювальній математиці була такою: кількість методів розв'язання типових задач стрімко зростала, а критеріїв їх порівняння не було. Тому зусилля фахівців з обчислювальної математики Інституту кібернетики були спрямовані на розвиток теорії похибок обчислень. Зокрема, необхідно врахувати і оцінити всі джерела похибок, які реально супроводжують обчислювальний процес. Це має принципове значення, оскільки забезпечує можливість дати гарантію якості наближеного розв'язку задачі. Запропоновано загальні схеми оцінок повної похибки обчислювального алгоритму, яка складається з таких похибок: неусувної, методу та заокруглення [1].

Значну увагу було приділено якості оцінок похибок та методам їх отримання [2].

2. Виявлення та уточнення апріорної інформації про задачу. Апріорна інформація про задачу (гладкість вхідної інформації або розв'язку задачі, константи, які обмежують відповідні похідні, опуклість функцій, кількість точок перегину тощо) входить до алгоритму розв'язання задачі, а також в оцінки якості наближеного розв'язку. Вона використовується також для «занурення» задачі у більш вузький клас для покращення потенційної спроможності чисельного методу.

Якщо апріорна інформація неточна, то краще нею не користуватися, тому що на основі такої інформації можна отримати хибне уявлення про якість наближеного розв'язку задачі. Іншими словами, задача може бути розв'язана з потрібною якістю, але оцінки цього не покажуть. Щоб цього уникнути, доцільно використовувати алгоритми виявлення та уточнення апріорної інформації про задачу [5]. При цьому погіршиться оцінка складності алгоритму, але покращиться оцінка точності. Якщо ефект від зменшення кількості операцій неважко підрахувати, то ефект від покращення точності — важко. Останній може бути досить великим: дасть змогу уникнути різного роду катастроф, перевести задачу із розряду нерозв'язних до розряду розв'язних тощо. Отже, виявлення та уточнення апріорної інформації про задачу є резервом оптимізації обчислень, який може бути використаний у відповідних комп'ютерних технологіях розв'язання задач обчислювальної та прикладної математики.

3. Вибір інформаційного оператора. Найчастіше використовується сітковий інформаційний оператор, тобто коли функція відома у вузлах сітки. Для задач апроксимації, чисельного інтегрування, математичної фізики, мінімізації функцій такий інформаційний оператор буде найкращим за точністю розв'язання відповідного класу задач, втім для інших класів задач ситуація інша. Для розв'язання задачі Коші для системи диференціальних рівнянь, задач інерційної навігації найкращим буде інформаційний оператор, який задає середнє значення функції на елементарному відрізку; для розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма II роду найкращим буде оператор, що задає перші коефіцієнти розкладу функції в ряд Фур'є; для сканування морського дна найкращим буде інформаційний оператор, який задає інформацію на лініях, а для задач комп'ютерної томографії — на площинах тощо [6].

Для кожного класу задач існує найкращий інформаційний оператор у тому розумінні, що в разі його використання похибка наближеного розв'язку задачі буде меншою. Вдалий підбір інформаційного оператора для задачі можна вважати одним з резервів оптимізації обчислень.

4. Оптимальні за точністю та швидкодією алгоритми. Ця тематика почала розвиватись для типових класів задач обчислювальної математики з 1970 р. З 1972 р. вона розглядається і на наших наукових форумах.

Одним з основних критеріїв оптимальності наближеного розв'язку задач може бути вимога його максимальної точності (чи мінімальної похибки) за даними ресурсами, які можна використовувати в процесі розв'язання задачі.

Для побудови оптимальних алгоритмів розв'язання тих чи інших класів задач використовують метод «капелюхів» М.С. Бахвалова та метод граничних функцій, розроблений в Інституті кібернетики АН УРСР. Перший метод використовується для оцінок знизу оптимальної оцінки [2], другий — для побудови оптимальних оцінок та оптимальних алгоритмів для більш вузьких класів задач (інтерполяційних [2]), які максимально використовують апріорну інформацію про задачу.

Звуження класу задач дає змогу покращити (не збільшити) оптимальну оцінку порівняно із стандартним підходом, проте за рахунок погіршення оцінок складності. Це також є резервом оптимізації обчислень.

Оптимізація за швидкодією алгоритмів конче потрібна, наприклад, коли треба забезпечити розв'язання задач у реальному часі, а також розв'язання задач трансобчислювальної складності та в інших ситуаціях.

У цій проблематиці для конструювання швидких алгоритмів широко використовують теорію швидких ортогональних перетворень, методи паралельної математики, комп'ютерну арифметику багаторозрядних чисел [4, 8], спеціалізовані обчислювачі (вибір архітектури комп'ютера, що краще узгоджується з обчислювальним алгоритмом розв'язання задач даного класу).

5. Моделі обчислень. Більшість оцінок складності обчислювальних алгоритмів під час розв'язання певних класів задач отримано для послідовної та паралельної моделей обчислень. Відомо, що оцінка складності залежить від використовуваної моделі обчислень. Є випадки, коли оцінки суттєво відрізняються в різних моделях обчислень, а є такі, коли оцінки не відрізняються за порядком.

Наприклад, для розв'язання задачі факторизації чисел оцінка складності в послідовній моделі обчислень експоненційна (від довжини числа), а у квантовій моделі обчислень — поліноміальна. Хоча інші задачі (наприклад, пакування ранця, розв'язання нелінійних булевих рівнянь та інші) як були «складними» для послідовної моделі обчислень, так і залишаються «складними» для квантової моделі обчислень. Вибір моделі обчислень може слугувати резервом оптимізації обчислень.

