

заряду молекул білка. У ІЕТ білка і БПК відбувається пригнічення надлишкової іонізації карбоксильних груп, що призводить з однієї сторони до зменшення агрегативної стійкості, а з другої – до утворення механічно міцного адсорбційного шару із колоїдних агрегатів, що утворилися в розчині, які частково включаються у формування плівки піни, підвищуючи її міцність.

У глибині плівки, між адсорбційними шарами, утворюється тиксотропна структура, яка значно підвищує в'язкість цієї частини плівки. Самі ж адсорбційні шари залишаються мало в'язкими, про що свідчать отримані нами експериментальні дані в'язкості дисперсій білка і БПК в межах рН 4...5. Утворення тиксотропної структури в присутності БПК значно уповільнює процес стікання плівки і підвищує СП.

Зміна рН дисперсій білка і БПК у лужну сторону супроводжується зниженням ПН, зменшенням ПЗ і СП. Можна припустити, що отриманий ефект пов'язаний зі зменшенням молекулярної маси і підвищенням

ступеня дисперсності піноутворювача при підвищенні рН середовища.

Відомо, що для стійкості піни має значення не стільки низький ПН, скільки здатність рідкої плівки легко і швидко змінювати його значення.

Слід відзначити, що зниження ПЗ і СП у білка відбувається у білка в значно більшій мірі, ніж у БПК. Дисперсія БПК утворює стійку піну, яка незначно змінюється у широкому діапазоні рН, що вірогідно пов'язано зі збереженням тиксотропної структури.

Таким чином, на основі проведених досліджень встановлено, що для підвищення СП поза ізоелектричного діапазону рН білків, необхідно вводити стабілізатори-загущувачі у вигляді натуральних полісахаридів – пектинів, крохмалю, альгінату натрію, або комплексних структуроутворювачів у вигляді білок-полісахаридних структур, які здатні стабілізувати і зміцнити піноподібні харчові структури при виробництві збивних виробів.

Поступила 02 2010

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Тихомиров В.К. Пены. Теория и практика их получения и разрушения. – М.: Химия, 1983. – 264 с.
2. Фролов Ю.Г. Курс коллоидной химии. Поверхностные явления и дисперсные системы. Учебник для вузов. – М.: Химия, 1988. – 464 с.
3. Д'яконова А.К. Дослідження взаємодії білків та аніонних полісахаридів методом турбодіметрії // Зб. наук. пр. ОДАХТ, 1999. – Вип. 20. – 166-169.

УДК 615.074;543.426

**БЕЛЬТЮКОВА С.В., д-р.хим.наук, профессор, БЫЧКОВА А.А., аспирант**

Одесская национальная академия пищевых технологий,

### ЛЮМИНЕСЦЕНТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХЛОРОГЕНОВОЙ КИСЛОТЫ В ЗЕРНАХ КОФЕ

Разработана методика определения хлорогеновой кислоты в кофе, основанная на использовании собственной твердофазной люминесценции хлорогеновой кислоты, усиленной в присутствии ионов иттрия (III). Предел обнаружения хлорогеновой кислоты на сорбенте составляет 0,035мкг/мл.

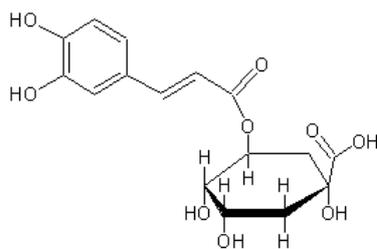
**Ключевые слова:** люминесценция, иттрий (III), хлорогеновая кислота.

A spectrofluorimetric method for determination of chlorogenic acid in coffee was developed. The method is based on the own luminescence on a firm phase of chlorogenic acid enhanced by yttrium (III). The detection limit is 0.035mkg/ml chlorogenic acid.

**Keywords:** luminescent, yttrium (III), chlorogenic acid.

Хлорогеновая кислота – 1,3,4,5-тетрагидроксициклогексан карбоновая кислота 3-(3,4-дигидроксициннамат) является одним из основных веществ фенилпропаноидной цепи метаболизма и оказывает антиоксидантное, антиканцерогенное, противовоспалительное и анальгетическое действие [1].

