УДК 532. 135; 532.5

БЕЛЕЦКИЙ Э.В[1]., канд. техн. наук, доцент, ТОЛЧИНСКИЙ Ю.А[2]., канд. техн. наук, доцент
Харьковский торгово-экономический институт КНТЕУ[1],
Национальный технический университет «ХПИ»[2], г. Харьков

ТЕЧЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В ЩЕЛЕВОМ КАНАЛЕ ШНЕКОВОЙ МАШИНЫ

Рассмотрены вопросы математического моделирования вязкопластичного течения неньютоновской жидкости в щелевом канале шнековой машины. Полученные уравнения позволяют проводить моделирование других вязкопластических течений.

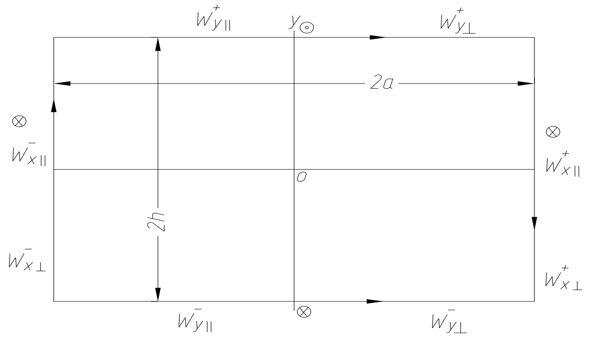
Ключевые слова: вязкопластическая жидкость, куэттовское течение, скорость сдвига, реологическая модель, щелевой канал, шнековая машина.

The problems of mathematical modeling of viscoplastic flow power of the liquid in the slot channel screw machine. The equations obtained allow simulation of other viscoplastic flows.

Keywords: viscoplastic fluid, couette flow, shear rate, rheological model, slotted channel, screw machine.

Движение нелинейных жидкостей является частью гидродинамики ламинарных или стоксовых течений. Такие движения играют важную роль в процессах и аппаратах пищевой и химической технологий. Жидкости с большими значениями вязкости движутся в каналах рабочих камер шнековых машин [1-5]. Такие машины широко распространены в пищевой и химической технологиях. Распространенность таких машин объясняется тем, что они являются средством воздействия на движущийся в них материал в очень широком диапазоне значений параметров воздействия таких как: давление, скорость сдвига, температура, степень перемешивания, дисперсность и пр. [2-5]. Жидкости с небольшими значениями вязкости также находят применение в качестве теплоносителей, как в рубашках шнековых машин, так и в рубашках других аппаратов пищевой и химической технологий. Во всех случаях жидкости, вязкость которых определяется скоростью сдвига, отличаются большим разнообразием своих реологических свойств. Движение каждой из жидкостей следует отдельно рассматривать в каналах стандартной геометрии. Чтобы избежать такой возможности следует принять во внимание то обстоятельство, что всякая вязкость, зависящая только от скорости сдвига, представляет собой некоторую функцию второго инварианта тензора скорости деформаций [6-8]. Считая эту функцию гладкой и непрерывной, ее можно аппроксимировать линейными функциями, т.е. выполнить кусочно-линейную аппроксимацию [9,10]. Поскольку эту операцию можно выполнять всегда, то вместо того, чтобы решать множество отдельных задач течения для различных жидкостей, достаточно решить задачу для одной единственной жидкости, закон течения которой определяется вязкостью, которая линейно зависит от корня квадратного второго инварианта тензора скорости деформаций. Течение такой жидкости следует рассматривать в стандартном канале, в качестве которого следует взять прямоугольный канал определенной длины, стенки которого движутся произвольным образом друг относительно друга. Канал такой формы с такими движущимися стенками хорошо представляет собой каналы в рабочей камере червячной машины [1-5]. Движение стенок каналов из которых состоит рабочая камера такой машины, возникает в результате относительного движения червяков и корпуса машины [1-5]. Сам канал формируется поверхностями червяков и внутренней поверхностью корпуса машины [1-5]. Жидкость, текущая в таком канале перемещается благодаря разнице давления вдоль и поперек канала и увлечения жидкости движущимися поверхностями червяка за счет прилипания жидкости к ним. По указанным причинам реальное движение жидкости в прямоугольном канале является трехмерным. Это движение условно можно разделить на продольное – вдоль длины канала, и поперечное течения. Поперечное течение представляет собой циркуляцию, интенсивность которой зависит от поперечных составляющих скоростей стенок канала. Целью решения любой задачи о течении жидкости является нахождение значений давления и вектора скорости в каждой точке внутри канала [11, 12]. Трехмерные течения изучаются, как правило, численными методами. Получаемые при этом результаты имеют большую точность. Ее обобщение с целью выделения влияния отдельных параметров требует анализа большого объема числовой информации. Форма представления результатов такого влияния носит описательный характер и выполняется с большими погрешностями. Возможен другой подход к проблеме построения картины трехмерного течения. Он содержит решение простой, но сохраняющей все важные параметры течения, задачи в аналитической форме. Обычно такая задача одномерна. Затем с помощью эвристических методов композиции на основе результатов решения одномерной задачи строится трехмерное решение. Такое решение имеет меньшую точность, чем численное, зато позволяют исследователю получить физически обоснованные комбинации параметров в отличие от случайных комбинаций описательного характера, которые получаются при численном решении задачи. Решения, основанные на аналитических средствах обладают большей методической ценностью, и могут использоваться другими исследователями для решения множества других задач. В качестве средства изучения движения нелинейных жидкостей авторы придерживаются аналитического подхода с последующей композицией. Базовой задачей при этом служит задача о куэттовском течении в щелевом канале. Прямоугольный канал и граничные условия, которые создают в нем трехмерное течение, приведены на рис.1.

