Л.П. ВАКАЛ, Е.С. ВАКАЛ

УДК 519.6+004.02

АЛГОРИТМ НАИЛУЧШЕЙ РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ СПЛАЙНАМИ СО СВОБОДНЫМИ УЗЛАМИ

Аннотация. Предложен алгоритм наилучшего равномерного приближения сплайном с оптимальными узлами. Для поиска оптимальных узлов использована дифференциальная эволюция — один из лучших эволюционных алгоритмов, стабильно находящий глобальный оптимум функции за минимальное время. Коэффициенты сплайна определены как решение задачи сплайн-аппроксимации с фиксированными узлами. Приведены результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: наилучшая равномерная аппроксимация, сплайн, оптимальные узлы, дифференциальная эволюция.

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия интенсивно исследуется и используется в прикладных задачах аппарат сплайнов. Они применяются при расчете на прочность строительных конструкций, для аналитического описания поверхностей деталей машин, траектории движения резца станка с программным управлением и др. [1–3]. Особенно популярны интерполяционные сплайны степени не выше трех, поскольку соответствующей гладкости во многих задачах достаточно и параметры такого сплайна легко вычисляются. Однако нахождение параметров интерполяционных сплайнов более высоких степеней, например в случае неравномерной сетки, затруднительно [1].

На практике используются также сплайны наилучшего приближения. При одинаковом числе параметров такой сплайн приближает функцию не хуже, чем интерполяционный, и при этом для его построения не требуется задавать в узлах краевых условий [1]. С учетом этого во многих прикладных задачах применение сплайнов наилучшего приближения оказывается более предпочтительным [4, 5].

Принципиально различается два случая наилучшей аппроксимации сплайнами: с фиксированными и со свободными узлами, когда заданными считаются их число и степень сплайна, но сами узлы не фиксируются. В последнем случае узлы рассматриваются как свободные параметры, что позволяет не только значительно уменьшить погрешность аппроксимации сплайном, но и достичь минимальной погрешности при использовании оптимальных узлов. Отметим, что нахождение таких узлов является сложной нелинейной задачей многомерной оптимизации.

В настоящей статье рассматриваются сплайны наилучшего приближения в равномерной (чебышевской, минимаксной) норме и для поиска оптимальных узлов предлагается эвристический подход с применением алгоритма дифференциальной эволюции, предназначенного для поиска глобального оптимума нелинейных, недифференцируемых, мультимодальных функций многих переменных и являющегося прямым методом оптимизации.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЗОР МЕТОДОВ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Пусть $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция, $T=(t_1, \ldots, t_r)$ — вектор узлов, таких что $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_r < t_{r+1} = \beta$. Функция $s(x)$ называется сплайном степени n дефекта k $(0 \le k \le n)$ с узлами T, если на каждом промежутке $[t_{j-1}, t_j]$ $(j=1, \ldots, r+1)$ она совпадает с некоторым многочленом степени n и $s \in C^{n-k}[\alpha, \beta]$ [1]. Будем рассматривать множество $S_{n,r}$ полиномиальных сплайнов степени n дефекта $k=1$ с r узлами. Произвольный сплайн $s \in S_{n,r}$ можно представить в виде

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x-\alpha)^i + \sum_{i=1}^{r} a_{n+i} (x-t_i)_+^n, \tag{1}$$

причем такое представление единственно (см., например, [6]). В формуле (1) коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{n+r}$ — действительные числа и

$$(x-t_i)_+^n = \begin{cases} (x-t_i)^n, & x > t_i, \\ 0, & x \le t_i. \end{cases}$$

Задача наилучшего равномерного приближения функции f сплайном с r фиксированными узлами состоит в нахождении сплайна $s^* \in S_{n,r}$, для которого

$$\max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x) - s^*(x)| = \min_{\{a_0, a_1, \ldots, a_{n+r}\}} \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x) - s(x)|. \tag{2}$$

