

УДК 681.513.5

NUMERICAL SIMULATION OF THE D -DOMAIN OF STABILITY OF LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS WITH FRACTIONAL ORDER

O. Lobok, B. Goncharenko, M. Sych

National University of Food Technologies

L. Vihrova

*Central Ukrainian National Technical University***Key words:**

stabilization region,
fractional derivatives,
fractional integrals,
 $PI^\lambda D^\mu$ -regulator of
fractional order,
 PI -regulator,
 D -split method,
Laplace transform for
differentiator

Article history:

Received 04.02.2018

Received in revised form
18.04.2018

Accepted 31.05.2018

Corresponding author:

goncharenkobn@i.ua

ABSTRACT

In the article the solution of the problem of the selection of the region of stability of linear dynamical systems with $PI^\lambda D^\mu$ -regulators a factor of fractional order is given. Using the D -split method, we obtain analytical formulas that determine the limits of the region of stable stabilization of the “object” + “fractional-regulator” system. The results obtained relate to the control system for biological purification of contaminated water by active sludge. Some results of computational experiments are given, an estimation of fractional $PI^\lambda D^\mu$ -regulator efficiency is given. On the basis of the D -split method, we obtain analytical expressions that describe the boundaries of the global region of the stability of linear dynamic systems of the fractional order of the “input-output” type with the fractional $PI^\lambda D^\mu$ -regulators. An appropriate algorithmic software was developed, which is not given in this article. The boundary between areas where the system is stable or unstable, in the configuration settings space k_p, k_i, k_d , the fractional controller $PI^\lambda D^\mu$ -consists of three parts: $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_\infty + \Gamma_\omega$. The constituent Γ_0 is determined from the condition of intersection of the real root of the characteristic equation of the imaginary axis s -plane with $s = 0$. The constituent Γ_∞ is determined by the condition of intersection of a pair of complexly connected roots of the imaginary axis at $s = j\omega$, where $j = \sqrt{-1}$ is the imaginary unit. The constituent Γ_ω is determined by intersection of the real roots of the quasi-polynomial of the imaginary axis with $s = \infty$ and can be determined from the condition $p_n = 0$. Further research may be related to the search for both optimal adjustment parameters and fractional orders of the diperegenerators included in the regulator, according to some chosen optimality criterion.

DOI: 10.24263/2225-2916-2018-23-20

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ D -ОБЛАСТІ СТІЙКОСТІ ДРОБОВИХ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

О.П. Лобок, канд. фіз.-мат. наук

Б.М. Гончаренко, д-р техн. наук

М.А. Сич, канд. техн. наук

Національний університет харчових технологій

Л.Г. Віхрова, канд. техн. наук

Центральноукраїнський національний технічний університет

У статті на основі аналітичного розв'язку завдання виділення D -області стійкості лінійних динамічних систем з $PI^\lambda D^\mu$ -регулятором дробового порядку наводяться деякі результати обчислювальних експериментів. Завдяки використанню методу D -розбиття отримані аналітичні формули, що визначають D -межі області стійкої стабілізації системи «об'єкт» + «дробовий $PI^\lambda D^\mu$ -регулятор». Отримані результати використані для обчислювального експерименту стосовно керування біологічним очищенням забруднених вод активним мулом. Оцінено ефективність застосування дробового $PI^\lambda D^\mu$ -регулятора.

Ключові слова: область стабілізації, дробові похідні, дробові інтеграли, $PI^\lambda D^\mu$ -регулятор дробового порядку, PI -регулятор, метод D -розбиття, перетворення Лапласа для диферінтегратора.

Постановка проблеми. З початку розвитку теорії інтегро-диференціального числення дробового порядку [1] її перші застосування в задачах керування з'явилися тільки близько 50 років тому [2]. Дробове числення стає ефективним інструментом для опису значного числа динамічних систем. Класичні результати теорії PID -регулювання поширилися і на регулятори дробового порядку, які позначають як $PI^\lambda D^\mu$, де λ і μ — порядки інтегрування і диференціювання сигналу похибки, що можуть мати дійсні не цілі (дробові) значення [3; 4].

Обчислювальні експерименти проводилися в середовищі математичної системи MATLAB в просторі параметрів налаштування $PI^\lambda D^\mu$ -регулятора в залежності від значення порядків степенів λ і μ .

Метою статті є моделювання застосування методу D -розбиття до систем автоматичного керування технологічними процесами з дробовими регуляторами.