Знание величин давления и скорости в каждой внутренней точке канала дает возможность вычислить такие величины как расход течения, диссипативное тепловыделение, скорость сдвига и сдвиговые напряжения. Расход является важнейшей режимной характеристикой шнековой машины, диссипативное тепловыделение влияет на все свойства жидкости, движущейся в канале, скорость сдвига определяет степень перемешивания в жидкости, а напряжение сдвига определяет степень перемешивания в жидкости, моделью которого является рассматриваемая жидкость, и интенсивность механофизических и механохимических превращений в материале. Поля давления скорости целиком зависят от граничных условий на стенках канала. Сами эти условия определяются конструкцией рабочей камеры через угол подъема винтовой линии червяка и его шага, а также скоростью вращения вала машины [1-5]. Граничные условия для базовой задачи куэттовского течения изображены на рис.2. В настоящей работе рассматривается течение неньютоновской жидкости с расстоянием между стенками $2h$, которое происходит под влиянием градиента давления $\frac{dP}{dz}$.



$W^{\pm}_{YII}$ - значение продольной скорости на границах канала; нормальных к оси OY;

$W^{\pm}_{XII}$ - значение продольной скорости на границах канала; нормальных к оси OX;

$W^{\pm}_{X\perp}, W^{\pm}_{Y\perp}$ - значение поперечных скоростей на границах каналов

Рис. 1. Прямоугольный канал и граничные условия трехмерного течения в канале

Координата вдоль длины канала – *z*. Координата поперек канала – *y*. Скорость течения имеет единственную составляющую v_z, зависящую от координаты *y*. Для такого простого течения второй инвариант тензора скорости деформаций имеет единственную компоненту, равную $\dfrac{\partial v_z}{\partial\ y}$. Поэтому вязкость жидкости μ может быть записана как $\alpha + \beta\ |v_z'|$, где знак «штрих» означает производную по *y*. Уравнение Навье-Стокса в стоксовом приближении записывается в следующем виде:

$$\frac{d}{dy}\ \ \alpha+\beta|v_z'|\ \ v_z'\ \ =\frac{dP}{dz},\qquad (1)$$

в котором α и β – постоянные, значения, которых определяются или опытным путем, или в результате кусочно-линейной аппроксимации графика функции $\mu = \mu\ \ \mathrm{I}_2$. В силу вхождения в (1) модуля производной скорости ее профиль разбивается на