В больших количествах содержится в зернах кофе, листьях черники обыкновенной, арники горной,



ромашки лекарственной и других растениях. Зерна сырого кофе содержат примерно 7-10% хлорогеновых кислот. Полифенолы кофейных ягод обладают широким спектром биологической активности. Хлорогеновая кислота является стимулятором центральной

нервной системы, обладает кофеиноподобным, но более слабым действием, способна усиливать интенсивность белкового обмена в мозговой ткани. Она ингибирует всасывание глюкозы в организме, чем способствует регулированию уровня сахара в крови, способствует изменению тонуса кровеносных сосудов головного мозга и сердца, является одним из лучших средств уменьшения и предупреждения утомления и головной боли [2].

Содержание хлорогеновой кислоты в кофе зависит от района произрастания, почвенно-климатических условий, высоты расположения плантаций над уровнем моря, применяемых органических и минеральных удобрений, первичной переработки кофейных плодов, условий хранения и т.д. С учетом этих факторов, а также генетической принадлежности кофе к тому или иному виду качество сырья сильно изменяется, поэтому к качеству кофе и содержанию основных полифенолов в нем предъявляются жесткие требования. Проведение экспертизы подлинности с целью идентификации сорта жареного молотого кофе осуществляют по содержанию основного кислотного компонента кофейных зерен — хлорогеновой кислоты. Известны методы качественного определения хлорогеновой кислоты, в том числе и флавонолов, с использованием ТСХ и бумажной хроматографии для определения подлинности растительного сырья [3,4].

Описаны спектроскопические методы определения хлорогеновой кислоты. Спектрофотометрическая методика определения фенольного состава подземных органов сабельника болотного позволяет провести качественный анализ по спектрам поглощения, расчет

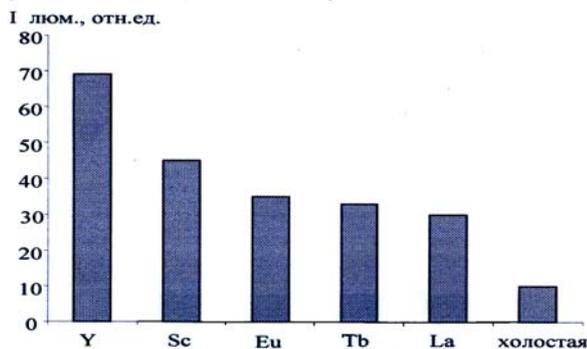


Рис. 1. Інтенсивність люмінесценції комплексів хлорогенової кислоти з різними металами

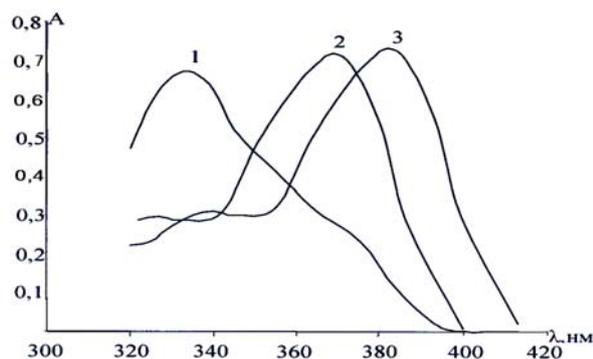


Рис. 2. Спектри поглинання хлорогенової кислоти (1), її комплексу з іттриєм (II) (2) і різнолігандного комплексу з триоктилфосфіноксидом (3)

количественного содержания флавоноидов проводится в пересчете на хлорогеновую кислоту [5]. Чаще всего полифенольные компоненты растительного сырья, в том числе и хлорогеновую кислоту определяют методом высокоэффективной жидкостной хроматографии (ВЭЖХ) с фотодиодным матричным детектированием [6], с помощью обращено-фазовой ВЭЖХ [7, 8]. Эти методы дают возможность одновременного обнаружения флавоноидов в лекарственных растениях, характеризуются высокими пределами обнаружения  $(5-6) \cdot 10^{-8}$  моль/л. Однако они требуют наличия достаточно дорогостоящей и сложной аппаратуры.

