

ВІДНОВЛЕННЯ СТРУКТУРИ РОЗРИВНОГО ПЛАСТА З ВИКОРИСТАННЯМ ТОМОГРАФІЧНИХ МЕТОДІВ

Анотація. Досліджено метод побудови математичної моделі внутрішньої структури геологічного середовища, коли функція, яка описує цю модель, має розрив першого роду. Модель запропоновано використовувати у шахтній сейсмічній томографії. Результати обчислювального експерименту показують, що за невеликого порядку сум Фур'є їхні коефіцієнти Фур'є, знайдені за допомогою інформації про перші моменти часу надходження сейсмічного сигналу від джерел у точки спостереження, близькі до коефіцієнтів Фур'є, знайдених для тестової функції, що описує задане зображення рельєфу з тектонічним пошкодженням. Описані підходи можуть використовуватися для поліпшення значень математичної моделі розподілу повільності розповсюдження сейсмічних хвиль у заданій ділянці геологічного середовища.

Ключові слова: комп'ютерна томографія, шахтна томографія, коефіцієнти Фур'є.

ВСТУП

У цій статті узагальнено результати роботи [1] на більш реальний випадок, коли досліджувана горизонтальна ділянка має розрив. Як і в [1], вперше запропоновано використовувати метод шахтної сейсмічної томографії, описаний в [2, 3], проте у роботі [1] враховано припущення, що досліджуваний регіон кори Землі не має розривів.

Результатом роботи є побудова математичної моделі, опису повільності (величини оберненої до швидкості) розповсюдження сейсмічних хвиль на ділянці кори Землі, яка має розрив. На відміну від роботи [1] запропоновано також покращувати результат наближеного відновлення функції, користуючись твердженнями робіт [4–6], а також наведено порівняння результатів наближеного відновлення функції, яка визначає розподіл повільності ділянки кори Землі за допомогою сум Фур'є та Феєра.

ОБГРУНТУВАННЯ ВАЖЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ КОМП'ЮТЕРНОЇ ТОМОГРАФІЇ В ШАХТНІЙ СЕЙСМІЧНІЙ ТОМОГРАФІЇ

У роботі [7] досліджено прямий метод Фур'є (DFM) для двовимірної комп'ютерної томографії відносно задачі відновлення зображення з даними, які є рентгенівськими проєкціями p . Основна ідея DFM полягає в тому, що потрібно представити перетворення Фур'є через проєкції p і пов'язати його з перетворенням Фур'є функції f , яка визначає зображення. Обчислювальна реалізація складається з перетворень проєкцій p , фіксації дискретного перетворення Фур'є і оберненого дискретного перетворення Фур'є функції f з використанням швидкого перетворення Фур'є (FFT). Для зображення $N \times N$ пікселів DFM має потенціал бути дуже швидким. Він буде використовувати $N^2 \log N$ арифметичних операцій. Визначений у роботі [7] спосіб відновлення зображення за даними проєкцій є достатньо швидким, проте він дає більшу похибку, ніж обчислення точної суми Фур'є (для випадку, коли відновлювана функція f відома), оскільки будуть виникати не тільки похибки обчислення коефіцієнтів і сум Фур'є, але і похибка інтерполяції у процесі переходу від полярної системи координат до декартової сітки [7].

У роботі [2] запропоновано метод розв'язання плоскої задачі радонівської комп'ютерної томографії, що ґрунтується на оригінальних формулах обчислення

коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних за допомогою проєкцій (даних Радона) — інтегралів від наближуваної функції вздовж деякої системи ліній, що перетинають об'єкт дослідження. Однією з важливих особливостей цього методу є заміна тригонометричних функцій кусково-сталими періодичними сплайнами найкращого рівномірного наближення. Сутність методу полягає у математичному моделюванні структури тіла як скінченної суми ряду Фур'є

$$F(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N C_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)},$$

$$C_{k,l} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy, \quad (1)$$

де $C_{k,l}$ — коефіцієнти Фур'є невідомої функції $f(x, y)$, що описує структуру тіла. У цій роботі саме коефіцієнти Фур'є запропоновано обчислювати за допомогою часів пробігу сейсмічних хвиль від системи джерел до системи приймачів.

У роботі [1] досліджено метод побудови просторової моделі пласта в шахтній сейсмічній томографії для випадку, якщо експериментальними даними, які використано для побудови математичної моделі, є перші часи надходження сейсмічного сигналу від системи джерел до системи приймачів, розміщених в одній і тій же площині або на системі горизонтальних площин.

