УДК 519.6

В.А. СТОЯН

МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В ЗАДАЧАХ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНО ПРЕОБРАЗУЮЩИХ СИСТЕМ. II. СИСТЕМЫ С АДИТИВНО ВЫДЕЛЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Аннотация. Построены псевдорешения дискретно преобразующих систем, линейная часть которых дополнена нелинейностями, полученными после декартового преобразования входного вектора или итерационного уточнения матричного ядра преобразователя. Исследованы точность и однозначность множества среднеквадратических приближений к обращению математической модели преобразователя. Рассмотрены квадратически нелинейные системы и системы с произвольным порядком нелинейности.

Ключевые слова: псевдообращение, нелинейные дискретно преобразующие системы, нелинейные алгебраические системы, нелинейные итерационно уточняемые системы.

ВВЕДЕНИЕ

Данная публикация является продолжением [1], в которой идеи псевдообращения классических линейно определенных преобразователей [2–4] использовались для задач построения псевдообращений нелинейных дискретно преобразующих систем [5, 6]. При этом предлагались алгоритмы построения и исследования точности и однозначности псевдорешений нелинейных алгебраических систем, полученных путем двух- и несколько кратного декартового умножения линейно преобразованного входного вектора, а также путем его итерационного уточнения. Далее ставятся и решаются задачи псевдообращения дискретно преобразующих систем, в которых рассмотренные в [1] нелинейности являются дополнениями к классическому алгебраически определенному преобразователю. Как и в [1], для рассматриваемых систем строятся множества решений (если они есть) или наилучших среднеквадратитческих приближений к нему (если не существует точного решения). Как и в [1], записываются условия однозначности построенных множеств. Полученные математические результаты просты и доступны для компьютерных реализаций и могут согласно методики [4] применяться для задачи псевдообращения интегральных и функциональных преобразователей, а следовательно, и на задачи [6] математического моделирования нелинейных неполно определенных пространственно распределенных систем.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим процессы и явления, дискретно определенный вход $\bar{u} \in R^M$ которых преобразуется в выходной вектор $\bar{y} \in R^L$. Будем исходить из классической алгебраически линейной модели такого преобразователя, которую запишем в виде

$$A_0 \bar{u} = \bar{y}, \qquad (1)$$

где $A_0 \in R^{L \times M}$ — матричное ядро преобразователя.

Рассмотрим случай, когда достаточно полно исследованная математическая модель (1) дополняется нелинейной частью $F(\bar{u})$ так, чтобы

$$A_0 \bar{u} + F(\bar{u}) = \bar{y}, \qquad (2)$$

при заданных $(L\times M)$-мерных матрицах $A_0,\ldots,A_N$:

$$F(\bar u)=A_1\bar u\otimes A_2\bar u, \tag{3}$$

$$F(\bar u)=(A_1\bar u,\ldots,A_M\bar u)\bar u, \tag{4}$$

$$F(\bar u)=A_1\bar u\otimes A_2\bar u\otimes\ldots\otimes A_N\bar u, \tag{5}$$

$$F(\bar u)=((\ldots(A_{i_1i_2\ldots i_N}\bar u,\, i_N=\overline{1,M})\bar u\ldots)\bar u,\, i_1=\overline{1,M})\bar u. \tag{6}$$

При этом, максимально использовав результаты [1], где система (2) рассматривалась при $A_0\equiv 0$, построим множества

$$\Omega_u=\{u:||(A_0u+F(u))-\bar y||^2\to\min_u\} \tag{7}$$

для $F(\bar u)$, определенных согласно (3)–(6).

Как и в [1], запишем условия однозначности множества (7) и оценим точность $\varepsilon_u=\min\limits_u||(A_0u+F(u))-\bar y||^2$ его элементов по отношению к (2). При этом будем исходить [1] из того, что для системы $A_0\bar u=\bar y$ во множестве

$$\Omega_u=\{u:u=A_0^+\bar y+v-A_0^+A_0v\quad\forall v\in R^M\},\; v\equiv 0,$$

если $\det A^{\mathrm T}A\succ 0$, и

$$\varepsilon_u=\min_u||A_0u-\bar y||^2=\bar y^{\mathrm T}\bar y-\bar y^{\mathrm T}A_0A_0^+\bar y.$$

СИСТЕМЫ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Адитивно определенные нелинейности второго порядка. Рассмотрим задачу (2), (3), (7), которая является обобщением задачи псевдообращения системы $A_1\bar u\otimes A_2\bar u=\bar y$ [1].