Методы решения задачи (2) достаточно хорошо разработаны. Они являются реализацией двух основных подходов. Первый подход [7–9] состоит в замене промежутка приближения $[\alpha, \beta]$ некоторой сеткой и сведении дискретной задачи (2) к задаче линейного программирования. Второй подход [10, 11] заключается в обобщении на случай сплайнов метода последовательных чебышевских интерполяций Ремеза [12]. Теоретической основой данного подхода является утверждение [13], что для каждой функции $f \in C[\alpha, \beta]$ существует наилучшая аппроксимация $s_f \in S_{n,r}$ такая, что разность $f - s_f$ имеет по крайней мере $(n+r+2)$ точек, в которых она достигает своего максимального по модулю значения с последовательной переменой знака.

Обозначим $\mu(T)$ погрешность наилучшего равномерного приближения функции f сплайном с фиксированными узлами T

$$\mu(T) = \min_{\{a_0, a_1, \ldots, a_{n+r}\}} \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x) - s(x, T)|.$$

Задача наилучшего равномерного приближения функции f сплайном с r свободными узлами состоит в нахождении сплайна $s^* \in S_{n,r}$, удовлетворяющего условию

$$\max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x) - s^*(x)| = \min_{\{T\}} \mu(\mathrm{T}). \tag{3}$$

В отличие от случая фиксированных узлов наилучшие сплайн-приближения со свободными узлами невозможно охарактеризовать только альтернансными свойствами разности функции и сплайна. Какими должны быть дополнительные условия, чтобы полностью охарактеризовать наилучшее сплайн-приближение, в настоящее время неизвестно [14]. Исследования в этом направлении продолжаются (см., например, [15]).

Для практического построения сплайна наилучшего приближения со свободными узлами необходимо найти оптимальный вектор узлов $T^* = (t_1^*, \ldots, t_r^*)$, на котором достигается минимум в задаче (3). Погрешность аппроксимации сплайном с узлами T^* обозначим $\rho = \mu(T^*)$. Это наименьшая погрешность приближения функции f в равномерной норме среди всех сплайнов $s \in S_{n,r}$.

При небольших r для поиска $T^* = (t_1^*, \ldots, t_r^*)$ можно применять общие методы минимизации функций многих переменных. Но с ростом числа узлов увеличивается размерность пространства поиска и возникают серьезные трудности численного дифференцирования. Кроме того, погрешность $\mu(T)$ обычно не чувствительна к малым изменениям в T вблизи T^* [8]. Все это ограничивает применение общих методов.

Более эффективными являются два специальных метода: секущей плоскости (secant plane method) и упрощенный метод Ньютона (simplified Newton's method), учитывающие характеристические свойства наилучшего равномерного приближения [8]. Однако сходимость методов типа Ньютона обеспечивается лишь в случае, если они стартуют с почти оптимальных узлов [16]. Поскольку в общем случае такие узлы неизвестны, то сходимость методов не гарантируется. Но даже если они сходятся, то в общем случае строятся локальные наилучшие приближения.

В [16] предложен алгоритм, сходящийся с произвольных узлов, например равноотстоящих, и позволяющий получать достаточно хорошую глобальную аппроксимацию. Он состоит из двух этапов: вначале вычисляются оптимальные узлы $\hat{T}$ кусочно-многочленного приближения (так называемая сегментная аппроксимация, в которой непрерывность аппроксиманта не требуется) с использованием метода regula falsi, затем узлы $\hat{T}$ фиксируются и строится сплайн необходимой гладкости с помощью аналога алгоритма Ремеза. Так как $\lambda(\hat{T}) < \rho \le \mu(\hat{T})$, где $\lambda(\hat{T})$ — погрешность кусочно-многочленного приближения с оптимальными узлами, то погрешность $|\rho - \mu(\hat{T})|$ меньше, чем значение $|\lambda(\hat{T}) - \mu(\hat{T})|$, которое можно вычислить с помощью алгоритма [16].