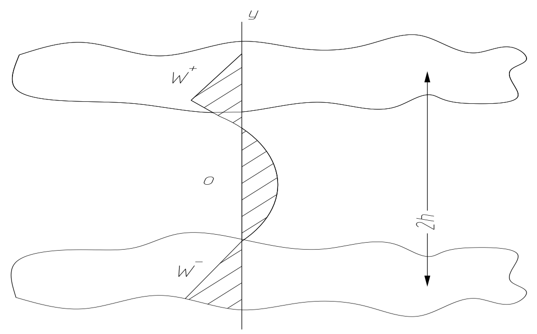


Рис. 2. Фрагмент щелевого канала с граничными условиями

две ветви, имеющие противоположные знаки производной. Присвоим верхней стенке знак «плюс», а нижней – знак «минус» для величины v_z' можно записать такие выражения:

$$v_z^{+'} = -\frac{\alpha}{2\beta}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{4\beta^2}+\frac{y}{\beta}\frac{d\mathrm{P}}{dz}+c}\ ;\ v_z^{+'}>0;\ y^*\ \le y\le h,$$

$$v_z^{-'} = \frac{\alpha}{2\beta}-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4\beta^2}-\frac{y}{\beta}\frac{dP}{dz}-c}\ ;\ v_z^{-'}\ <0;\ -h\le y\le y^*,\qquad (2)$$

в которых в соответствии с вышесказанным произведен выбор одного из двух знаков перед корнем квадратным, а *C* – подлежащая определению постоянная. Величина y^* – это координата встречи (пересечение) обоих ветвей. В точке $y = y^*$ значения производных должно быть равным нулю, откуда следует, что значение постоянной С равно – $y^*\,dP/dz$. Интегрирование (2) приводит к таким выражениям для скорости $v_z\ \ y$:

$$v_z^+\ \ y\ \ = -\frac{\alpha y}{2\beta}+\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2}+\frac{y-y^*}{\beta}\frac{dP}{dz}\right)^{3/2}\frac{2}{3}\frac{\beta}{dP/dz}+C^+$$

$$\bar{v}_z\ \ y\ \ = \frac{\alpha y}{2\beta}+\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2}+\frac{y^*-y}{\beta}\frac{dP}{dz}\right)^{3/2}\frac{2}{3}\frac{\beta}{dP/dz}+C^-\qquad (3)$$

Значения постоянных интегрирования $C^{\pm}$ фиксируются граничными условиями. Если принять, что $v_z^+\ \ h\ \ = w^+$, и $v^-\ \ -h\ \ = W^-$, то из этих условий следует такое представление для скорости $v_z\ \ y$:

$$v_z^+\ \ y\ \ =-\frac{\alpha y}{2\beta}+\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2}+\frac{y-y^*}{\beta}\frac{dP}{dz}\right)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\frac{\beta}{dP/dz}+\frac{\alpha h}{2\beta}-\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2}+\frac{h-y^*}{\beta}\frac{dP}{dz}\right)^{3/2}\frac{2}{3}\frac{\beta}{dP/dz}+W^+,$$

$$\bar{v}_z\ \ y\ \ =\frac{\alpha y}{2\beta}+\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2}+\frac{y^*-y}{\beta}\frac{dP}{dz}\right)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\frac{\beta}{dP/dz}+\frac{\alpha h}{2\beta}-\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2}+\frac{h+y^*}{\beta}\frac{dP}{dz}\right)^{3/2}\frac{2}{3}\frac{\beta}{dP/dz}+W^-,\qquad (4)$$

где $w^{\pm}$ – значения скорости на верхней и нижней стенках канала соответственно. Значения скорости $v_z\ \ y$ определены в (4) не полностью, поскольку остается неизвестной величина y^*. Ее следует искать из условия $v_z^+\ \ y^*\ \ = v_z^-\ \ y^*$. После подстановки выражений (4) в это условие получается следующее уравнение:

$$\left[w^+-w^--\frac{\alpha y^*}{\beta}+\frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^3\frac{\beta}{dp/dz}\right]\frac{3}{2}\frac{dp/dz}{\beta}=\left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^3\left\{\left[1+\frac{4\beta^2}{\alpha^2}\frac{h+y^*}{\beta}\frac{dP}{dz}\right]^{3/2}+\left[1+\frac{4\beta^2}{\alpha^2}\frac{h-y^*}{\beta}\frac{dP}{dz}\right]^{3/2}\right\}\qquad (5)$$