Ввиду большого интереса к фенолпропаноидам, как важным природным антиоксидантам, обладающим биологической активностью, разработка простых экспрессных и воспроизводимых методик определения АО в растительном сырье представляет собой актуальную задачу. Весьма перспективными являются тест-методы, которые позволяют дать предварительную полуколичественную или количественную оценку присутствия химического компонента в образце, а также провести предварительный скрининг, отбраковку и установление фальсификации образцов. Особенно это важно в процессе контроля качества пищевых продуктов и растительного сырья.

Нами разработана методика сорбционно-люминесцентного определения хлорогеновой кислоты

са с иттрием (III) регистрировали с помощью спектрометра СДЛ-1, люминесценцию возбуждали светом ртутно-кварцевой лампы ДРШ-250 со светофильтром УФС-2, выделяющим излучение с  $\lambda_{\text{макс}} = 365$  нм. Спектры поглощения регистрировали с помощью спектрофотометра UV-VIS Specord M40, pH растворов измеряли с помощью иономера универсального ЭВ-74. Раствор хлорогеновой кислоты ( $1,0 \cdot 10^{-3}$  моль/л) готовили по точной навеске препарата в этаноле. Растворы хлоридов иттрия (III), лантана (III), скандия (III) ( $1,0 \cdot 10^{-1}$  моль/л) готовили растворением соответствующих оксидов в соляной кислоте (1:1).

Избыток кислоты выпаривали до влажных солей и разбавляли дистиллированной водой. Буферный раствор гексаметилентетрамина 40%-ного готовили растворением навески препарата в дистиллированной воде. Для дальнейших измерений применяли 4%-ный раствор гексаметилентетрамина, полученный разбавлением исходного дистиллированной водой. Стандартный раствор триоктилфосфиноксида (ТОФО) ( $1 \cdot 10^{-3}$  моль/л) готовили растворением точной навески препарата в этаноле и раствор Тритон X-100 (1%-ный) разбавлением исходного в дистиллированной воде.

*Экспериментальная часть.* Этанольный раствор хлорогеновой кислоты при облучении УФ-светом ртутной лампы с  $\lambda_{\text{макс}} = 365$  нм проявляет люминесцентные свойства, но интенсивность люминесценции

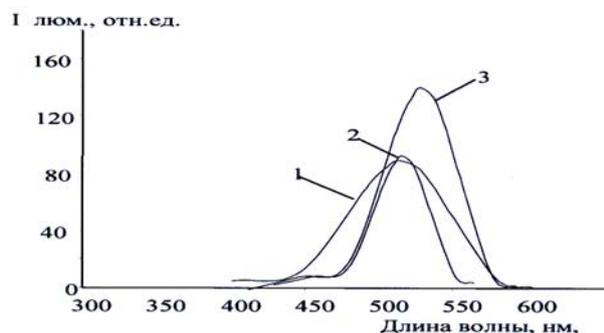


Рис. 3. Спектры люмінесценції хлорогенової кислоти (1), її комплексу з іттриєм (III) (2) і різнолігандного комплексу з триоктилфосфіноксидом (3)

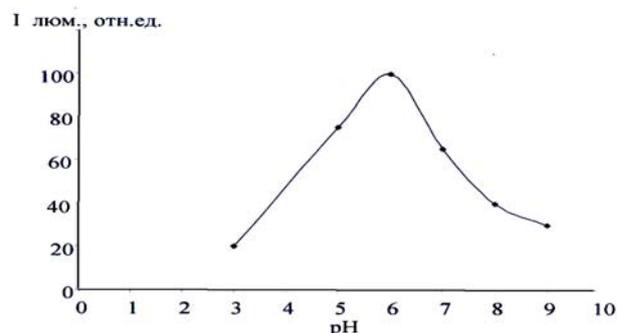


Рис. 4. Зависимость интенсивности люминесценции комплекса от pH

в зернах кофе, основанная на регистрации собственной люминесценции этого препарата, усиленной в присутствии ионов иттрия (III). Способ позволяет осуществлять быстрый скрининг качества зерен натурального кофе. *Аппаратура и материалы.* Спектры люминесценции хлорогеновой кислоты и ее комплек-

( $I_{\text{люм.}}$ ) невелика. Известно, что  $I_{\text{люм.}}$  лиганда в некоторых случаях может возрастать при комплексообразовании с ионами металлов, не имеющих собственного поглощения в видимой области спектра.