Методи, які описано в роботах [7, 2], застосовують проєкції для знаходження коефіцієнтів Фур'є, а через них вже обчислюють невідому функцію, проте метод, визначений в роботі [2], не потребує переходу від полярної системи координат до декартової, що дає змогу відновити коефіцієнти Фур'є із заданою похибкою.

Тому з'явилася необхідність розглянути можливість використання методу Литвина [2] в шахтній сейсмічній томографії для випадку, коли досліджуваний регіон має розрив, та дослідити підхід з метою поліпшення значень математичної моделі для знаходження розподілу повільності розповсюдження сейсмічних хвиль в заданій ділянці кори Землі у випадку, коли функція, яка описує структуру кори, має розрив першого роду.

ПОХИБКА КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є

Усі методи, які базуються на сумах Фур'є, мають певну похибку, оскільки суми Фур'є обчислюють не точне значення функції, а наближене. Метод Литвина не є винятком. Він має дві похибки: для обчислення сум Фур'є (Валле–Пуссена, Феєра) і коли обчислюють коефіцієнти Фур'є за допомогою проєкцій (часів пробігу сейсмічного сигналу). Проаналізуємо обидві ці похибки.

Згідно з роботою [8] у випадку $1 < p < \infty$ для $g \in \tilde{L}_p^r$ має місце оцінка

$$\|g - S_n g\|_p \leq c_p n^{-r} \|g^{(r)}\|_p, \quad (2)$$

де $S_n g$ — сума Фур'є функції $g(t)$, константа c_p залежить лише від p . Якщо $p = \overline{1, \infty}$, а $g \in \tilde{L}_p^r$ (\tilde{L}_∞ позначає \tilde{C}), то

$$\|g - S_n g\|_p \leq c_p \frac{\ln n}{n^r} \|g^{(r)}\|_p.$$

Якщо застосовувати оператор Валле–Пуссена, то для $g \in \tilde{L}_p^r$, $1 \leq p \leq \infty$, має місце оцінка, аналогічна формулі (2).

Окрім похибки обчислення суми Фур'є, про яку йдеться у роботі [7], виникає ще додаткова похибка переходу від полярної системи координат до декартової сітки. Зазначимо, що величина додаткової похибки в цій роботі не вказана. Метод, визначений в [1–3], не вимагає переходу від полярної системи координат до декартової сітки, а отже, не виникає додаткової похибки на цьому етапі. Проте такий метод має іншу похибку, значення якої можна обчислити заздалегідь, оскільки вона залежить від точності рівномірного наближення тригонометричних функцій кусково-сталими функціями.

Основу чисельної реалізації методу з робіт [1–3] складає заміна (для обчислення коефіцієнтів Фур'є) під знаком інтеграла періодичної експоненціальної функції $e^{-i2\pi t}$ кусково-сталім періодичним сплайном:

$$e^{-i2\pi t} = \cos(2\pi t) - i \cdot \sin(2\pi t) \approx Cp(m, 2\pi t) - i \cdot Sp(m, 2\pi t),$$

де m – кількість інтервалів розбиття чверті періоду функцій $\cos 2\pi t$ та $\sin 2\pi t$ на підінтервали, в яких періодичні функції замінюють сталою величиною найкращого рівномірного наближення вказаних функцій. При цьому виникає похибка

$$|\cos(2\pi t) - Cp(m, 2\pi t)| \leq 0.5m^{-1},$$

$$|\sin(2\pi t) - Sp(m, 2\pi t)| \leq 0.5m^{-1},$$

де

$$Sp(m, l) = \frac{4}{m\pi} \times \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi(2p-1)t)}{2p-1} \sum_{i=1}^m \left(i - \frac{1}{2}\right) \left\{ \cos\left((2p-1) \arcsin \frac{i-1}{m}\right) - \cos\left((2p-1) \arcsin \frac{i}{m}\right) \right\},$$

$$Cp(m, l) = \frac{4}{m\pi} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} \frac{\cos(2\pi(2p-1)t)}{2p-1} \times \sum_{i=1}^m \left(i - \frac{1}{2}\right) \left\{ \cos\left((2p-1) \arcsin \frac{i-1}{m}\right) - \cos\left((2p-1) \arcsin \frac{i}{m}\right) \right\}.$$

У роботі [4] зазначено, що похибка отримання коефіцієнтів Фур'є буде не більша, ніж $0.5m^{-1} + \varepsilon_1$, де $\varepsilon_1 = O(h_{k,l}^r)$, $r=1,2$, $h_{k,l} = (k+l)/Q$; Q — загальна кількість одержаних проєкцій, які використано для обчислення коефіцієнтів Фур'є від функції двох змінних; k, l — індекси коефіцієнтів Фур'є. До того ж зазначимо, що між величинами m , Q та N (порядок суми Фур'є) справедливе співвідношення $N^{-r} = 0.5m^{-1} + \max_{-N \leq k, l \leq N} h_{k,l} \frac{M_2}{24}$, де M_2 — максимальне значення модуля другої похідної від підінтегральної функції.