Таким образом, в существующих алгоритмах для нахождения оптимальных или близких к ним узлов, как правило, необходимо решать трансцендентные уравнения, системы таких уравнений или системы дифференциальных уравнений, что создает определенные вычислительные сложности. Поэтому актуальна разработка новых эффективных и более простых в реализации алгоритмов решения задачи (3).

Для поиска оптимальных узлов сплайна (аналогично случаю сегментной аппроксимации [17, 18]) предлагается адаптировать алгоритм дифференциальной эволюции (ДЭ) [19]. Он относится к группе эволюционных алгоритмов (ЭА) — современного эффективного инструмента решения оптимизационных задач. В ЭА создаются популяции из решений, которые в результате применения операторов скрещивания, мутации и селекции постоянно модифицируются. С ростом числа поколений решения сходятся в некоторую точку пространства решений, являющуюся глобальным оптимумом. Алгоритм ДЭ — один из лучших ЭА, с его помощью стабильно определяется оптимум функции за минимальное время [19]. Кроме того, он прост в реализации и использовании (содержит мало параметров, требующих настройки), легко распараллеливается.

Эволюционный процесс в алгоритме ДЭ начинается с генерации популяции случайных векторов, координатами которых являются возможные значения узлов сплайна. Далее для каждого вектора, называемого базовым, с использованием трех других случайных векторов из того же поколения создается мутантный вектор. Над последним выполняется операция скрещивания. Вектор, полученный после скрещивания, называется пробным. В новое поколение включается тот вектор — базовый или пробный, значение целевой функции (критерия оптимизации) которого меньше. Эволюционный процесс заканчивается, если выполняется одно из терминальных условий (исчерпано максимальное число поколений популяций и др. [19]).

Опыт применения ЭА для решения задач аппроксимации функций показал, что при большом числе оптимизируемых параметров их результативность ухудшается вследствие сильного увеличения размера области поиска [20–22], хотя и в этих случаях можно получить приемлемые результаты. В предлагаемом алгоритме наилучшего равномерного приближения сплайном со свободными узлами ДЭ применяется только для поиска оптимальных узлов $T^* = (t_1^*, \ldots, t_r^*)$, а коэффициенты сплайна $a_0, a_1, \ldots, a_{n+r}$ находятся как решение задачи аппроксимации сплайном с фиксированными узлами (2). Это позволяет преодолеть вычислительные трудности, вызванные большой размерностью, в случае одновременного поиска и узлов, и коэффициентов сплайна.

Далее приведена вычислительная схема алгоритма наилучшего равномерного приближения функции полиномиальным сплайном со свободными узлами, в котором для поиска оптимальных узлов применяется ДЭ.

1. Устанавливается номер поколения $G = 0$ и создается популяция $P_G = \{T_{1,G}, \ldots, T_{NP,G}\}$, состоящая из векторов $T_{i,G} = (t_{i,1,G}, \ldots, t_{i,r,G})$, $i = 1, \ldots, NP$, где NP — размер популяции. Координаты векторов вычисляются по формуле

$$t_{i,j,G} = \mathrm{rand}(0,1) \cdot (\beta - \alpha), \quad j = 1, \ldots, r, \tag{4}$$

где $\mathrm{rand}(0,1)$ — случайное число из интервала $(0,1)$.

2. Для каждого вектора $T_{i,G} = (t_{i,1,G}, \ldots, t_{i,r,G})$ вычисляется значение целевой функции $F(T_{i,G})$, равное погрешности наилучшего равномерного приближения заданной функции f сплайном s с узлами $t_{i,1,G}, \ldots, t_{i,r,G}$:

$$F(T_{i,G}) = \mu(T_{i,G}).$$

Для нахождения величины $\mu(T_{i,G})$ применяется алгоритм чебышевской аппроксимации полиномиальными сплайнами степени n дефекта $k = 1$ с фиксированными узлами [9], в котором используется сведение к задаче линейного программирования с главной двойственной максимум-задачей заменой промежутка аппроксимации $[\alpha, \beta]$ некоторой (равномерной или неравномерной) сеткой $D_m = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset [\alpha, \beta]$, где $m >> n + r + 1$.