В связи с этим было рассмотрено влияние на  $I_{\text{люм.}}$  хлорогеновой кислоты ионов иттрия, лантана,

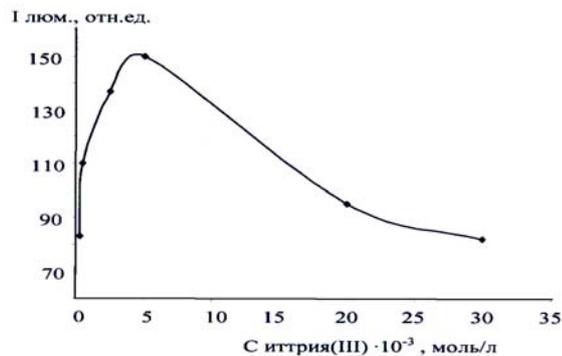


Рис. 5. Зависимость I люм. комплекса от концентрации иттрия(III) на фосфате алюминия

скандия, а также европия, тербия (рис.1). Наибольшей интенсивностью люминесценции обладают комплексы с Y (III), который и был выбран для дальнейших исследований. Ионы Y (III) вызывают увеличение интенсивности люминесценции хлорогеновой кислоты в этанольной среде в 2 раза. Спектр поглощения этанольного раствора хлорогеновой кислоты характеризуется полосой в УФ-области спектра с  $\lambda_{\text{макс.}}=335\text{нм}$  с молярным коэффициентом поглощения  $\epsilon=23500\text{ л/см}\cdot\text{моль}$ , что свидетельствует об интенсивном поглощении этим лигандом УФ-излучения. При комплексообразовании с ионом Y (III) полоса поглощения хлорогеновой кислоты сдвигается в видимую область на 35 нм, максимум поглощения составляет  $\lambda_{\text{макс.}}=370\text{нм}$ .

Батохромное смещение максимума спектра поглощения хлорогеновой кислоты может служить подтверждением комплексообразования с ионом Y (III). Установлено, что при добавлении донорно-активной добавки – триоктилфосфиноксида максимум полосы поглощения комплекса хлорогеновой кислоты с ионами Y (III) сдвигается еще на 15 нм и составляет  $\lambda_{\text{макс.}}=385\text{нм}$ , что свидетельствует об образовании разнолигандного комплекса (рис.2).

Интенсивность люминесценции комплекса усиливается на сорбентах. Экспериментально были выбраны сорбенты, на которых  $I_{\text{люм.}}$  хлорогеновой кислоты наибольшая. Для этого исследована сорбция комплекса на различных сорбентах: пенополиуретане, цеолитах (CaA, NaA), фосфате алюминия, силикагеле, сорбентах декстранового типа Sephadex. Максимальная интенсивность люминесценции комплекса наблюдается на фосфате алюминия. В присутствии ионов иттрия (III) на фосфате алюминия интенсивность люминесценции хлорогеновой кислоты возрастает в 7 раз за счет того, что возрастает жесткость молекулы и уменьшаются внутримолекулярные потери энергии возбуждения.

Хлорогеновая кислота на фосфате алюминия проявляет люминесцентные свойства, спектр люминесценции характеризуется полосой с максимумом при  $\lambda_{\text{изл.}}=508\text{нм}$ . Спектр люминесценции комплекса с иттрием сдвинут по сравнению со спектром люминесценции хлорогеновой кислоты на 7 нм в сторону длинных волн, и имеет максимум при  $\lambda_{\text{изл.}}=515\text{нм}$  и на 10 нм в присутствии ТОФО ( $\lambda_{\text{изл.}}=518\text{нм}$ ) (рис. 3).