НАБЛИЖЕННЯ СУМАМИ ФУР'Є РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ З ВИКОРИСТАННЯМ РОЗРИВНИХ СПЛАЙНІВ ВІД ДВОХ ЗМІННИХ

Як відомо [9, гл. 6, § 15,], ряди Фур'є погано збігаються, деякі з них не будуть абсолютно та рівномірно збіжними. Зокрема, суми Фур'є не збігаються до функції у точках її розриву. В [10, с. 516] визначено метод Крилова для поліпшення збіжності тригонометричних сум Фур'є розривних функцій у випадку, якщо її точки розриву першого роду відомі. Цей метод також проаналізовано в роботах [6, 11].

У цій статті запропоновано для чисельної реалізації методу Крилова з метою підвищення точності розвинути в ряд Фур'є розривних функцій однієї та двох змінних використовувати розривні сплайни [5, 6, 11] для поліпшення методу відновлення розподілу повільності. Для цього можна, скориставшись методом з роботи [2], знайти перше наближення (без урахування точок розриву), на ньому визначити усі точки розриву, побудувати найпростішу функцію, яка зберігає розрив у заданих точках і лініях (розривний сплайн) і потім представити невідому функцію як суму розривного сплайна та сум Фур'є. Коефіцієнти Фур'є для нової суми Фур'є знаходять як різницю коефіцієнтів Фур'є досліджуваного образу та побудованого розривного сплайна [5, 6]. Отже, можна відновити функцію, яка має розрив. Це і складає основу методу Крилова, який позбавляє від явища Гіббса і може бути узагальненим на випадок наближення функцій двох та більше змінних. Вважаємо, що $f(x, y) \in C^{r,r}([0, 1]^2 \setminus D)$, D — область, яка є об'єднанням ліній розриву функції $f(x, y)$, $x, y \in [0, 1]$, має розриви першого роду разом із своїми похідними до порядку r , $1 \leq r \in N$, на системі взаємно перпендикулярних прямих $x = x_i$, $i = \overline{1, m-1}$, $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = 1$, $f^{(s,0)}(x_i - 0, y) \neq f^{(s,0)}(x_i + 0, y)$, $s = \overline{0, r}$, $y = y_j$, $j = \overline{1, n-1}$, $y_0 = 0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = 1$, $f^{(0,p)}(x, y_j - 0) \neq f^{(0,p)}(x, y_j + 0)$, $p = \overline{0, r}$.

Введемо до розгляду розривні сплайни $S1(x, y)$, $S2(x, y)$, $S12(x, y)$:

$$S1f(x, y) = S1(x, y) = \begin{cases} \sum_{s=0}^r f^{(s,0)}(0, y)h_{1,0,1,s}(x) + \sum_{s=0}^r f^{(s,0)}(x_1 - 0, y)h_{0,1,s}(x), \\ 0 \leq x < x_1; \\ \sum_{s=0}^r f^{(s,0)}(x_k + 0, y)h_{k,k,k+1,s}(x) + \sum_{s=0}^r f^{(s,0)}(x_{k+1} - 0, y)h_{0,k+1,k,k+1,s}(x), \\ x_k \leq x < x_{k+1}, k = \overline{1, m-1}; \\ \sum_{s=0}^r f^{(s,0)}(x_{m-1} + 0, y)h_{1,m-1,m-1,m,s}(x) + \sum_{s=0}^r f^{(s,0)}(1 - 0, y)h_{0,m,m-1,m,s}(x), \\ x_{m-1} \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$S2f(x, y) = S2(x, y) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{p=0}^r f^{(0,p)}(x, 0)h_{1,0,1,p}(y) + \sum_{p=0}^r f^{(0,p)}(x, y_1 - 0)h_{0,1,p}(y), \\ 0 \leq y < y_1; \\ \sum_{p=0}^r f^{(0,p)}(x, y_l + 0)h_{l,l,l+1,p}(y) + \sum_{p=0}^r f^{(0,p)}(x, y_{l+1} - 0)h_{0,l+1,l,l+1,p}(y), \\ y_l \leq y < y_{l+1}, l = \overline{1, n-1}; \\ \sum_{p=0}^r f^{(0,p)}(x, y_{n-1} + 0)h_{1,n-1,n-1,n,p}(y) + \sum_{p=0}^r f^{(0,p)}(x, 1 - 0)h_{0,n,n-1,n,p}(y), \\ y_{n-1} \leq y \leq 1; \end{cases}$$