В развитие методики [1] решения задачи построения

$$\Omega_u=\{\bar u:\;||A_1\bar u\otimes A_2\bar u-\bar y||^2\to\min_u\}$$

введем в рассмотрение L-мерные векторы

$$y_i=A_i\bar u\quad(i=\overline{0,2}), \tag{8}$$

через которые соотношеиями

$$\bar u=A_i^+y_i\quad(i=\overline{0,2}) \tag{9}$$

дадим определение вектора $\bar u$ так, чтобы $\bar u=\arg\min\limits_{u\in\Omega_{ui}}||u||^2$, где $\Omega_{ui}=\{u:||A_iu-y_i||\to\min\limits_u\}$.

При этом точность, с которой псевдорешения (9) согласуются с системами (8), определяется величинами

$$\varepsilon_i^2=\min_{u\in\Omega_{ui}}||A_iu-y_i||^2=y_i^{\mathrm T}y_i-y_i^{\mathrm T}A_iA_i^+y_i\quad(i=\overline{0,2}). \tag{10}$$

Для построения вектора y_i $(i\in\{0,1,2\})$, наилучшего (по среднеквадратическому критерию) для определенного соотношением (9) вектора $\bar u$, кроме значений ε_i^2 $(i=\overline{0,2})$, будем учитывать, что

$$A_1A_0^+y_0\otimes A_2A_0^+y_0+y_0=\bar y,$$

$$y_1\otimes A_2A_1^+y_1+A_0A_1^+y_1=\bar y,$$

$$A_1A_2^+y_2\otimes y_2+A_0A_2^+y_2=\bar y.$$

Для построения векторов y_i $(i=\overline{0,2})$ таких, чтобы

$$\| A_1 A_0^+ y_0 \otimes A_2 A_0^+ y_0 + y_0 - \bar{y} \|^2 \to \min_{y_0}, \tag{11}$$

$$\| y_1 \otimes A_2 A_1^+ y_1 + A_0 A_1^+ y_1 - \bar{y} \|^2 \to \min_{y_1}, \tag{12}$$

$$\| A_1 A_2^+ y_2 \otimes y_2 + A_0 A_2^+ y_2 - \bar{y} \|^2 \to \min_{y_2}, \tag{13}$$

введем в рассмотрение векторы

$$\bar{y}_p = (y_{p_1}, \ldots, y_{p_L}, \operatorname{str}((y_{p_i} y_{p_j}, j=\overline{1,L}), i=\overline{1,L}))^{\mathrm{T}} \quad (p=\overline{0,2})$$

и матрицы

$$\bar{A}_0 = \operatorname{col}((\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1}, 1, \underbrace{0,\ldots,0}_{L-i}, \operatorname{str}(([A_1 A_0^+]_{il} [A_2 A_0^+]_{ik}, k=\overline{1,L}), l=\overline{1,L})), i=\overline{1,L}),$$

$$\bar{A}_1 = \operatorname{col}((\operatorname{str}([A_0 A_1^+]_{ij}, j=\overline{1,L}), \underbrace{0,\ldots,0}_{L(i-1)}, \operatorname{str}([A_2 A_1^+]_{ij}, j=\overline{1,L}), \underbrace{0,\ldots,0}_{L^2-iL}), i=\overline{1,L}),$$

$$\bar{A}_2 = \operatorname{col}((\operatorname{str}([A_0 A_2^+]_{ij}, j=\overline{1,L}), \underbrace{0,\ldots,0}_{L(i-1)}, \operatorname{str}([A_1 A_2^+]_{ij}, j=\overline{1,L}), \underbrace{0,\ldots,0}_{L^2-iL}), i=\overline{1,L}).$$

Последнее позволяет задачи (11)–(13) свести к задаче среднеквадратического обращения систем линейных алгебраических уравнений

$$\bar{A}_p \bar{y}_p = \bar{y} \ (p=\overline{0,2}) \tag{14}$$

относительно компонент векторов $\bar{y}_p$ $(p=\overline{0,2})$.