Викладення основних результатів дослідження. Передавальна функція дробового регулятора має вигляд:

$$C(s) = k_p + k_i s^{-\lambda} + k_d s^\mu, \quad (1)$$

де λ і μ — дробові порядки, значення яких належить до області від 0 до 1; k_p , k_i , k_d — налаштовувальні параметри регулятора.

У часовій області передавальній функції (1) відповідає керування виду:

$$u(t) = k_p \cdot e(t) + k_i \cdot \left({}_0 D_t^{-\lambda} e(t) \right) + k_d \cdot \left({}_0 D_t^\mu e(t) \right), \quad (2)$$

де ${}_0 D_t^\gamma$ диферінтегратор.

Завдання полягає в тому, щоб віднайти D -область стійкості при допустимих значеннях параметрів налаштувань k_p, k_i, k_d дробового $PI^\lambda D^\mu$ -регулятора, які стабілізують об'єкт керування, що важливо і при конструюванні $PI^\lambda D^\mu$ -регуляторів, і при пошуку оптимальних параметрів налаштувань регуляторів на знайденої параметричній області стабілізації за обраним критерієм.

Передавальна функція системи «об'єкт + регулятор» має вигляд:

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)}, \quad (3)$$

де

$$Q(s) = \sum_{j=0}^n \left[k_p b_j s^{\lambda+\beta_j} + k_i b_j s^{\beta_j} + k_d b_j s^{\lambda+\mu+\beta_j} \right]; \quad (4)$$

$$P(s) = \sum_{j=0}^n \left[a_j s^{\lambda+\alpha_j} + k_p b_j s^{\lambda+\beta_j} + k_i b_j s^{\beta_j} + k_d b_j s^{\lambda+\mu+\beta_j} \right]. \quad (5)$$

Поліном $P(s)$ для зручності подамо у вигляді:

$$P(s) = \sum_{j=0}^n p_j s^{q_j} = p_n s^{q_n} + p_{n-1} s^{q_{n-1}} + \dots + p_1 s^{q_1} + p_0 s^{q_0}, \quad (6)$$

де q_j — впорядковані дробові порядки степенів, причому $q_n > q_{n-1} > \dots > q_0$; p_j — коефіцієнти, які визначаються коефіцієнтами передавальної функції об'єкта керування і параметрами налаштувань k_p, k_i, k_d дробового $PI^\lambda D^\mu$ -регулятора.

Для виділення області стійкої стабілізації системи (об'єкта керування з регулятором) використовуємо метод D -розбиття простору параметрів [6]. Нагадаємо, що згідно з цим методом границя між областями стійкості і нестійкості в просторі параметрів налаштувань складається трьома частинами: $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_\omega + \Gamma_\infty$. Складова Γ_0 визначається з умови перетину дійсним коренем характеристичного рівняння уявної осі s -площини при $s = 0$. Тобто складову Γ_0 знаходять шляхом підстановки $s = 0$ в рівняння $P(s) = 0$, де $P(s)$ визначається рівнянням (6). Звідси випливає, що Γ_0 може бути визначена з умови $p_0 = 0$, якщо значення найменшого порядку q_0 дорівнює 0, тобто при $s^{q_0} = 1$. Якщо $q_0 \neq 0$, тобто $s^{q_0} \neq 1$, то границі Γ_0 не існує. Складова Γ_ω визначається з умови перетину парою комплексно сполучених коренів уявної осі при $s = j\omega$, де $j = \sqrt{-1}$ — уявна одиниця. В цьому випадку поліном (6) стає нестійким і дійсна і уявна частини рівняння $P(j\omega) = 0$ починають дорівнювати нулю одночасно. Складова Γ_∞ визначається перетином дійсними коренями полінома (6) уявної осі при $s = \infty$ і може бути визначена з умови $p_n = 0$.