$$S12f(x, y) = (S1)S2f(x, y) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{s=0}^r S2^{(s,0)}(0, y)h1_{0,0,1,s}(x) + \sum_{s=0}^r S2^{(s,0)}(x_1 - 0, y)h0_{1,0,1,s}(x), \\ 0 \leq x < x_1; \\ \sum_{s=0}^r S2^{(s,0)}(x_k + 0, y)h1_{k,k,k+1,s}(x) + \sum_{s=0}^r S2^{(s,0)}(x_{k+1} - 0, y)h0_{k+1,k,k+1,s}(x), \\ x_k \leq x < x_{k+1}, k = \overline{1, m-1}; \\ \sum_{s=0}^r S2^{(s,0)}(x_{m-1} + 0, y)h1_{m-1,m-1,m,s}(x) + \sum_{s=0}^r S2^{(s,0)}(1 - 0, y)h0_{m,m-1,m,s}(x), \\ x_{m-1} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

де $h0_{i+1,i,i+1,s}(x)$, $h1_{i,i,i+1,s}(x)$, $i = \overline{0, m-1}$, — базисні поліноми двоточкової ермітової інтерполяції степеня $2r+1$ [6],

$$h0_{i+1,i,i+1,s}(x) = \frac{(x-x_i)^s}{s!} (x-x_{i+1})^{r+1} \{(x-x_{i+1})^{-r-1}\}_{x_k}^{r+1-s},$$

$$h1_{i,i,i+1,s}(x) = \frac{(x-x_{i+1})^s}{s!} (x-x_i)^{r+1} \{(x-x_i)^{-r-1}\}_{x_{k+1}}^{r+1-s},$$

$$\text{де } \{g(x)\}_{x_k}^{r+1-s} = \sum_{v=0}^{r+1-s} g^{(v)}(x_k) \frac{(x-x_k)^v}{v!}.$$

Аналогічно обчислюють базисні поліноми двоточкової ермітової інтерполяції за змінною y .

Введемо до розгляду оператор

$$Spf(x, y) = S1f(x, y) + S2f(x, y) - S12f(x, y).$$

Теорема 1. Функція $R(x, y) = f(x, y) - Spf(x, y)$ (залишок наближення функції $f(x, y)$ за допомогою $Spf(x, y)$), $f(x, y) \in C^{r,r}([0,1]^2 \setminus D)$, має властивості $R^{(s,0)}(x_i, y) = 0$ ($s = \overline{0, r}$, $i = \overline{1, m-1}$) та $R^{(0,q)}(x, y_j) = 0$ ($q = \overline{0, r}$, $j = \overline{1, n-1}$) і якщо $f^{(s,0)}(x_i - 0, y) = f^{(s,0)}(x_i + 0, y)$ ($i = \overline{1, m-1}$, $s = \overline{0, r}$), $f^{(0,p)}(x, y_j - 0) = f^{(0,p)}(x, y_j + 0)$ ($p = \overline{0, r}$, $j = \overline{1, n-1}$), тоді $R(x, y) \in C^{r,r}[0,1]^2$.

Доведення. Якщо $f^{(s,0)}(x_i - 0, y) = f^{(s,0)}(x_i + 0, y)$ ($i = \overline{1, m-1}$, $s = \overline{0, r}$), то формула для $S1f(x, y)$ буде належати до класу $C^{r,r}[0,1]^2$, оскільки за умови переходу через точку $x = x_k$ зліва і справа поліноми Ерміта матимуть однакові сліди похідних порядку s на лінії $x = x_k$. Аналогічне твердження виконується також і для формули, що визначає оператор $S2f(x, y)$. Враховуючи це, можна зробити висновок, що числа

$$f^{(s,p)}(x_k \pm 0, y_l \pm 0) = f^{(s,p)}(x_k \mp 0, y_l \mp 0) = f^{(s,p)}(x_k \mp 0, y_l \pm 0) =$$

$$= f^{(s,p)}(x_k \pm 0, y_l \mp 0) = f^{(s,p)}(x_k, y_l),$$

тобто числа $f^{(s,p)}(x_k, y_l)$ не залежать від того, в якому порядку знаходять границі відповідних похідних в (x_k, y_l) . Це означає, що формула $S12f(x, y)$ за умови переходу між елементами $[x_k, x_{k+1}] \times [y_l, y_{l+1}]$ буде зберігати непе-

первність похідних до r -го порядку включно, тобто $Sp(x, y) \in C^{r,r}[0,1]^2$ як лінійна комбінація функцій, що належать до цього класу. Теорему доведено.