6. Комп'ютерні технології розв'язання задач прикладної та обчислювальної математики з заданими значеннями характеристик якості за точністю та швидкодією. Наведені вище резерви оптимізації обчислень, а також теорію похибок обчислень використовують в сучасних комп'ютерних технологіях знаходження ε-розв'язку задач за заданий комп'ютерний час [10].

Технологія, згідно з отриманими проміжними результатами, підказує, яким чином, користуючись оцінками похибок обчислень, оптимальними алгоритмами розв'язання задач та використовуючи інші резерви оптимізації обчислень, знайти обчислювальний алгоритм-програму [10], яка зможе або забезпечити на відповідному комп'ютері побудову розв'язку прикладної задачі із заданими обмеженнями на значення характеристик якості, або встановити, що його із вказаними властивостями для розв'язуваної задачі при заданій вхідній інформації на цей час не існує.

Потім за допомогою розробленого або наявного з необхідними властивостями обчислювального алгоритму-програми обчислюється розв'язок прикладної задачі із заданими значеннями характеристик якості у разі використання фіксованого комп'ютера та програмного забезпечення. Напрямок з розроблення відповідних комп'ютерних технологій почали розглядати на наукових форумах з 2000 р.

ПЕРСПЕКТИВИ РОЗВИТКУ ДОСЛІДЖЕНЬ З ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ

На сьогодні основними актуальними напрямками досліджень є:

— подальший розвиток теорії похибок;

— розвиток загальної теорії оптимальних алгоритмів;

— розроблення паралельних алгоритмів розв'язання типових задач обчислювальної математики;

— урахування неточності задання вхідної інформації;

— використання різних моделей обчислень;

— розроблення комп'ютерних технологій знаходження ε-розв'язків задач за заданий процесорний час конкретних типових класів задач прикладної та обчислювальної математики;

— використання хмарних технологій, особливо для розв'язання задач трансобчислювальної складності;

— приклади розв'язання важливих прикладних задач.

Сподіваємося, що наведена вище тематика зацікавить молодих вчених, аспірантів та студентів і вони до неї приєднаються.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М. Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів та суміжні питання. Київ: Наук. думка, 2012. 400 с.
2. Задірака В.К., Сергієнко І.В. Від наукового результату до комп'ютерної технології. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2008. № 2. С. 7–28.
3. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. Москва: Наука, 1970. 564 с.
4. Задірака В.К., Олексюк О.С. Комп'ютерна арифметика багаторозрядних чисел. Київ: Економічна думка, 2003. 264 с.

5. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій із застосуванням нових інформаційних операторів. Київ: Наук. думка, 2017. 336 с.

6. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М., Мельникова С.С, Нечуйвітер О.П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування. Т. 1. Алгоритми. Київ: Наук. думка, 2011. 448 с.

7. Задірака В.К, Швідченко І.В. Шляхи підвищення стеганостійкості спектральних алгоритмів. *Праці міжнародної наукової школи-семінару «Питання оптимізації обчислень» (ПОО-XLII) присвяченої 85-річчю від дня народження академіка В.С. Михалевича* (Київ, 21–25 вересня 2015 р.). Київ, 2015. С. 150.

8. Терещенко А.К., Задирака В.К. Оценка сложности операций умножения многоразрядных чисел в параллельной модели вычислений. *Компьютерная математика*. 2016. № 1. С. 58–71.

9. Задирака В.К., Мельникова С.С. Цифровая обработка сигналов. Киев: Наук. думка, 1993. 294 с.

10. Сергиенко И.В., Задирака В.К., Бабич М.Д, Березовский А.К., Бесараб П.Н., Людвиченко В.А. Компьютерные технологии решения задач прикладной и вычислительной математики с заданными значениями характеристик качества. *Кибернетика и системный анализ.* 2006. № 5. С. 33–41.

11. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Бабич М.Д. Питання оптимізації обчислень (1969–2009): Збірник науково-методичних та навчально-організаційних матеріалів. 2-ге вид., доповн. Київ: Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2009. 187 с.

12. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Швідченко І.В. Наукова тематика міжнародних математичних форумів з питань оптимізації обчислень. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. фізично-математичні науки.* 2017. Вип. 15. С. 189–194.

Надійшла до редакції 31.05.2018

В.К. Задирака

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕЗЕРВОВ ОПТИМИЗАЦИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ

Аннотация. В статье рассмотрены этапы развития исследований по оптимизации вычислений в Украине, в частности в Институте кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, касающихся элементов теории погрешностей, оптимальных по точности и быстродействию вычислительных алгоритмов, наукоемких компьютерных технологий решения задач вычислительной и прикладной математики с заданными значениями характеристик качества.

Ключевые слова: вычислительный алгоритм, приближенное решение, погрешность приближенное решение, оптимизация алгоритмов, резервы оптимизации вычислений, компьютерные технологии.

V.K. Zadiraka

USING RESERVES OF OPTIMIZATION OF CALCULATIONS TO SOLVE COMPLEX PROBLEMS

Abstract. The paper considers stages of the development of studies in optimization of computation in Ukraine, in particular, at the V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, related to elements of the theory of errors, computational algorithms that are optimal in terms of accuracy and speed, high-tech computer technologies for solving problems in computational and applied mathematics with given values of quality characteristics.

Keywords: computational algorithm, approximate solution, error of approximate solution, optimization of algorithms, optimization reserves of computation, computer technologies.

Задірака Валерій Костянтинович,
академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач відділу Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: zvk140@ukr.net.