Исходя из того, что элементы множества

$$\Omega_{yp} = \{\bar{y}_p : \| \bar{A}_p \bar{y}_p - \bar{y} \|^2 \to \min_{\bar{y}_p}\}$$

с точностью

$$\delta_p^2 = \min_{\bar{y}_p \in \Omega_{yp}} \| \bar{A}_p \bar{y}_p - \bar{y} \|^2 = \bar{y}_p^{\mathrm{T}} \bar{y}_p - \bar{y}_p^{\mathrm{T}} \bar{A}_p \bar{A}_p^+ \bar{y}_p \tag{15}$$

находятся соотношением

$$\bar{y}_p = \bar{A}_p^{\mathrm{T}} P_p^+ \bar{y} + \upsilon_p - \bar{A}_p^{\mathrm{T}} P_p^+ A_{p\upsilon}, \tag{16}$$

в котором $P_p = \bar{A}_p \bar{A}_p^{\mathrm{T}}$, $A_{p\upsilon} = \bar{A}_p \upsilon_p$ при произвольном $\upsilon_p \in R^{L^2+L}$, а также учитывая определения векторов $\bar{y}_p$ $(p=\overline{0,2})$, находим и компоненты y_{ij} $(j=\overline{1,L})$ векторов y_i $(i=\overline{0,2})$. Они будут следующими:

$$y_{ij} = y_{i,j} \quad (i=\overline{0,2}, \ \ j=\overline{1,L}), \tag{17}$$

где $y_{i,1}, \ldots, y_{i,L}$ — первые L компонент вектора $y_i = \operatorname{col}(y_{i,j}, j=\overline{1,L^2+L})$ $(i=\overline{0,2})$.

С учетом ошибок ε_i^2 $(i=\overline{0,2})$ и δ_p^2 $(p=\overline{0,2})$ среднеквадратического обращения уравнений (8) и (14) для определения вектора $\bar{u}$ (см. (9)) выберем вектор $y_i = \operatorname{col}(y_{ij}, j=\overline{1,L})$, для которого $(\varepsilon_i^2 + \delta_i^2) \to \min_i$.

Заметим, что определение (17), как и решение (16) уравнения (14), корректно, если векторы υ_p $(p=\overline{0,2})$ в соотношении (16) удовлетворяют условиям

$$\bar{y}^2_{p,iL+j} = \bar{y}_{p,iL+i}\,\bar{y}_{p,jL+j},$$

$$\bar{y}^2_{p,i} = \bar{y}_{p,iL+i} \quad (i=\overline{1,L},\ j=\overline{1,L}). \tag{18}$$

Особенности псевдообращения алгебраических систем с аддитивной нелинейностью высших порядков. Обобщим решение задачи (2), (3), (7) на случай, когда линейная алгебраическая система (2) получает адитивную нелинейность N-го порядка, которая определяется функцией (5).

Следуя изложенной методике решения задачи (2), (3), (7) в рамках системы (2), (5) сделаем вывод о том, что решение рассматриваемой задачи определяется соотношением

$$\bar{u} = A^+_{i_0}\, y_{i_0}, \tag{19}$$

в котором $i_0 = \arg \min\limits_{i\in\{1,\ldots,N\}} (\varepsilon_i^2 + \delta_i^2)$ при определенных согласно (10) и (15) точностях ε_i^2 и δ_i^2 среднеквадратического обращения линейных алгебраических систем вида (8) и (14).

Заметим, однако, что имеющиеся в (14), как и в (19), матрицы и векторы теперь будут определяться следующими соотношениями:

$$\bar{A}_0 = \mathrm{col}\,((\underbrace{0,\ldots,0}_{j-1}, 1, \underbrace{0,\ldots,0}_{L-j}, \mathrm{str}\,(\ldots([A_1 A_0^+]_{jk_1} \ldots [A_N A_0^+]_{jk_N},$$

$$k_N = \overline{1,L}), \ldots, k_1 = \overline{1,L})),\ j=\overline{1,L}),$$

$$\bar{A}_i = \mathrm{col}\,((\mathrm{str}\,([A_0 A_i^+]_{jk}, k=\overline{1,L}),\ \underbrace{0,\ldots,0}_{L^{N-1}(j-1)},\ A_j^{(i)},\ \underbrace{0,\ldots,0}_{L^N - jL^{N-1}}),\ j=1,L),$$

$$\bar{y}_i = \mathrm{str}\,(\bar{y}_{i,1},\ldots,\bar{y}_{i,L}, \mathrm{str}\,(\ldots(\bar{y}_{i,k_1}\ldots\bar{y}_{i,k_N}, k_N = \overline{1,L}),\ldots, k_1=\overline{1,L}))^{\mathrm{T}}\ (i=\overline{1,N}). \tag{20}$$

Здесь (как и ранее) $\bar{y}_{i,j}$ $(j=\overline{1,L^N+L})$ — компоненты вектора $\bar{y}_i$ $(i=\overline{0,N})$.