Запропоновано розкласти у суму Фур'є функцію $R(x, y)$, тоді формула (1) буде замінена формулою

$$C_{k,l} = \int_0^1 \int_0^1 Rf(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy,$$

де $k, l = \overline{-N, N}$, і функцію $f(x, y)$ наближувати у вигляді суми $f(x, y) = Spf(x, y) + F_{N,N}(f(x, y) - Spf(x, y))$, $F_{N,N}f(x, y)$ – сума Фур'є порядку N від функції $f(x, y)$.

З урахуванням того, що $R(x, y) \in C^{r,r}[0,1]^2$, у такому наближенні всі точки розриву включимо у перший доданок $Spf(x, y)$, а для сум Фур'є $F_{N,N}(f(x, y) - Spf(x, y))$ порядок збіжності буде, як відомо [10], $O(1/N^r)$. Значимо також, що метод дозволяє будувати наближення без явища Гіббса, якщо лінії розриву функції або деяких її похідних не обов'язково є прямими, які паралельні осям координат, тобто взагалі є деякими кривими лініями.

ВИКОРИСТАННЯ СУМ ФЕЄРА ТА ВАЛЛЕ–ПУССЕНА ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ ДОСТОВІРНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ У ПРОЦЕСІ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ІНФОРМАЦІЇ

У цій статті задача відновлення розподілу повільності у шахтній сейсмічній томографії на горизонтальній площині полягає у відновленні функції за відомими проєкційними даними — інтегралами вздовж ліній паралельних прямим $kx + ly = t$, які перетинають досліджуваний об'єкт. Для розв'язання цієї задачі будемо використовувати метод, запропонований в [1]. У роботах [2, 3] наведено формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є і відновлення невідомої функції через суму Фур'є, де ця функція $f(x, y)$ є повільністю, $W(x, y) = 1/V(x, y)$, і відомо лише часи надходження сейсмічного сигналу, що проходить через досліджуваний об'єкт.

Особливістю і перевагою створеного методу є явні формули для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних, яка є повільністю і визначається за допомогою часів пробігу сейсмічних хвиль від системи джерел до системи приймачів. Це зводить розв'язання задачі до обчислення коефіцієнтів Фур'є та вибору системи прямих, уздовж яких задаються проєкційні дані. Отже, метод не вимагає розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Згідно з [8] обчислення за допомогою сум Феєра можуть давати кращі результати, ніж сумами Фур'є, оскільки ядро сум Феєра є завжди позитивним і умови збіжності можна записати простіше, якщо функція є періодичною. Тому для поліпшення результатів дослідження замість сум Фур'є можна використовувати скінченну суму Феєра у вигляді

$$S(x, y, N) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \left(1 - \frac{|l|}{N+1}\right) C_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)},$$

проте вона може мати більшу похибку, ніж описаний вище метод, внаслідок явища Гіббса. Ці твердження справедливі і для суми Валле–Пуссена.

НАБЛИЖЕННЯ СУМАМИ ФУР'Є ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПРОСТОРОВОГО РОЗПОДІЛУ ПОВІЛЬНОСТІ НА ОСНОВІ ПЕРШОГО НАБЛИЖЕННЯ В ШАХТНІЙ СЕЙСМІЧНІЙ ТОМОГРАФІЇ У ВІДПОВІДНОСТІ ДО МЕТОДУ З РОБИТ [1–3]

Виконаємо експеримент з наближеного обчислення значень розподілу повільності на ділянці дослідження, яка описана функцією, що має розрив першого роду. Вважаємо, що задано наближено знайдені розподіли повільності $f(x, y)$ в області $[0, 1]^2$. До того ж вважаємо, що досліджуваний регіон має геологічний розлом, тобто його математична модель матиме розрив першого роду. Це припущення не враховували раніше. Відомо три типи геологічних розломів: зсуви, скиди та насуви (рис. 1) [12]. У цьому прикладі будемо вважати, що досліджуємо пласт корисних копалин, який піддавався дії насуву, і тепер досліджувана горизонтальна ділянка має розрив. Насув міг утворитися нахилом зміщувача у бік піднятого крила або переміщенням вгору крила. Така ситуація могла виникнути у випадку зштовхування тектонічних плит, які спричинили процес горизонтального стиснення.