Застосовуючи ці передумови до досліджуваної системи «об'єкт + регулятор» і аналізуючи характеристичний поліном (5), приходимо до висновку, що складові Γ_0 та Γ_ω границі області стійкості являють собою прямі лінії:

$$\Gamma_0 \text{ — лінія: } \begin{cases} k_i = 0, & \text{при } s^{\beta_0} = 1, \\ \text{не існує,} & \text{при } s^{\beta_0} \neq 1, \end{cases}$$

Γ_∞ — лінія:

$$\begin{cases} k_d = 0, & \text{при } (\alpha_n = \beta_n) \text{ або } (\alpha_n > \beta_n \text{ і } \mu > \alpha_n - \beta_n), \\ k_d = -a_n / b_n, & \text{при } (\alpha_n > \beta_n \text{ і } \mu = \alpha_n - \beta_n), \\ \text{не існує,} & \text{при } (\alpha_n > \beta_n \text{ і } \mu < \alpha_n - \beta_n). \end{cases}$$

Для побудови складової Γ_∞ підставим $s = j\omega$ в рівняння $P(s) = 0$, де $P(s)$ — поліном (5). Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} P(j\omega) &= \sum_{j=0}^n \left[a_j (j\omega)^{\lambda+\alpha_j} + k_p b_j (j\omega)^{\lambda+\beta_j} + k_i b_j (j\omega)^{\beta_j} + k_d b_j (j\omega)^{\lambda+\mu+\beta_j} \right] = \\ &= \operatorname{Re}\{P(j\omega)\} + j \cdot \operatorname{Im}\{P(j\omega)\} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\operatorname{Re}\{P(j\omega)\}$ та $\operatorname{Im}\{P(j\omega)\}$ означають відповідно дійсну та уявну частини квазіполінома $P(j\omega)$.

Для подальшого перетворення виразу (7) пригадаємо, що не цілий степінь комплексного числа $(\sigma + j\omega)^\gamma$ може бути вирахований за формулою Муавра-Лапласа:

$$(\sigma + j\omega)^\gamma = (\sigma^2 + \omega^2)^{\gamma/2} \left[\cos(\gamma\varphi) + j \sin(\gamma\varphi) \right], \quad (8)$$

де $\varphi = \arctan(\omega / \sigma)$; σ — дійсна частина; ω — уявна частина; γ — дробовий порядок комплексного числа.

Вираз j^γ у рівнянні (7) може бути представлений згідно з формулою (8) так:

$$j^\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right). \quad (9)$$

Далі, прирівнявши до нуля дійсну і уявну частину рівняння (7), з урахуванням формули (9), отримаємо

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{P(j\omega)\} = k_p R_{1p}(\omega) + k_i R_{1i}(\omega) + k_d R_{1d}(\omega) + H_1(\omega) = 0, \\ \operatorname{Im}\{P(j\omega)\} = k_p R_{2p}(\omega) + k_i R_{2i}(\omega) + k_d R_{2d}(\omega) + H_2(\omega) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

де

$$R_{1p}(\omega) = \sum_{j=0}^n b_j \omega^{\lambda+\beta_j} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda + \beta_j)\right), \quad R_{1i}(\omega) = \sum_{j=0}^n b_j \omega^{\beta_j} \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta_j\right);$$

$$R_{1d}(\omega) = \sum_{j=0}^n b_j \omega^{\lambda+\mu+\beta_j} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda + \mu + \beta_j)\right), \quad H_1(\omega) = \sum_{j=0}^n a_j \omega^{\lambda+\alpha_j} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda + \alpha_j)\right);$$

$$R_{2p}(\omega) = \sum_{j=0}^n b_j \omega^{\lambda+\beta_j} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda + \beta_j)\right), \quad R_{2i}(\omega) = \sum_{j=0}^n b_j \omega^{\beta_j} \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta_j\right);$$

$$R_{2d}(\omega) = \sum_{j=0}^n b_j \omega^{\lambda+\mu+\beta_j} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda + \mu + \beta_j)\right), \quad H_2(\omega) = \sum_{j=0}^n a_j \omega^{\lambda+\alpha_j} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda + \alpha_j)\right).$$

Система лінійних рівнянь (10) містить більше невідомих (k_p, k_i, k_d), ніж число рівнянь, то для однозначного її розв'язання один із параметрів системи може бути обраний довільно. Якщо як цей параметр обрати коефіцієнт k_p , то система (10) стає системою лінійних алгебраїчних рівнянь другого порядку щодо невідомих k_i та k_d , розв'язок якої має вигляд:

$$k_i = \frac{\Delta_i(\omega)}{\Delta(\omega)}, \quad k_d = \frac{\Delta_d(\omega)}{\Delta(\omega)}, \quad (11)$$

$$\Delta_i(\omega) = R_{1d}(\omega)H_2(\omega) - R_{2d}(\omega)H_1(\omega) + k_p(R_{1d}(\omega)R_{2p}(\omega) - R_{1p}(\omega)R_{2d}(\omega));$$

$$\Delta_d(\omega) = R_{2i}(\omega)H_1(\omega) - R_{1i}(\omega)H_2(\omega) + k_p(R_{1p}(\omega)R_{2i}(\omega) - R_{1i}(\omega)R_{2p}(\omega)); \quad (12)$$

$$\Delta(\omega) = R_{1i}(\omega)R_{2d}(\omega) - R_{1d}(\omega)R_{2i}(\omega) = \omega^{\lambda+\mu} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda + \mu)\right) \left(R_{1i}^2(\omega) + R_{2i}^2(\omega)\right).$$