Интенсивность люминесценции хлорогеновой кислоты на сорбенте зависит от pH раствора, из кото-

рого проводится сорбция. Сорбция проходит в интервале pH от 3 до 8,5. Максимальная  $I_{\text{люм}}$  наблюдается при pH 5,8-6,2 (рис. 4). Для создания оптимального значения pH в растворе использовали 4%-ный раствор уротропина.

Изучение зависимости интенсивности люминесценции хлорогеновой кислоты от количества иттрия (III) на фосфате алюминия показало, что наибольшая интенсивность люминесценции наблюдается в интервале концентраций  $(2,5-8)\cdot 10^{-3}$  моль/л (рис.5). Нами выбрана концентрация иттрия (III) –  $5\cdot 10^{-3}$  моль/л. Линейная граница зависимости интенсивности люминесценции комплекса от концентрации хлорогеновой кислоты наблюдается в диапазоне концентраций хлорогеновой кислоты  $(1-70)\cdot 10^{-3}\text{мг/мл}$ .

Установлено, что интенсивность люминесценции комплекса на фосфате алюминия возрастает в 2 раза в присутствии донорно-активного вещества – триоктилфосфиноксида и в 2,5 раза в присутствии неионного поверхностно-активного вещества – Тритон X-100.

Время сорбции хлорогеновой кислоты составля-

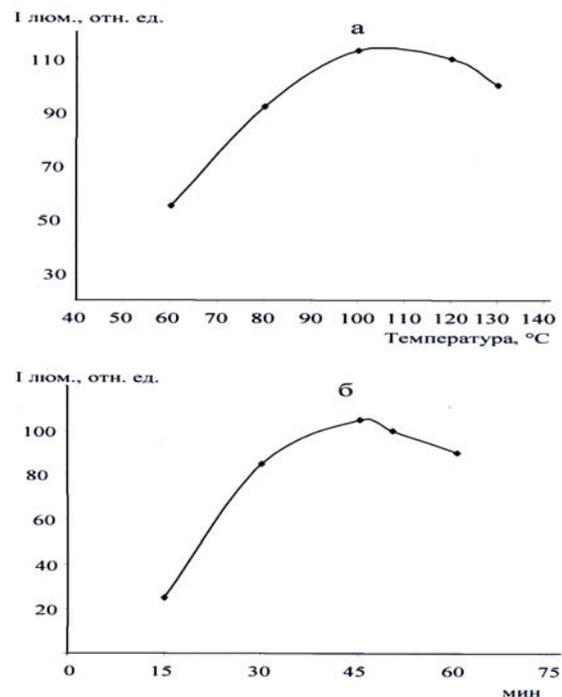


Рис. 6. Зависимость I люм. сорбата комплекса от температуры (а) и длительности высушивания (б)

ет 15-20 минут. Интенсивность люминесценции сорбата зависит от температуры (рис.6.а) и времени высушивания сорбента (рис.6.б).

Как видно из рисунка максимальная интенсивность люминесценции наблюдается при высушивании сорбата при 100°C на протяжении 45 минут.

На основании полученных результатов разработана методика сорбционно-люминесцентного определения хлорогеновой кислоты в различных сортах кофе. Определение проводили методом добавок.

Поскольку в зернах кофе доминирующими фенолпропаноидами - производными оксикоричной кислоты наряду с хлорогеновой кислотой являются

феруловая и хинная, то с помощью метода тонкослойной хроматографии (ТСХ) была проведена идентификация сопутствующих кислот. Пластинки «Силуфол УФ 254» 15x15 см перед использованием активировали в сушильном шкафу при 100-105°C в течение 1 часа. На линию старта пластинки «Силуфол УФ 254» наносили микропипеткой около 0,03 мл экстракта исследуемого образца кофе и стандартного раствора хлорогеновой кислоты (1·10<sup>-4</sup> моль/л). Хроматографическую пластинку помещали в камеру, которую предварительно насыщали не менее 1 ч. смесью растворителей: хлороформ-метиловый спирт-вода (26:14:13) либо хлороформ-этиловый спирт-вода (26:16:3), хроматографировали восходящим способом. Когда фронт растворителей проходил около 13 см, пластинку вынимали из камеры, сушили на воздухе в течение 5 мин. и просматривали в УФ-свете при длине волны λ<sub>возб.</sub> = 365 нм.