Для підрахування сум коефіцієнтів Фур'є скористаємося сумами Феєра, оскільки вони мають кращу збіжність, ніж суми Фур'є, а також не гіршу похибку, ніж суми Валле–Пуссена [13, с. 72].

У реальних умовах в шахтній сейсмічній томографії, на відміну від комп'ютерної томографії, промені лише в окремих випадках є прямими лініями. Це обмежує використання методу, наведеного у роботах [1, 2]. Згідно з [14, с. 37, 38] для більш точного наближення можна розглянути нев'язку часів надходження променя

$$\delta T(p, \varphi) = \int_L \delta u(x) ds, \quad (3)$$

де $T = T_0 + \delta T$, $u = u_0 + \delta u$. Опорні часи пробігу сейсмічного сигналу $T_0(p, \varphi) = \int_{L_0} \delta u_0(x) ds$ обчислюють для променів, відповідних повільності опор-

ної моделі $u_0(x)$, і у разі інтерпретації нев'язок (3) промені вважають прямолінійними, тобто можна використовувати метод, описаний в роботах [1, 2].

Приклад 1. Нехай задано часи надходження сейсмічного сигналу у точки спостереження через досліджувану ділянку, значення повільності якої складає функція

$$f(x, y) = \begin{cases} 0,5, & \text{якщо } (x < 0,6 - 0,2y \wedge y < 0,6) \vee (x \geq 0,6 - 0,2y \wedge y < 0,8), \\ 0,45, & \text{якщо } (x < 0,6 - 0,2y \wedge y < 0,4) \vee (x \geq 0,6 - 0,2y \wedge y < 0,4), \\ 0,54 & \text{інакше.} \end{cases}$$

Вхідні дані та отриманий результат тестової задачі для значень $N = 8$ (порядок суми Фур'є) і кількості джерел та приймачів по 20 на кожній стороні відтворено на рис. 2. Результати розв'язання задачі для різного порядку суми Фур'є (N) наведено у табл. 1.

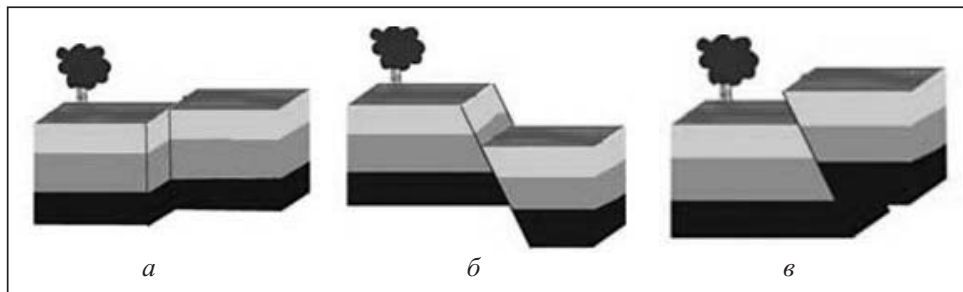


Рис. 1. Види геологічних розломів: зсув (а), скид (б), насув (в)

Таблиця 1. Результати розв'язання прикладу 1 для різних значень N

Порядок суми Фур'є, N	Кількість джерел та приймачів	Похибка значень, обчислених за допомогою точних значень коефіцієнтів Фур'є				Похибка значень, обчислених методом з робіт [1–3]			
		Сумою Фур'є		Сумою Феєра		Сумою Фур'є		Сумою Феєра	
		абсолютна	відносна	абсолютна	відносна	абсолютна	відносна	абсолютна	відносна
4	8	0,038	0,084	0,042	0,093	0,045	0,1	0,043	0,095
4	10	0,038	0,084	0,042	0,093	0,038	0,084	0,042	0,093
4	20	0,038	0,084	0,042	0,093	0,038	0,084	0,042	0,093
8	10	0,038	0,076	0,038	0,084	0,038	0,076	0,038	0,085
8	20	0,038	0,076	0,038	0,084	0,039	0,079	0,038	0,084
8	32	0,038	0,076	0,038	0,084	0,034	0,068	0,038	0,084

Як можна побачити, рис. 2, б схожий на рис. 2, з, а рис. 2, в і рис. 2, д майже ідентичні. Це означає, що досліджуваний регіон можна відновити як за допомогою суми Фур'є (Феєра) для випадку, коли функція відома і використано класичні суми Фур'є (Феєра) (рис. 2, б, в), так і для випадку, коли відомі часи пробігу сейсмічних хвиль через досліджуваний регіон, а коефіцієнти Фур'є обчислюються запропонованим у цій статті методом (рис. 2, з, д). З табл. 1 бачимо, що такі ж результати обчислення похибки, які отримано для сум Фур'є різними методами, близькі між собою. Так, значення абсолютної і відносної похибок, обчислені за допомогою точних значень коефіцієнтів Фур'є сумою Фур'є, близькі до абсолютних і відносних похибок, обчислених методом з робіт [1–3]. А результати обчислення похибок, знайдених за допомогою точних значень коефіцієнтів Фур'є сумою Феєра,