Для уточнения условия (5) следует рассмотреть его предельный случай, когда $\beta\to 0$. Этот случай описывает течение ньютоновской жидкости с постоянной вязкостью $\mu = \alpha.$ Решение задачи о течении ньютоновской жидкости в плоском канале известно [2, 5]. Для этой задачи величина y^* (экстремум профиля скорости) тоже известна [2, 5]. Значение величины y^* из уравнения (5) при $\beta\to 0$ должно совпадать со значением y^* в ньютоновском течении. Уравнение (5) следует разложить в ряд по малой величине β в каждом слагаемом, в котором эта величина присутствует. В разложениях следует удерживать все слагаемые со степенями до β^2 включительно. Эти разложения показывают, что слагаемые нулевой и первой степени по параметру β компенсируют друг друга так, что уравнение (5) имеет нескомпенсированные слагаемые только во втором и более высоких порядках по β.

Во втором порядке по параметру β величина y^* оказывается равной:

$$y^* = -\frac{w^+-w^-\ \ \alpha}{4h\,dP/dz},\qquad (6)$$

Что в точности соответствует ньютоновскому случаю. После такой проверки на предельное соответствие следует решить уравнение (5) относительно неизвестной y^* в общем случае $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. Уравнение (5) нелинейное, поэтому для его аналитического решения на тот факт, что наличие двух ветвей профиля скорости означает наличие у этого профиля экстремума внутри интервала $-h, h$, т.е. величина у принадлежит этому интервалу. Поэтому слагаемые в правой части (5) в степени 3/2 можно представить в виде суммы трех слагаемых: единицы, слагаемого с h и слагаемого с y^*. Так как $|y*| \le$ h, то каждое из слагаемых можно разложить в ряд Тэйлора с точностью до второго слагаемого (точность такого разложения для случая (5) не менее 85%). В этом случае уравнение (5) линеаризуется в своей правой части так, что легко решается. Ответ для величины y^* получается такой:

$$y* = -\frac{w^- - w^-}{\dfrac{\alpha}{\beta} - 2\left(\dfrac{\alpha^2}{4\beta^2} + \dfrac{h}{\beta}\dfrac{dP}{dz}\right)^{1/2}}. \qquad (7)$$

Из вида (7) следует, что если $\beta \to 0$, то выражение (7) переходит в выражение (6) так, что приведенное решение следует считать вполне удовлетворительным.

Для того чтобы вычислить расход продольного течения с профилем скорости по формулам (4), следует отдельно выполнить интегрирование для ветви v_z^+ (4) в интервале (y^*, h) и для ветви v_z^- (y) в интервале ($-h$, y^*) после чего результаты интегрирования сложить. Выполняя интегрирование, опуская ряд преобразований, можно прийти к такому выражению для расхода $\bar{V}$:

$$\dot{V} = w^+ (h - y^*) + w^- (h + y^*) + \frac{\alpha}{2\beta}(h^2 + y^{*2}) + \frac{4}{15}\left(\frac{\beta}{dP/dz}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h-y}{\beta}\frac{dP}{dz}\right)^{5/2} - \left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2}\right)^{5/2}\right] +$$

$$+\frac{4}{15}\left(\frac{\beta}{dP/dz}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h+y^*}{\beta}\frac{dP}{dz}\right)^{5/2} - \left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2}\right)^{5/2}\right] - \frac{2}{3}\left(\frac{\beta}{dP/dz}\right) \cdot \left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h-y^*}{\beta}\frac{dP}{dz}\right)^{3/2} \cdot (h - y^*) -$$

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{\beta}{dP/dz}\right) \cdot \left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h+y^*}{\beta}\frac{dP}{dz}\right)^{3/2} \cdot (h + y^*). \qquad (8)$$

Учитывая формулу (7) можно сделать заключение о том, что величина $\dot{V}$ зависит от таких комплексов $(h\,dP/dz)/\beta$, α/β, и параметров $w^+, w^-, w^- - w^-, h$. Формула (8) довольно громоздка. Ее можно упростить, если воспользоваться приемом, с помощью которого была получена формула (7). Применив его к выражению (8), можно прийти к такому представлению для расхода $\dot{V}$:

$$\dot{V} = (w^+ + w^-)\,h - (w^+ - w^-)\,y* + \frac{\alpha}{2\beta}(h^2 + y^{*2}) + \frac{8}{15}\left(\frac{\beta}{dp/dz}\right)^2 \left[\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h}{\beta}\frac{dp}{dz}\right)^{5/2} - \left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2}\right)^{5/2}\right] -$$

$$-\frac{2\beta}{3dp/dz} \cdot \left[2h\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h}{\beta}\frac{dp}{dz}\right)^{3/2} + 3\,(y^*)^2\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h}{\beta}\frac{dp}{dz}\right)^{1/2}\right]. \qquad (9)$$