3. Для каждого базового вектора $T_{i,G}$, $i = 1, \ldots, NP$, определяется мутантный вектор $V_{i,G} = (v_{i,1,G}, \ldots, v_{i,r,G})$ по формуле

$$V_{i,G} = T_{b,G} + FM \cdot (T_{c,G} - T_{d,G}), \tag{5}$$

где b, c и d — случайные целые числа из промежутка $[1, NP]$, $b \neq c \neq d \neq i$, FM — заданная положительная вещественная константа из интервала $(0,2]$, которая называется силой мутации и определяет амплитуду возмущений, вносимых в вектор $T_{b,G}$ внешним шумом. Если какая-либо из координат вектора $V_{i,G}$ выходит за границы промежутка $[\alpha, \beta]$, то с помощью генератора случайных чисел выбираются новые значения индексов b, c, d и по формуле (5) выполняется пересчет вектора $V_{i,G}$.

4. Выполняется операция скрещивания. Вычисляются координаты пробного вектора $U_{i,G} = (u_{i,1,G}, \ldots, u_{i,r,G})$, $i = 1, \ldots, NP$, по формуле

$$u_{i,j,G} = \begin{cases} v_{i,j,G}, & \text{если } \operatorname{rand}(0,1) \le CR \vee j = j_{\text{rand}}, \\ t_{i,j,G} & \text{в противном случае}, \end{cases} \quad j = 1, \ldots, r, \tag{6}$$

где j_{rand} — случайное целое число из диапазона $[1, r]$, CR — заданная вероятность скрещивания, с которой пробный вектор $U_{i,G}$ унаследует искаженный мутацией генетический признак от вектора $T_{b,G}$.

5. Вычисляется значение целевой функции пробного вектора $F(U_{i,G})$.

6. Для включения в новое поколение с номером $G+1$ выбирается тот из векторов $U_{i,G}$ и $T_{i,G}$, значение целевой функции F которого меньше

$$T_{i,G+1} = \begin{cases} U_{i,G}, & \text{если } F(U_{i,G}) \le F(T_{i,G}), \\ T_{i,G} & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

7. Если выполняется одно из терминальных условий: исчерпано максимальное число поколений популяции $G_{\max}$, относительный разброс значений целевой функции в популяции меньше заданной величины δ (условие стагнации эволюционного процесса)

$$\max_{i=1,\ldots,NP} F(T_{i,G}) - \min_{i=1,\ldots,NP} F(T_{i,G}) < \delta \cdot \min_{i=1,\ldots,NP} F(T_{i,G}),$$

то для лучшего вектора узлов из последнего поколения вычисляются коэффициенты сплайна наилучшего равномерного приближения и завершается работа алгоритма. По умолчанию полагается $G_{\max} = 200$, $\delta = 10^{-4}$. Если ни одно из перечисленных условий не выполняется, то осуществляется переход к п. 3.

Замечание 1. Для корректной работы алгоритма в пп. 1, 3 и 4 после вычислений соответственно по формулам (4)–(6) необходимо выполнять процедуру упорядочивания координат векторов по возрастанию.

Замечание 2. Алгоритм можно использовать не только для сплайнов степени n дефекта $k = 1$, но и для аппроксимации сплайнами произвольного дефекта $0 \le k \le n$. Для этого в алгоритме [9], который применяется для вычисления значений целевой функции, необходимо внести соответствующие изменения в процедуру формирования начальной симплекс-таблицы задачи линейного программирования.