На хроматограмме были обнаружены только пятна, соответствующие хлорогеновой кислоте (R<sub>f</sub> 0,2), которые светились голубым светом. Отсутствие пятен, соответствующих феруловой и хинной кислот можно объяснить тем, что согласно литературным данным содержание феруловой и хинной кислот в кофе слишком мало, в 45-55 раз меньше, чем хлорогеновой.

*Методика определения.*

Навеску 2 г измельченных на мельнице зерен кофе переносят в колбу, прибавляют 10 мл хлороформа для обезжиривания кофе и перемешивают на магнитной мешалке в течение 60 минут при комнатной температуре. Полученный экстракт отфильтровывают на фильтре «синяя лента» и выбрасывают. Экстракцию проводят дважды. Высушивают осадок кофе на воздухе на протяжении одного часа, потом в сушильном шкафу на протяжении 60 минут при 50°C. Высушенный и обезжиренный кофе помещают в колбу, обрабатывают 10 мл этилацетата, перемешивают 30 минут. Экстракцию проводят дважды для извлечения в экстракт хлорогеновой кислоты.

Таблица 1

Результаты определения хлорогеновой кислоты в зернах кофе

Сорт кофе	Найдено, мг/г	Sr
Carte Noir Espresso (Франция)	13,4	0,025
Elite Fort (Польша)	28,0	0,040
Espresso Originale Paulig (Финляндия)	9,5	0,010
Carte Noir Arabica Exclusive(Франция)	16,0	0,025
Зерна сырого кофе сорта «Robusta»	85,0	0,012

В качестве фосфата алюминия использовали медицинский препарат «Фосфалюгель», который предварительно отмывали дистиллированной водой, отфильтровывали и высушивали.

В три пробирки помещают по 50 мг фосфата алюминия, прибавляют 0,5 мл этилацетатного экстракта из зерен кофе, в две из них прибавляют по 0,2 мл стандартного раствора хлорогеновой кислоты с содержанием 1·10<sup>-4</sup> моль/л, перемешивают в течение 20 минут, высушивают при 100°C в течение 15 минут.

Затем добавляют в каждую пробирку по 0,4 мл водного раствора хлорида иттрия (III) (5·10<sup>-3</sup> моль/л), 0,1 мл раствора триоктилфосфиноксида (1·10<sup>-3</sup> моль/л), 0,1 мл раствора Тритон X-100 (0,1%-ного) и 0,1 мл буферного раствора гексаметилентетрамина 4%-ного с рН=6,0 и перемешивают в течение 30 минут.

Осадок отфильтровывают и высушивают в течение 45 минут при 100°C. Затем растирают до порошкообразного состояния и регистрируют интенсивность люминесценции комплекса, иммобилизованного на сорбенте при λ<sub>изл.</sub> = 518 нм, при возбуждении люминесценции светом ртутной лампы со светофильтром УФС-2 (λ<sub>возб.</sub> = 365 нм).

Аналогично готовят пробы со второй добавкой по содержанию в два раза превышающей первую. Содержание хлорогеновой кислоты рассчитывают по методу добавок по формуле:

$$C_x = C_{доб.} \cdot I_x / I_{x+доб.} - I_x, \text{ где}$$

C<sub>x</sub> – содержание хлорогеновой кислоты в пробе,

C<sub>доб.</sub> – концентрация добавки,

I<sub>x</sub> – интенсивность люминесценции пробы без добавки,

I<sub>x+доб.</sub> – интенсивность люминесценции пробы с добавкой.

На основании разработанной методики определено содержание хлорогеновой кислоты в зернах кофе разных производителей (табл.1). Как видно из таблицы, содержание хлорогеновой кислоты в различных сортах кофе колеблется от 9,5 до 85,0 мг/г. Наибольшее содержание хлорогеновой кислоты обнаружено в зернах сырого кофе сорта «Робуста». Результаты определения проверены методом «введено-найденно» и показана правильность разработанной методики. дел обнаружения хлорогеновой кислоты составляет 0,035 мкг/мл.