Зауважимо, що для дробового PI^λ -регулятора ($k_d = 0$) система (10) має єдиний розв'язок:

$$k_p = \frac{\Delta_p(\omega)}{\Delta(\omega)}, \quad k_i = \frac{\Delta_i(\omega)}{\Delta(\omega)}, \quad (13)$$

$$\Delta_p(\omega) = H_2(\omega)R_{1i}(\omega) - H_1(\omega)R_{2i}(\omega), \quad \Delta_i(\omega) = H_1(\omega)R_{2p}(\omega) - H_2(\omega)R_{1p}(\omega),$$

$$\Delta(\omega) = R_{1p}(\omega)R_{2i}(\omega) - R_{1i}(\omega)R_{2p}(\omega) = -\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) \left(R_{1i}^2(\omega) + R_{2i}^2(\omega)\right). \quad (14)$$

Застосуємо тепер ці результати для обчислювального експерименту виділення області стійкості системи керування біологічним очищенням забруднених вод активним мулом з дробовим $PI^\lambda D^\mu$ -регулятором. У [7] була отримана лінеаризована модель біоочисної системи «аеротенк + відстійник» у вигляді моделі з одним входом і одним виходом:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t), \quad y(t) = x_2(t) = c^T x(t), \quad (15)$$

де $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ — вектор стану, в якому $x_1(t), x_2(t)$ — відповідно, концентрація біомаси і субстрату в аеротенку; $x_3(t)$ — концентрація рециркулюючої біомаси з відстійника в біореактор-аеротенк; $u(t)$ — одновимірна функція керування—швидкість розведення (аналог об'ємної швидкості потоку); $y(t)$ — спостережуваний вихід системи — концентрація субстрату.

Системна матриця A і вектори b и c визначаються так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \mu_{\max} \frac{x_2^*}{k_s + x_2^*} - (1+r)u^*, \quad a_{1,2} = \mu_{\max} k_s \frac{x_1^*}{(k_s + x_2^*)^2}, \quad a_{1,3} = ru^*, \\ a_{2,1} &= -\frac{\mu_{\max}}{Y} \frac{x_2^*}{k_s + x_2^*}, \quad a_{2,2} = -\frac{\mu_{\max} k_s}{Y} \frac{x_1^*}{(k_s + x_2^*)^2} - (1+r)u^*, \quad a_{2,3} = 0, \\ a_{3,1} &= (1+r)u^*, \quad a_{3,2} = 0, \quad a_{3,3} = -(\beta+r)u^*, \\ b_1 &= -(1+r)x_1^* + rx_3^*, \quad b_2 = -(1+r)x_2^* + s_{in}, \quad b_3 = -(\beta+r)x_3^* + (1+r)x_1^*. \end{aligned}$$

Тут позначено: u^* — задане номінальне керування; $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)^T$ — відповідний йому обчислений вектор рівноважного стану; μ_{\max} — максимальна питома швидкість росту біомаси; k_s — константа насичення, що визначається експериментальним шляхом; s_{in} — концентрація субстрату у вхідному потоці; Y — чинник виходу (прибутковості) біомаси; r, β — коефіцієнти, що визначають відповідно відношення рециркуляційного потоку і потоку відходів біомаси до вхідного потоку.

Чисельне моделювання керованої системи біоочиснення здійснювалося при таких вихідних даних: $s_{in} = 200$ [мг/л], $Y = 0,65$, $\mu_{\max} = 0,15$ [год⁻¹], $k_s = 100$ [мг/л], $r = 0,6$, $\beta = 0,2$, $u^* = 0,05$ [год⁻¹], $t_0 = 0$, $T = 1$ [год], вектор початкового стану системи (15) покладался рівним $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)^T = (286; 17; 568)^T$ [мг/л].

Відзначимо, що вектор рівноважного стану системи (15) при цих даних був обчислений як розв'язок відповідної системи нелінійних рівнянь третього порядку і дорівнював $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)^T = (285; 15,38; 570)^T$.