Размер популяции NP, сила мутации FM и вероятность скрещивания CR являются параметрами настройки алгоритма ДЭ, и выбор их значений в большой степени зависит от решаемой задачи [19]. По результатам выполненного исследования для поиска оптимальных узлов сплайна рекомендуются следующие настройки: $5r \le NP \le 10r$, $0.4 \le FM \le 0.5$, $0.9 \le CR \le 1$. Отметим, что ввиду стохастического характера алгоритма ДЭ для получения приемлемого по точности решения алгоритм нужно выполнить несколько раз. В частности, при проведении вычислительного эксперимента выполнялось 10 запусков алгоритма.

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Для проверки эффективности предложенного алгоритма выполнен вычислительный эксперимент по получению наилучших равномерных приближений ряда функций сплайнами различной степени n и с разным количеством узлов r. В табл. 1 и 2 приведены результаты аппроксимации на отрезке $[0,1]$ для функ-

Т а б л и ц а 1 . Аппроксимация функции $f_1(x)=(1+x)^{-1}$ на отрезке $[0,1]$

Количество узлов, r	Сплайн степени n		
	$n=3$	$n=4$	$n=5$
0	$\rho=1.263\cdot 10^{-3}$	$\rho=2.166\cdot 10^{-4}$	$\rho=3.717\cdot 10^{-5}$
1	$\rho=1.494\cdot 10^{-4}$ $t_1^*=0.3895$	$\rho=2.063\cdot 10^{-5}$ $t_1^*=0.3935$	$\rho=2.972\cdot 10^{-6}$ $t_1^*=0.3965$
2	$\rho=3.750\cdot 10^{-5}$ $t_1^*=0.2560,\ t_2^*=0.5397$	$\rho=4.202\cdot 10^{-6}$ $t_1^*=0.2704,\ t_2^*=0.5352$	$\rho=5.088\cdot 10^{-7}$ $t_1^*=0.27996,\ t_2^*=0.5291$
3	$\rho=1.345\cdot 10^{-5}$ $t_1^*=0.1938,\ t_2^*=0.3921,$ $t_3^*=0.6332$	$\rho=1.259\cdot 10^{-6}$ $t_1^*=0.2059,\ t_2^*=0.3960,$ $t_3^*=0.6234$	$\rho=1.303\cdot 10^{-7},$ $t_1^*=0.21650,\ t_2^*=0.3988,$ $t_3^*=0.6139$
4	$\rho=5.952\cdot 10^{-6}$ $t_1^*=0.1549,\ t_2^*=0.3070,$ $t_3^*=0.4850,\ t_4^*=0.6944$	$\rho=4.770\cdot 10^{-7}$ $t_1^*=0.1662,\ t_2^*=0.3141,$ $t_3^*=0.4851,\ t_4^*=0.6835$	$\rho=4.296\cdot 10^{-8}$ $t_1^*=0.1764,\ t_2^*=0.3199,$ $t_3^*=0.4840,\ t_4^*=0.6729$

Т а б л и ц а 2 . Аппроксимация функции $f_2(x)=\sqrt{x}$ на отрезке $[0,1]$

Количество узлов, r	Сплайн степени n		
	$n=2$	$n=3$	$n=4$
0	$\rho=0.06764$	$\rho=0.04598$	$\rho=0.03471$
1	$\rho=0.01916$ $t_1^*=0.0590$	$\rho=0.01223$ $t_1^*=0.0395$	$\rho=0.00894$ $t_1^*=0.0295$
2	$\rho=0.00823$ $t_1^*=0.0109,\ t_2^*=0.1523$	$\rho=0.00494$ $t_1^*=0.0064,\ t_2^*=0.1075$	$\rho=0.00349$ $t_1^*=0.0045,\ t_2^*=0.0823$
3	$\rho=0.00435$ $t_1^*=0.0031,\ t_2^*=0.0414,$ $t_3^*=0.2381$	$\rho=0.00243$ $t_1^*=0.0016,\ t_2^*=0.0261,$ $t_3^*=0.1747$	$\rho=0.00165$ $t_1^*=0.0010,\ t_2^*=0.0185,$ $t_3^*=0.1357$