Вычисление энергии диссипации продольного течения с профилем скорости по формулам (4) означает необходимость вычисления интегралов такого вида:

$$\dot{e} = \int_{-h}^{y^*} \mu\, (\bar{v}_z) \left(\frac{d\bar{v}_z}{dy}\right)^2 dy + \int_{y^*}^{h} \mu\, (v_z^+) \left(\frac{dv_z^+}{dy}\right)^2 dy, \qquad (10)$$

в котором $\dot{e}$ – энергия диссипации течения, приходящаяся на один метр длины канала. Вычисление этих интегралов довольно сложная и длинная процедура. Опуская все вычисления, окончательное выражение для $\dot{e}$ представляется в виде суммы двух слагаемых, из которых одно пропорционально величине α, а другое – величине β :

$$\dot{e} = \alpha \mathrm{A} + \beta \mathrm{B},$$

$$\mathrm{A} = \frac{\alpha^2 h}{\beta^2} + \frac{h^2 + y^{*2}}{\beta}\frac{dp}{dz} + \frac{1}{6}\frac{\alpha^4}{\beta^3 dp/dz} - \frac{2\alpha}{3dp/dz} \cdot \left[\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h-y^*}{\beta}\frac{dp}{dz}\right)^{3/2} - \left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h+y^*}{\beta}\frac{dp}{dz}\right)^{3/2}\right];$$

$$\mathrm{B} = \frac{\alpha^3}{4\beta^3}y^* + \frac{\alpha^2}{2\beta dp/dz} \cdot \left[\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h-y^*}{\beta}\frac{dp}{dz}\right)^{3/2} - \left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h+y^*}{\beta}\frac{dp}{dz}\right)^{3/2}\right] -$$

$$-\frac{3\alpha}{4dp/dz} \cdot \left[\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h-y^*}{\beta}\frac{dp}{dz}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h+y^*}{\beta}\frac{dp}{dz}\right)^2\right] +$$

$$+\frac{2\beta}{5dp/dz} \cdot \left[\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h+y^*}{\beta}\frac{dp}{dz}\right)^{5/2} + \left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h-y^*}{\beta}\frac{dp}{dz}\right)^{5/2}\right]. \qquad (11)$$

Выражение (11) также можно упростить, как это было указано выше. После упрощения слагаемые А и В принимают такой вид:

$$\mathrm{A} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}h + \frac{h^2 + y^{*2}}{\beta}\frac{dp}{dz} + \frac{\alpha^4}{6\beta^3 dp/dz} + 2\frac{\alpha}{\beta}y^*\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h}{\beta}\frac{dp}{dz}\right)^{1/2}, \qquad (12)$$

$$\mathrm{B} = \frac{\alpha^3}{\beta^3}y^* + \frac{3\alpha}{\beta^2} \cdot h \cdot \frac{dp}{dz}y^* - \frac{3}{2}\frac{\alpha^2}{\beta^2}y^*\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h}{\beta}\frac{dp}{dz}\right)^{1/2} - y^*\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h}{\beta}\frac{dp}{dz}\right)^{3/2}$$

.Далее рассматривается задача о течении степенной жидкости в плоском канале с движущимися стенками. Вязкость в этой задаче имеет такой вид: $\mu = \mu_0 \, v'^{\,n}$.