С учетом определения (20) вектора $\bar{y}_i$ $(i=\overline{1,N})$ из решения (16) уравнения (14) соотношением (17) находим компоненты y_{ij} $(j=\overline{1,N})$ векторов y_i $(i=\overline{0,N})$.

Заметим, что условия (18), которыми ограничивался выбор вектора υ_p (см. (16)) в предыдущей задаче теперь заменятся следующими:

$$\bar{y}^N_{i,i_1L^{N-1}+\ldots+i_{N-1}L+i_N} = \prod_{k=1}^{N} \bar{y}_{i,i_kL^{N-1}+\ldots+i_{k-1}L+i_k},$$

$$\bar{y}^N_{i,i} = \bar{y}_{i,iL^{N-1}+\ldots+iL+i}.$$

Здесь $i=\overline{0,N}$, $i_n=\overline{1,L}$ при $n=\overline{1,N}$.

Псевдообращение алгебраических систем с итерационно уточняемой нелинейностью. Рассмотрим задачу среднеквадратического (согласно (7)) обращения квадратически нелинейной системы (2), (4). Как и ранее, максимально используем методику псевдообращения системы (1). При этом будем исходить из того, что заменой

$$\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{M^2+M}) = (u_1,\ldots,u_M, \mathrm{str}((u_i u_j,\ j=\overline{1,M}),\ i=\overline{1,M})^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

$$\bar{A} = \mathrm{str}\,(A_i,\ i=\overline{0,M}),$$

в которой $(u_1, \ldots, u_M) = \bar{u}^{\mathrm{T}}$, систему (2), (4) приведем к виду

$$\bar{A}\alpha = \bar{y}. \tag{22}$$

Решением последней таким, что

$$\alpha = \arg\min_{\xi} || \bar{A}\xi - \bar{y}||^2, \tag{23}$$

есть вектор

$$\alpha = \bar{A}^{\mathrm{T}} \bar{P}_1^{+} \bar{y} + v - \bar{A}^{\mathrm{T}} \bar{P}_1^{+} \bar{A} v, \tag{24}$$

в котором $\bar{P}_1 = \bar{A}\bar{A}^{\mathrm{T}}$, а

$$v \in \Omega_v = \{v : \alpha_{iM+j}^2 = \alpha_{iM+i}\alpha_{jM+j}, \alpha_i^2 = \alpha_{iM+i} \ \forall i, j \in \{1, \ldots, M\}\}. \tag{25}$$

С учетом определения (21) вектора α и выражения (24) в рамках рассматриваемой задачи находим компоненты u_m $(m = \overline{1, M})$ вектора $\bar{u}$, который согласно (7) удовлетворяет (2), (4). При этом

$$u_m = \alpha_m \quad (m = \overline{1, M}). \tag{26}$$

Предложенный алгоритм решения квадратично нелинейной системы (2), (4) можно обобщить и на системы высшего порядка нелинейности, т.е. на системы, функция $F(\bar{u})$ в которых определена согласно (6).

Как и ранее, заменой

$$\bar{A} = (A_0, \mathrm{str}((\ldots((A_{i_1 i_2 \ldots i_N}, i_N = \overline{1, M}), \ i_{N-1} = \overline{1, M})\ldots), \ i_1 = \overline{1, M})) \tag{27}$$

$$\alpha = (u_1, \ldots, u_M, \mathrm{str}((\ldots((u_{i_1} \ldots u_{i_{N-1}} u_{i_N}, i_N = \overline{1, M}), \ i_{N-1} = \overline{1, M})\ldots), i_1 = \overline{1, M}))^{\mathrm{T}} \tag{28}$$

систему (2), (6) приведем к виду (22).

С учетом определения (27), (28) матрицы $\bar{A}$ и вектора α соотношением (24) найдем и решение задачи (22), (23). Заметим, однако, что ограничивающие равенства, которыми согласно (25) определяется выбор вектора v в (24), теперь будут следующими:

$$\alpha^N_{i_1 M^{N-1} + \ldots + i_{N-1} M + i_N} = \prod_{k=1}^{N} \alpha_{i_k M^{N-1} + \ldots + i_k M + i_k}, \ \alpha_i^N = \alpha_{iM^{N-1} + \ldots + iM + i}. \tag{29}$$

Здесь $i = \overline{1, M}$, $i_n = \overline{1, M}$ при $n = \overline{1, N}$.