У частотній області модель (15) може бути представлена у вигляді:

$$Y(s) = G(s)U(s),$$

де $U(s)$, $Y(s)$ — перетворення Лапласа відповідно входу і виходу; $G(s)$ — передавальна функція об'єкта керування:

$$G(s) = c^T (sE - A)^{-1} b = \frac{c^T \text{adj}(sE - A) b}{\det(sE - A)} = \frac{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s^3 + q_2 s^2 + q_1 s + q_0}. \quad (16)$$

Тут через $\text{adj}(sE - A)$ позначена приєднана матриця матриці $sE - A$, а коефіцієнти p_i, q_i поліномів чисельника і знаменника обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} p_0 &= b_2 a_{11} a_{33} - b_1 a_{21} a_{33} - b_2 a_{13} a_{31}, & q_0 &= a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{31} a_{22} - a_{11} a_{22} a_{33}, \\ p_1 &= b_1 a_{21} - b_2 a_{11} - b_2 a_{33}, & q_1 &= a_{11} a_{22} + a_{11} a_{33} + a_{22} a_{33} - a_{13} a_{31} - a_{12} a_{21}, \\ & & q_2 &= -a_{11} - a_{22} - a_{33}. \end{aligned} \quad (17)$$

Якщо керування $u(t)$ в часовій області конструювати в класі дробових $PI^\lambda D^\mu$ -регуляторів виду (1):

$$u(t) = -\left(k_p \cdot y(t) + k_i \cdot \left({}_0 D_t^{-\lambda} y(t)\right) + k_d \cdot \left({}_0 D_t^\mu y(t)\right)\right), \quad (18)$$

то передавальна функція системи «біоочищення» + «регулятор» буде визначатися виразом $W(s) = Q(s)/P(s)$, де $Q(s) = C(s)G(s)$; $P(s) = 1 + C(s)G(s)$; $C(s)$ — передавальна функція дробового регулятора, що визначається за формулою (1); $G(s)$ — передавальна функція об'єкта керування, що обчислюється за формулами (16), (17).

Для визначення області допустимих значень параметрів налаштування k_p, k_i, k_d дробового $PI^\lambda D^\mu$ -регулятора, який стабілізує роботу біочисної системи, використовувалися розрахункові формули (11), (12) і (13), (14), які описують границі областей стійкості системи з дробовим регулятором. Обчислювальні експерименти, як вказувалося, проводилися в середовищі математичної системи MATLAB. Нижче представлені деякі результати обчислювальних експериментів.

На рис. 1 в просторі параметрів $Z = \{k_p, k_i\}$ представлена глобальна область стійкості (заштрихована область) біочисної системи з дробовим PI^λ -регулятором при $\lambda = 1$, тобто при використанні класичного PI -регулятора (Γ_ω, Γ_0 — границі області стійкості).

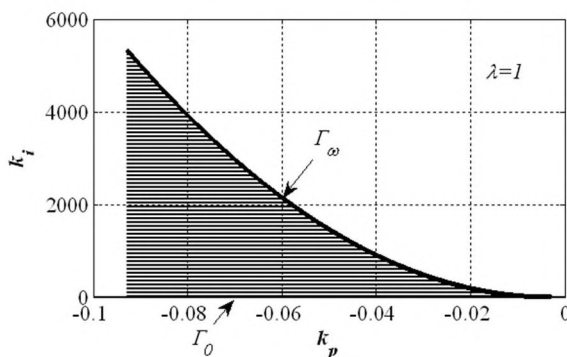


Рис. 1. Глобальна область стійкості системи з PI^λ -регулятором при $\lambda = 1$

На рис. 2 побудовані області стійкості системи біоочищення з дробовим PI^λ -регулятором при різних значеннях порядку диферінтегратора. Тут області стійкості обмежені знизу віссю абсцис, а зверху — кривою, що відповідає значенню порядку параметра. З графіків видно, що із збільшенням порядку також збільшується область стійкості системи.