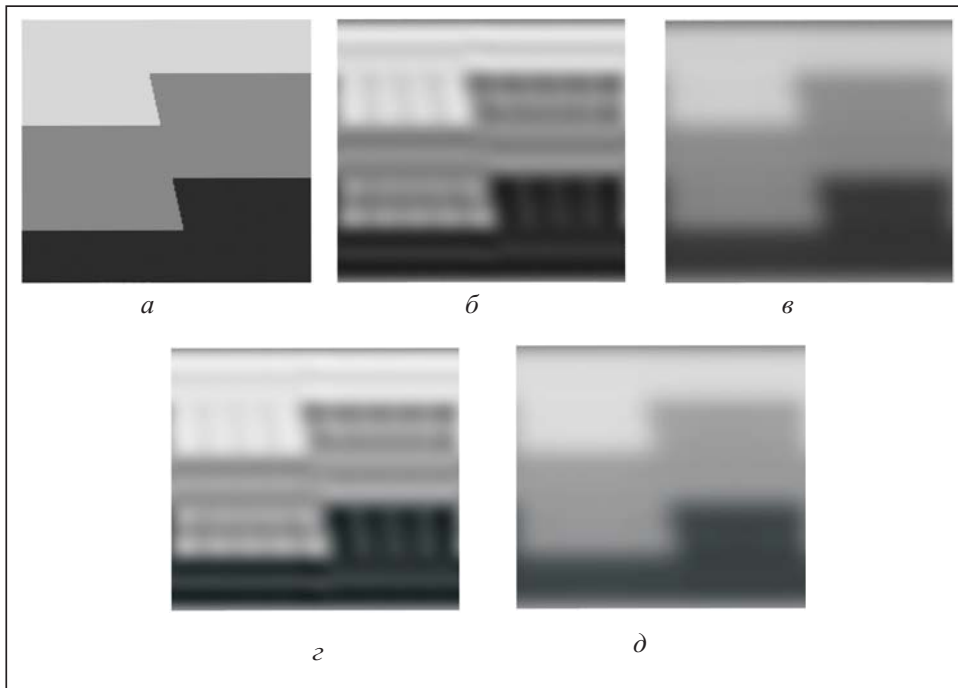


Рис. 2. Графічне зображення досліджуваної ділянки: вхідні дані (а); результати обчислень за допомогою сум Фур'є (б); результати обчислень за допомогою сум Феєра (в); методом, описаним в роботах [1–3], та сумою Фур'є (з); методом, описаним в роботах [1–3], та сумою Феєра (д)

близькі до значень з робіт [1–3]. Рис. 2, в і рис. 2, д найбільш схожі на рис. 2, а, де зображено тестову функцію, хоч ці рисунки не збігаються з оригіналом в точках розриву — місцях, де функція різко змінює свої значення (місце переходу між чорним, темно-сірим та світло-сірим кольорами), а також не збігаються краї рисунків. Необхідно відзначити, що відновлення за допомогою сум Феєра не завжди мають кращий результат у порівнянні з сумою Фур'є (див. табл. 1), хоча і відмінність цих похибок незначна. Це можна пояснити тим, що в теоремі Феєра оцінка похибки може бути кращою, лише якщо функція є періодичною. У цьому прикладі функція не є періодичною.

ВИСНОВКИ

Наведені результати обчислювального експерименту показують, що вже для невеликого порядку сум Фур'є коефіцієнти Фур'є, знайдені за допомогою перших часів надходження, близькі до коефіцієнтів Фур'є, знайдених для явного виразу функції, що описує задане зображення рельєфу з тектонічним пошкодженням.