Решение задачи (а это компоненты u_m $(m = \overline{1, M})$ вектора $\bar{u}$), как и ранее, будет определяться согласно (26). Точность найденого таким образом решения будет зависеть от точности псевдообращения системы (22) и

$$\varepsilon^2 = \min_{\alpha} || \bar{A}\alpha - \bar{y}||^2 = \bar{y}^{\mathrm{T}} \bar{y} - \bar{y}^{\mathrm{T}} \bar{P}_1 \bar{P}_1^{+} \bar{y}.$$

Для случая, когда $\det \bar{A}^{\mathrm{T}} \bar{A} > 0$, это псевдообращение будет однозначным. При этом $v \equiv 0$, а это означает, что не существует условий для проверки ограничивающих условий (25) и (29).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена сложная математическая проблема псевдорешения дискретно преобразующих систем с векторными входами-выходами, особенностью которых является то, что линейная часть преобразователя дополняется нелинейно преобразующей компонентой. Рассматриваемые в работе нелинейности строятся путем как декартового преобразования входного вектора, так и итерационного уточнения матричного ядра преобразователя. На основании классических результатов линейной алгебры для каждого из преобразователей построены множества допустимых по среднеквадратическому критерию псевдообращений. Сделана оценка точности полученных псевдорешений, описаны условия их однозначности. Выбранные для исследования классы нелинейностей в дискретно преобразующих системах, по мнению автора, предназначены для широкого спектра практически важных преобразователей, а их обобщение и распространение на нелинейные непрерывно преобразующие системы несомненно может быть полезным в практическом использовании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стоян В.А. Методы линейной алгебры в задачах исследования некоторых классов нелинейных дискретно преобразующих систем. I. Мультипликативно нелинейные системы. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 1. С. 127–124.
2. Кириченко Н.Ф. Аналитическое представление возмущений псевдообратных матриц. *Кибернетика и системный анализ*. 1997. № 2. С. 98–107.
3. Кириченко Н.Ф. Псевдообращение матриц и их рекуррентность в задачах моделирования и управления. *Проблемы управления и информатики*. 1995. № 1. С. 114–127.
4. Кириченко Н.Ф., Стоян В.А. Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований. *Кибернетика и системный анализ*. 1998. № 3. С. 90–104.
5. Стоян В.В. Псевдоінверсний підхід до розв'язання одного класу нелінійних алгебраїчних рівнянь. *Доп. НАН України*. 2008. № 3. С. 45–49.
6. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2011. 320 с.

Надійшла до редакції 08.02.2018

В.А. Стоян

МЕТОДИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ В ЗАДАЧАХ ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНО ПЕРЕТВОРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ. II. СИСТЕМИ З АДИТИВНО ВИДІЛЕНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Анотація. Побудовано псевдорозв'язки дискретно перетворювальних систем, лінійна частина яких доповнена нелінійностями, отриманими після декартового перетворення вхідного вектора або ітераційного уточнення матричного ядра перетворювача. Досліджено точність та однозначність множини середньоквадратичних наближень до обернення математичної моделі перетворювача. Розглянуто квадратично нелінійні системи та системи з довільним порядком нелінійності.

Ключові слова: псевдообернення, нелінійні дискретно перетворювальні системи, нелінійні алгебраїчні системи, нелінійні ітераційно уточнювальні системи.

V.A. Stoyan

LINEAR ALGEBRA METHODS IN PROBLEMS OF THE ANALYSIS OF CERTAIN CLASSES OF NONLINEAR DISCRETELY TRANSFORMATIVE SYSTEMS. II. SYSTEMS WITH ADDITIONALLY HIGHLIGHTED NONLINEARITY

Abstract. Pseudo-solutions of discretely transformative systems are generated; their linear part is complemented with nonlinearities obtained after the Cartesian transformation of input vector or iterative specification of matrix transformer kernel. Sets of root-mean-square approximations to inversion of mathematical model of the transformer are investigated for accuracy and uniqueness. Root-mean-square nonlinear systems and systems with arbitrary order of nonlinearity are considered.

Keywords: pseudo-inversion, nonlinear discretely transformative systems, nonlinear algebraic systems, nonlinear iterative specified systems.

Стоян Владимир Антонович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: v_a_stoyan@ukr.net.