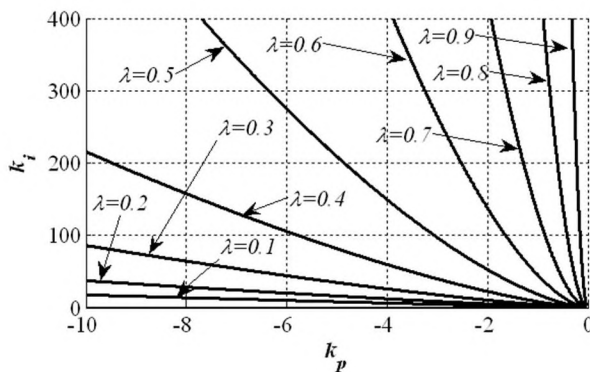


Рис. 2. Глобальні області стійкості системи біоочищення з PI^λ -регулятором при $0 < \lambda < 1$

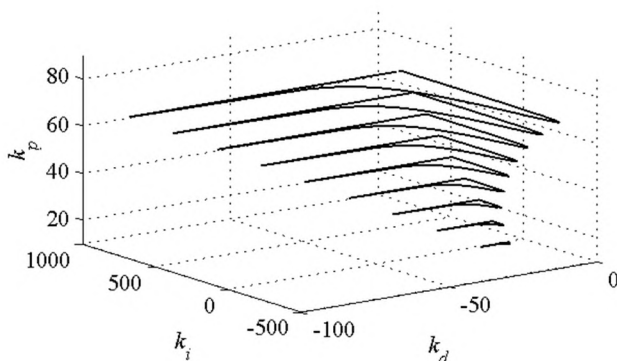


Рис. 3. Глобальна область стійкості системи з $PI^\lambda D^\mu$ -регулятором при $\lambda = 0,7$, $\mu = 0,1$

На рис. 3 представлені перетини області стійкості площинами, перпендикулярними до координатної осі. Перетини є замкнутими фігурами, площі яких збільшуються з ростом параметра налаштування.

Подібні області стійкості були отримані і при інших значеннях дробових порядків λ і μ .

Висновки. На основі методу D -розбиття отримані аналітичні вирази, які описують границі глобальної області стійкості лінійних динамічних систем дробового порядку типу «вхід-вихід» з дробовим $PI^\lambda D^\mu$ -регулятором. Области стійкості побудовані на основі обчислювальних експериментів у просторі параметрів налаштування дробових $PI^\lambda D^\mu$ -регуляторів при фіксованих порядках диферінтеграторів у складі регулятора. Розроблене відповідне алгоритмічно-програмне забезпечення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Podlubny I. Fractional Differential Equations / Mathematics in Sciences and Engineering, Vol. 198. — Academic Press, 1999. — 340 p.
2. Tustin A., Allason J.T., Layton J.M., Jakeways R.J.: The design of systems for automatic control of the position of massive object. / Proc. Inst. Electr. Eng. 105 (C-1), 1958, pp. 1—57.
3. Podlubny I. Fractional-order systems and PID controllers. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, vol. 44, pp. 208—214.
4. Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. II. Дробные динамические системы: моделирование и аппаратная реализация // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 5. — С. 3—34.
5. Учайкин В.В. Метод дробных производных, Артишок, Ульяновск, 2008. — 512 с.
6. Namci S.E., Tan N. Design of PI controllers for achieving time and frequency domain specifications simultaneously / ISA Trans. Vol. 45(4), 2006, pp. 529—543.
7. Лобок О.П., Гончаренко Б.М., Сич М.А., Вихрова Л.Г. Моделирование оптимального автоматического керування процесом біологічної очистки забруднених вод регуляторами дробового порядку. Збірник наук. праць Кіровоградського національного технічного університету — Техніка в сільськогосподарському виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація, № 30. — Кропивницький : КНТУ, 2017 р. — С. 152—160.

ЧИСЛОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ D -ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ДРОБНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.П. Лобок, Б.Н. Гончаренко, М.А. Сыч

Национальный университет пищевых технологий

Л.Г. Вихрова

Центральноукраинский национальный технический университет

В статье дается решение задачи числового моделирования области устойчивости линейных динамических систем с $PI^\lambda D^\mu$ -регуляторами дробного порядка. Используя метод D -разбиения, получены аналитические формулы, определяющие пределы области устойчивой стабилизации системы «объект» + «дробный $PI^\lambda D^\mu$ -регулятор». Полученные результаты касаются системы автоматического управления биологической очисткой загрязненных вод активным илом. Приводятся некоторые результаты вычислительных экспериментов. **Ключевые слова:** область стабилизации, дробные производные, дробные интегралы, $PI^\lambda D^\mu$ -регулятор дробного порядка, PI -регулятор, метод D -разбиения, преобразование Лапласа для дифференциатора.