Предложенная методика определения содержания хлорогеновой кислоты может быть использована для экспрессной оценки качества кофе.

В этом случае интенсивность люминесценции сорбата, полученного из кофе и подготовленного согласно методике, можно сравнивать с эталонными образцами, приготовленными предварительно.

Интенсивность люминесценции сорбата комплекса сохраняется в течение 6-7 месяцев. Данная методика выгодно отличается от существующих отсутствием токсичных реактивов, дорогостоящего оснащения, а также непродолжительностью времени, затраченного на анализ.

Поступила 01. 2010

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Дейнека В.И. Хлорогеновая кислота плодов и листьев некоторых растений семейства Berberidaceae / Дейнека В.И., Хлебников В.А., Скоропудов В.Н., Анисимович И.П. // Химия растительного сырья. — 2008. — № 1. — С. 57 — 61.
2. Grace S.C. Seasonal differences in foliar content of chlorogenic acid, a phenylpropanoid antioxidant, in Mahonia repens / Grace S.C., Logan B.A., Adams W.W. // Plant Cell Environment. — 1998. — V. 21, P. 513 — 521.
3. Правдивцева О.Е. Исследования по обоснованию новых подходов к стандартизации сырья и препаратов зверобоя продырявленного / Правдивцева О.Е., Куркин В.А. // Химия раст. сырья — 2008. — № 1. — С. 81 — 86.

4. Сидора Н.В. Фармакогностичне дослідження листя *Crataegus Maximowiczii* Schneid / Сидора Н.В., Ковальова А.М., Комисаренко А.М. // Вісник фармації. — 2008. — Т. 2, № 54. — С. 7 — 11.
5. Жукова О.Л. Изучение фенольного состава подземных органов сабельника болотного / Жукова О.Л., Абрамов А.А., Даргаева Т.Д., Маркарян А.А. // Вестн. Моск. Ун – та. — 2006. — Т. 47, № 5. — С. 342 — 345.
6. Бенетис Р. Количественное определение фенольных соединений в лекарственном сырье тысячелистника обыкновенного методом ВЭЖХ / Бенетис Р., Радущене И., Якштас В., Янулис В. // Химико-фарм. журн. — 2008. — Т. 42, № 3. — С. 51 — 58.
7. Olszewska M. Quantitative HPLC analysis of flavonoids and chlorogenic acid the leaves and inflorescences of *Prunus Serotina* EHRH / Olszewska M. // Acta chromatographica. — 2007. — № 19. — P. 253 — 269.
8. Алексеева М.А. Определение полифенольных компонентов хмеля с помощью обращенно – фазовой ВЭЖХ / Алексеева М.А., Эллер К.И., Арзамасцев А.П. // Химико – фарм. журн. — 2004. — Т. 38, № 12. — С. 39 — 41.

УДК 532.135; 532

**БЕЛЕЦКИЙ Э.В., канд. техн. наук, доцент, ТОЛЧИНСКИЙ Ю.А., канд. техн. наук,**

Харьковский торгово-экономический институт КНТЕУ

Национальный технический университет «ХПИ», г. Харьков

## **СВОЙСТВА СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ТЕЧЕНИЯ**

Рассмотрено описание вязкопластичного течения и граничные условия на торцах щелевого канала червячной машины с помощью системы функций.

**Ключевые слова:** реологическое состояние, вязкопластичное течение, твердое бездвиговое ядро, щелевой канал, ньютоновская жидкость, граничные условия.

Viscous plastic flow and boundary conditions at worm – gear machine slit channel butt-ends is described by a function system.

**Keywords:** reologisches state, viscoplastic flow, hard bezsdvigovoe kernel, crack channel, newtonian liquid, scope terms.