Так же как и в предыдущей задаче, профиль скорости течения имеет две ветви, пересекающиеся в точке y^*. На одной ветви производная скорости положительна, а на другой – отрицательна. Значения постоянных интегрирования, которых – три, находятся из граничных условий и условия пересечения ветвей. Выражения для скорости с учетом сказанного принимают следующий вид:

$$v_z^+(y) = \left(\frac{y - y^*}{\mu_0}\frac{dp}{dz}\right)^{\frac{n+2}{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{\beta}{dp/dz} - \left(\frac{h - y^*}{\mu_0}\frac{dp}{dz}\right)^{\frac{n+2}{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{\beta}{dp/dz} + w^+,$$

$$v_z^-(y) = \left(\frac{y^* - y}{\mu_0}\frac{dp}{dz}\right)^{\frac{n+2}{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{\beta}{dp/dz} - \left(\frac{h + y^*}{\mu_0}\frac{dp}{dz}\right)^{\frac{n+2}{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{\beta}{dp/dz} + w^-, \qquad (13)$$

который обобщает решение, приведенное в [7]. Скорости по формулам (13) отвечает расход $\dot{v}$, который вычисляется по такой формуле:

$$\dot{v} = \left(\frac{\beta}{dp/dz}\right)^2 \cdot \frac{(n+1)^2}{(n+2)(2n+3)}\left[\left(\frac{h-y^*}{\beta}\frac{dp}{dz}\right)^{\frac{2n+3}{n+1}} + \left(\frac{h+y^*}{\beta}\frac{dp}{dz}\right)^{\frac{2n+3}{n+1}}\right] - \frac{\beta}{dp/dz} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot$$

$$\cdot\left[\left(\frac{h+y^*}{\beta}\frac{dp}{dz}\right)^{\frac{n+1}{n+2}} \cdot (h + y^*) - \left(\frac{h-y^*}{\beta}\frac{dp}{dz}\right)^{\frac{n+1}{n+2}} \cdot (h - y^*)\right] + w^+(h - y^*) + w^-(h + y^*). \qquad (14)$$

Величина y^* вычисляется из условия наличия экстремума $v_z(y)$ в точке y^*. Вычисление, аналогичное тому, которое приводит к формуле (7) дает такое выражение для y^* :

$$y^* = -\frac{w^+ - w^-}{2\left(\dfrac{h}{\beta}\dfrac{dp}{dz}\right)^{\frac{1}{n+1}}}. \qquad (15)$$

Если показатель n положить равным нулю, то выражение (15) переходит в выражение (6) для ньютоновского течения, если α заменить на β .

Диссипация энергии для степенной жидкости представляется такой формулой:

$$\dot{e} = \frac{n+1}{2n+3}\left(\frac{1}{\beta}\frac{dp}{dz}\right)^{\frac{n+2}{n+1}} \cdot \left[\, h-y^{*} \, ^{\frac{2n+3}{n+1}} + \, h+y^{*} \, ^{\frac{2n+3}{n+1}} \right]. \quad (16)$$

Для того чтобы установить связь между двумя задачами, рассмотренными выше, в рамках подхода, который использует кусочно-линейную аппроксимацию вязкости, следует представить вязкость степенной жидкости через вязкость вида (1). Очевидно, что $\alpha = 0$, а β равно $\mu_0 / \left|v_z'\right|^{1/n+1}$ при $y = \pm h.$ При этом получаются два значения величины β. Поэтому жидкость, которая имеет вязкость как в (1), чтобы представлять степенную жидкость, должна иметь различные значения β на разных ветвях. Наличие двух различных значений β не приводит к каким-либо затруднениям за исключением того, что вынуждает в формулах использовать индекс, различающий эти величины.

Для точно решаемых задач о течении в щелевом канале как, например, степенной жидкости предпочтительнее использовать точное решение. Но таких задач очень мало. В подавляющем большинстве задач с достаточно сложной зависимостью вязкости от скорости сдвига следует использовать кусочно-линейную аппроксимацию. Пределы изменения второго инварианта тензора скорости деформаций или, как в случае данной статьи, величины dv_z/dy следует устанавливать из априорных соображений или данных экспериментов.