ций $f_1(x)=(1+x)^{-1}$ и $f_2(x)=\sqrt{x}$ соответственно. Отметим, что результаты для функции $f_2(x)=\sqrt{x}$ практически совпадают с известными [8] результатами, полученными по методу секущей плоскости и упрощенному методу Ньютона. Среднее число поколений, необходимых для нахождения оптимальных узлов с помощью алгоритма ДЭ, в случае функции $f_1(x)=(1+x)^{-1}$ равно 20, 35, 60 и 87 при $r=1, 2, 3, 4$ соответственно, а в случае функции $f_2(x)=\sqrt{x}$ — 17, 38 и 58 при $r=1$, 2 и 3 соответственно.

В табл. 3 приведены результаты аппроксимации функций кубическими сплайнами с тремя узлами. Для сравнения точности приближений сплайнами с различными узлами для ряда функций используются следующие обозначения: ρ — погрешность наилучшей равномерной аппроксимации кубическим

Т а б л и ц а 3 . Аппроксимация функций кубическими сплайнами с тремя узлами

Функция	ρ	$\mu(\hat{T})$	$\mu(\tilde{T})$
$f_1(x)=(1+x)^{-1},\ x\in[0,1]$	$1.345\cdot 10^{-5}$	$2.039\cdot 10^{-5}$	$3.328\cdot 10^{-5}$
$f_2(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,1]$	$2.43\cdot 10^{-3}$	$3.52\cdot 10^{-3}$	$2.724\cdot 10^{-2}$
$f_3(x)=e^x,\ x\in[0,1]$	$5.716\cdot 10^{-6}$	$8.487\cdot 10^{-6}$	$9.524\cdot 10^{-6}$
$f_4(x)=(1+x^2)^{-1},\ x\in[-5,5]$	$1.509\cdot 10^{-2}$	$5.112\cdot 10^{-2}$	$1.1421\cdot 10^{-1}$

сплайном с оптимальными узлами T^*, найденными с помощью алгоритма ДЭ; $\mu(\hat{T})$ — погрешность равномерного приближения сплайном, где в качестве узлов выбраны, как предложено в [16], оптимальные узлы $\hat{T}$ сегментной аппроксимации (для расчетов последовательно применялись алгоритмы из [17] и [9]); $\mu(\tilde{T})$ — погрешность равномерного приближения сплайном с равноотстоящими узлами $\tilde{T}$ (для расчетов применялся алгоритм из [9]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен алгоритм наилучшего равномерного приближения полиномиальным сплайном с оптимальными узлами. Этот сплайн имеет наименьшую погрешность аппроксимации функции среди всех сплайнов той же степени и с таким же количеством узлов. Для поиска оптимальных узлов используется ДЭ — один из лучших стохастических алгоритмов, стабильно находящий глобальный оптимум функции за минимальное время. К преимуществам ДЭ можно отнести высокую точность определения оптимальных узлов, простоту программной реализации и использования (содержит мало параметров настройки, требующих подбора), что подтверждено результатами вычислительного эксперимента. Предложенный подход с использованием ДЭ для поиска оптимальных узлов можно применять и в случае сплайнов наилучшего квадратичного приближения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. Москва: Наука, 1976. 248 с.
2. Бердышев В.И., Петрак Л.В. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. 297 с.
3. Vakal E.S., Kivva S.L., Mistetskii G.E., Stelya O.B. Solution method for nonlinear parabolic equations. *Journal of Mathematical Sciences*. 1991. Vol. 54, N 2. P. 781–786.
4. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. Киев: Наук. думка, 1989. 272 с.
5. Малачівський П.С., Скопецький В.В. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення. Київ: Наук. думка, 2013. 270 с.
6. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. Москва: Наука, 1987. 424 с.
7. Barrodale J., Young A. A note on numerical procedures for approximation by spline functions. *Comput. J*. 1966. Vol. 9. P. 318–320.
8. Esch R.E., Eastman W.L. Computational methods for best spline function approximation. *Journal of Approximation Theory*. 1969. Vol. 2, N 1. P. 85–96.
9. Вакал Л.П. Побудова найкращих чебишовських наближень сплайнами. *Штучний інтелект*. 2017. № 2. С. 94–100.
10. Schumaker L.L. Some algorithms for the computation of interpolating and approximating spline functions. Theory and applications of spline functions. New York: Academic Press, 1969. P. 87–102.
11. Nürnberger G., Sommer M. A Remez type algorithm for spline functions. *Numer. Math*. 1983. Vol. 41, N 1. P. 117–146.
12. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наук. думка, 1969. 623 с.
13. Schumaker L.L. Uniform approximation by chebyshev spline functions. II. Free knots. *SIAM Journal of Numerical Analysis*. 1968. Vol. 5, N 4. P. 647–656.
14. Nürnberger G. Bivariate segment approximation and free knot splines; research problems 96-4. *Constructive Approximation*. 1996. Vol. 12, N 4. P. 555–558.