Во многих процессах химической и пищевой технологий используются материалы, уравнения, реологическое состояние которых является вязкопластическим [1]. Течение таких материалов отличается от течения ньютоновских материалов тем, что в области течения образуется твердое бездвиговое ядро, которое перемещается с постоянной скоростью. Вне ядра расположены области вязкого течения, подчиняющиеся уравнениям гидродинамики. Решение этих уравнений, как и любых уравнений вообще, подчиняется этим уравнениям и граничным условиям. Часто информация, которая содержится в граничных условиях, достаточно велика, так, что на долю уравнений течения, остается ее меньшая часть. Особенно справедливо подобная ситуация для задач медленных течений с гладким и монотонным изменением характеристик поля течения.

Для плоской задачи вязкопластического течения в щелевом канале, в котором координата  $x$  направлена вдоль канала, а координата  $y$  – поперек канала. Граничные условия записываются в таком виде:

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_r = 0; \quad \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|_r = 0;$$

$$v_x(lh) = 0; \quad v_y(lh) = 0, \quad (1)$$

где  $v_x, v_y$  – составляющие скорости вязкого течения вне твердого ядра;  $r$  – граница твердого ядра;  $h$  – полуширина щелевого канала. Если ввести безразмерные переменные  $\xi = x/h, \quad \xi = y/r$ , то удовлетворить условиям (1) могут функции, представители такого семейства:

$$v_x = a \xi_j^m + b \xi_j^n + c \xi_j^e,$$

$$\xi_j = \xi / j, \quad j = r/h, \quad (2)$$

в котором  $m, n, l$  – произвольные постоянные, функции  $a, b, c$  зависят от продольной координаты  $x$  и выражаются через другие функции  $u, v, w$  следующим

образом:

$$a = \frac{(m+1)(n+1)(l+1)}{(l-m)(n-m)} v + \frac{m+1}{(l-m)(n-m)} w - \frac{(m+1)(l+u+1)}{(l-m)(n-m)} u,$$

$$b = \frac{(m+1)(n+1)(l+1)}{(n-l)(n-m)} v + \frac{n+1}{(n-l)(n-m)} w - \frac{(n+1)(l+m+1)}{(n-l)(n-m)} u,$$

$$c = \frac{(m+1)(n+1)(l+1)}{(l-n)(l-m)} v + \frac{l+1}{(l-n)(l-m)} w - \frac{(l+1)(m+u+1)}{(l-m)(l-n)} u, \quad (3)$$

$$w = u' / (l\gamma), \quad v = 1 - [(1-\gamma)/\gamma]u,$$

$$u = C_2 + C_1 \int dz \exp \left[ - \int dz \frac{\gamma' + 1/\gamma'}{1-\gamma} \right],$$

где  $C_1, C_2$  – произвольны постоянные; знак «штрих» означает производную по переменной  $\xi$ . Физический смысл функций  $u, v, w$  состоит в том, что они связаны со скоростью  $v_x$ , ее производной и ее расходам следующими соотношениями:

$$v_x(y=r) = u; \quad \left. \frac{\partial v_x}{\partial \xi} \right|_{y=r} = w; \quad \int_r^h dy v_x = v. \quad (4)$$

Из этих соотношений следует, что если везде в области течения ширина твердого ядра – величина постоянная, то функция  $u$  тоже является постоянной величиной. Это значит, что скорость ядра также есть величина постоянная. Такое течение является аналогом Пуазейля и приобретает такой вид:

$$a \approx (m+1)v + \frac{m+1}{\ln} w - \frac{m+1}{n} (1+n/l)u,$$

$$b \approx (m+1)v + \frac{w}{l(1-n/l)} w - \frac{u}{1-n/l}, \quad (5)$$

$$c \approx \frac{m+1}{l/n-1} v + \frac{w}{n(l/n-1)} - \frac{u}{l/n-1}.$$

Если граничное условие имеют обычный порядок (величина граничной скорости не слишком мала или велика), то последние выражения можно округить, т.е. для  $a$  пренебречь вторым и третьим слагаемыми. Если же и  $n/l \ll 1$ , то этой ситуации отвечает одночленный степенной профиль скорости.

Следует также отметить, что среди различных профилей семейства содержатся и параболический