А отже, описані у статті підходи можна розглядати з метою поліпшення значень математичної моделі для знаходження розподілу повільності розповсюдження сейсмічних хвиль в заданій ділянці кори Землі у випадку, коли досліджувана ділянка відповідає функції розриву першого роду. До того ж інформація, яка використовувалася для наближеного обчислення вказаних коефіцієнтів сум Феєра, являє собою перші часи надходження сейсмічного сигналу у точки спостережень від джерел сейсмічного сигналу, які пропонується наближено знаходити, скориставшись твердженнями з робіт [2, 3].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Литвин О.М., Драгун В.В. Метод пошуку просторового розподілу повільності на основі першого наближення в шахтній сейсмічній томографії. *Управляющие системы и машины*. 2016. № 6. С. 80–88.
2. Литвин О.М. Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії. *Системний аналіз, управління і інформаційні технології: Вісник Харківського держ. політех. ун-ту*. Харків: ХДПУ. 2000. № 125. С. 27–35.
3. Кулик С.І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням вейвлетів: дис. канд. фіз.-мат. наук. Харків, 2008.
4. Литвин О.М., Литвин О.Г. Оптимізація кількості експериментальних даних у методі обчислення коефіцієнтів Фур'є за допомогою проєкцій. Тези конференції ІСН — ПУЕТ (Полтава 16–18.03.2017). Полтава, 2017. С. 175–179.
5. Литвин О.Н., Першина Ю.И., Сергиенко И.В. Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы). *Кибернетика и системный анализ*. 2014. № 4. С. 126–134.
6. Литвин О.М. Підвищення точності розкладання в ряд Фур'є розривних функцій однієї та двох змінних. *Вісник Нац. техн. ун-ту "ХПИ"*. Темат. вип.: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2016. № 6, вип. 1178. С. 43–46.
7. Gottlieb S., Jung J., Kim S. A review of David Gottlieb's work on the resolution of the Gibbs phenomenon. *Commun. Comput. Phys.* 2011. N 3. P. 497–519.
8. Переверзев С.В. Оптимизация методов приближенного решения операторных уравнений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1996. 251 с.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2. Москва: Наука, 1974. 655 с.
10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. Москва: Физматлит, 1966. 656 с.
11. Литвин О.М., Литвин О.Г. Реконструкція зображень з використанням скінченних сум Фур'є та Фейєра. Тези конф. ІСН – ПУЕТ (Полтава 10–12.03.2016). Полтава, 2016. С. 186–189.
12. Боганик Г.Н., Гурвич И.И. Сейсморазведка. Тверь: АИС, 2006. 744 с.

13. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків: Основа, 2002. 544 с.
14. Чепмен К. Преобразование Радона и сейсмическая томография. *Сейсмическая томография*. Под ред. Г. Нолетта. Москва: Мир, 1990. С. 34–60.

Надійшла до редакції 24.04.2018

О.Н. Литвин, О.О. Литвин, В.В. Драгун

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СТРУКТУРЫ РАЗРЫВНОГО ПЛАСТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТОМОГРАФИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Аннотация. Рассмотрен метод построения математической модели внутренней структуры геологической среды, когда функция, описывающая эту модель, имеет разрыв первого рода. Модель предлагается использовать в шахтной сейсмической томографии. Результаты вычислительного эксперимента показывают, что при небольшом порядке сумм Фурье их коэффициенты Фурье, найденные с помощью первых моментов времени поступления сейсмического сигнала от источников в точки наблюдения, близки к коэффициентам Фурье, найденным для тестовой функции, описывающей заданное изображение рельефа с тектоническим повреждением. Описанные подходы могут использоваться для улучшения значений математической модели распределения медлительности распространения сейсмических волн в заданной области геологической среды.

Ключевые слова: компьютерная томография, шахтная томография, коэффициенты Фурье.

O.M. Lytvyn, O.O. Lytvyn, V.V. Dragun

RESTORATION OF THE STRUCTURE OF THE DISCONTINUITY LAYER BY TOMOGRAPHIC METHODS

Abstract. The method of constructing a mathematical model of the internal structure of the geological environment is considered, when the function describing this model has a first-order gap. The model is proposed for use in shaft seismic tomography. The results of the computational experiment show that, even with small orders of Fourier sums, the Fourier coefficients, which are found by means of information about the first times of the arrival of the seismic signal from the sources at the observation points, are close to the Fourier coefficients found for the test function, which describes the given terrain image with tectonic damage. The described approaches can be used to improve the mathematical model of the distribution of the slowness of the spread of seismic waves in a given section of the geological environment.

Keywords: computer tomography, mine tomography, Fourier coefficients.

Литвин Олег Миколайович,

доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри Української інженерно-педагогічної академії, Харків, e-mail: academ_mail@ukr.net.

Литвин Олег Олегович,

доктор фіз.-мат. наук, доцент кафедри, декан Української інженерно-педагогічної академії, Харків, e-mail: loo71@bk.ru.

Драгун Володимир Володимирович,

аспірант Української інженерно-педагогічної академії, Харків, e-mail: vdragun.94@gmail.com.