15. Crouzeix J.P., Sukhorukova N., Ugon J. Characterization theorem for best polynomial spline approximation with free knots, variable degree and fixed tails. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2017. Vol. 172, N 3. P. 950–964.

16. Meinardus G., Nürnberger G., Sommer M., Strauss H. Algorithm for piecewise polynomials and splines with free knots. *Math. of Computation*. 1989. Vol. 53, N 187. P. 235–247.

17. Vakal L.P. Seeking optimal knots for segment approximation. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 11. P. 68–75.

18. Vakal L.P., Kalenchuk-Porkhanova A.A., Vakal E.S. Increasing the efficiency of Chebyshev segment fractional rational approximation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 5. P. 759–765.

19. Storn R., Price K. Differential evolution — a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*. 1997. Vol. 11. P. 341–359.

20. Вакал Л.П. Генетичні алгоритми для чебишовської апроксимації. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2013. № 12. С. 20–26.

21. Vakal L.P. Solving uniform nonlinear approximation problem using continuous genetic algorithm. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 6. P. 49–59.

22. Вакал Л.П. Апроксимація функцій багатьох змінних із застосуванням алгоритму диференціальної еволюції. *Математичні машини і системи*. 2017. № 1. С. 90–96.

Надійшла до редакції 26.06.2018.

Л.П. Вакал, Є.С. Вакал

АЛГОРИТМ НАЙКРАЩОЇ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ СПЛАЙНАМИ З ВІЛЬНИМИ ВУЗЛАМИ

Анотація. Запропоновано алгоритм найкращого рівномірного наближення сплайном з оптимальними вузлами. Для пошуку оптимальних вузлів застосовано диференціальну еволюцію — один з найкращих еволюційних алгоритмів, що стабільно знаходить оптимум функції за мінімальний час. Коефіцієнти сплайна визначено як розв'язання задачі сплайн-апроксимації з фіксованими вузлами. Наведено результати обчислювального експерименту.

Ключові слова: найкраща рівномірна апроксимація, сплайн, оптимальні вузли, диференціальна еволюція.

L.P. Vakal, E.S. Vakal

ALGORITHM FOR BEST UNIFORM SPLINE APPROXIMATION WITH FREE KNOTS

Abstract. An algorithm for best uniform spline approximation with free knots is presented in this paper. A differential evolution is used for finding the optimal knots. It is one of the best evolutionary algorithms which finds function's global optimum in minimum time. Spline coefficients are computed as a solution of a spline-approximation problem with fixed knots. Results of the numerical experiment are given.

Keywords: best uniform approximation, spline, optimal knots, differential evolution.

Вакал Лариса Петровна,
кандидат техн. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: lara.vakal@gmail.com.

Вакал Евгений Сергеевич,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: jvakal@gmail.com.