При использовании полученных в данной работе решений возможны два пути. Первый путь состоит в том, что вязкость считается постоянной, но неизвестной. Решается задача о течении ньютоновской жидкости с постоянной вязкостью. В результате решения получается профиль скорости, для которого легко найти величину скорости сдвига как функцию поперечной координаты. Затем следует найти среднее на интервале $-h;+h$ значение скорости сдвига, которое оказывается функцией постоянной вязкости. В результате получается условие на среднее значение скорости сдвига. Зная это среднее значение, можно найти интервал изменения скорости сдвига и сопоставить границы этого интервала с границами интервалов кусочно-линейной аппроксимации вязкости. Здесь возможны такие случаи: полученный интервал целиком попадает в один из интервалов кусочно-линейной аппроксимации. Тогда по этому интервалу определяется сама аппроксимация на этом участке, т.е. фиксируются параметры α и β (см. формулу (1)). Другой случай отвечает ситуации, когда интервал, определенный из решения ньютоновской задачи только пересекается с одним или несколькими интервалами кусочно-линейной аппроксимации вязкости. В этом случае следует использовать несколько решений вида (4), соединив их условиями непрерывности, используя для этого постоянные из формулы (3). Тогда решения (3) выступают в роли сплайнов, из которых формируется полный профиль скорости (см. рис. 3) [13, 14].

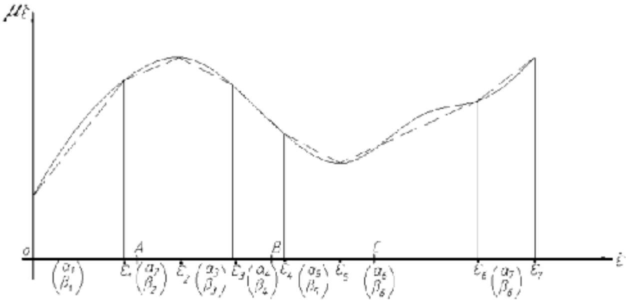


Рис. 3. Кусочно-линейная аппроксимация вязкости:
(ε_i, ε_{i+1}) –интервалы разбиения;
(0, A), (A, B), (B, C) – интервалы разбиения, полученные в результате подстановки величин $\dot{\varepsilon}$ в формулу (1) при $y \in (-h,+h)$

Другой путь является в некотором смысле противоположным первому. Согласно ему осуществляется кусочно-линейная аппроксимация зависимости вязкости неньютоновской жидкости от величины скорости сдвига. Тем самым фиксируется разбиение оси скорости сдвига на интервалы, количество которых определяется требуемой точностью аппроксимации. Для значений скорости сдвига из каждого интервала вычисляется величина напряжения сдвига по формуле (1). Те интервалы изменения скорости сдвига, которые приводят к значениям напряжения сдвига в пределах для координаты y из интервала $(-h,+h)$ для заданного градиента давления и дают пределы изменения скорости сдвига. Как было сказано выше, эти интервалы либо совпадают с интервалом разбиения оси скорости сдвига при кусочно-линейной аппроксимации вязкости, либо пересекаются с ними. Тем самым происходит фиксация этих интервалов разбиения, а, следовательно, и параметров α и β. В последнем случае профиль скорости в интервале по переменной y из интервала $(-h,+h)$ строится из профилей (3) как из сплайнов.

Поступила 01.2011

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Герман Х. Шнековые машины в технолгии.– Л.: Химия. Лен. Отд. 1975. - 229 с.

2.Тадмор З., Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров.– М.: Химия. 1984. – 628 с.

3.Ясногородский А.Я., Звездин А.Г. Многоцелевые двухшнековые машины для перерабатывающих технологий. – Харьков.: Прапор. 2006. – 184 с.

4.Торнер Р.В. Теоретические основы переработки полимеров. – М.: Химия. 1977. – 464 с.

5.Бернхардт Э. Переработка пластических масс. – М.: Химия. 1965. – 746 с.

6.Уилкинсон У.А. Неньютоновские жидкости. – М.: Мир. 1964. – 216 с.

7.Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. – М.: ГИТТЛ. 1962. – 432 с.

8.Спенсер Э. Теория инвариантов. – М.: Мир. 1974. – 156 с.

9. Березин Н.С., Жидков П.П. Методы вычислений. т.1. – М.: Издательство Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1978. – 632 с.

10.Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1.– М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1966. – 608 с.

11.Попов Д.Н., Пананотти С.С., Рябинин М.В. Гидромеханика: – М.: Изд-во МВТУ. 2002. – 383 с.

12.Фабер Т.Е. Гидроаэродинамика. – М.: Постмаркет. 2001. – 559 с.

13.Деклу Ж. Метод конечных элементов. – М.: Мир. 1976. – 95 с.

14.Митчелл, Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. – М.: Мир. 1981. – 216 с