

С.В. Ершов, д. т. н., проф. (ИПМаш им. А.Н. Подгорного НАН Украины); Д.А. Козырец, аспирант (НТУ «Харьковский политехнический институт»)

Численное моделирование трехмерных отрывных течений вязкого сжимаемого газа в многоступенчатых компрессорах

Предложена методика численного моделирования трехмерного течения вязкого сжимаемого газа в многоступенчатом компрессоре. Усовершенствован метод расчета пространственных течений FlowER программным комплексом F. Приведены примеры численного расчета.

Ключевые слова: моделирование, численный метод, трехмерность, течение, вязкий газ, компрессор.

Запропонована методика чисельного моделювання тривимірної течії стиснутого в'язкого газу у багатоступінчастому компресорі. Вдосконалено метод розрахунку просторових течій FlowER програмним комплексом F. Наведені приклади чисельного розрахунку.

Ключові слова: моделювання, чисельний метод, тривимірність, течія, в'язкий газ, компресор.

The modification of numerical method for computations of 3D viscous compressible flows through compressors is suggested. Realisability constraints for turbulent Reynolds stresses and modification of exit boundary conditions is implemented in CFD solver. It enables numerical simulation of compressor flows at stall and operating branch of performance curve. Numerical results are presented.

Keywords: design, numeral method, three-dimensionality, flow, viscid gas, compressor.

Моделирование трехмерных течений вязкого сжимаемого газа в многоступенчатых компрессорах является важной задачей современной вычислительной аэродинамики, решение которой позволит улучшить аэродинамическое качество компрессорных проточных частей. Основные трудности решения данной задачи вызваны характером течения в лопаточных аппаратах компрессоров: большие положительные градиенты давления, крупные отрывные зоны, интенсивные вторичные течения. При моделировании потока с такими явлениями правильный учет влияния турбулентности имеет решающее значение.

В ИПМаш НАНУ разработан программный комплекс FlowER [1], который использовался в ряде организаций для расчета трехмерных течений в компрессорах. Численная модель течения, реализованная в этом комплексе программ, во многих случаях не позволяет рассчитать течение в многоступенчатых компрессорах, в первую очередь, из-за недостаточно корректной реализации модели турбулентности. Сходимость решения достигается только при завышенных размерах ячеек у стенок ($y^+ \gg 1$), что противоречит правилам моделирования турбулентности и приводит к неверному расчету пограничных слоев.

В настоящей работе выполнено усовершенствование метода расчета пространственных течений в компрессорах, реализованное в рамках нового программного комплекса F [2], который является развитием программы FlowER. Проведено численное исследование трехмерного вязкого отрывного течения в многоступенчатом компрессоре. Анализ отрывных течений

проводился с помощью идей, изложенных в монографии [3].

Модель течения

Рассматривается расчетная область, включающая в себя по одному межлопаточному каналу каждого лопаточного аппарата многоступенчатого компрессора. Турбулентное течение вязкого сжимаемого газа в этой области описывается уравнениями Навье-Стокса, осредненными по Рейнольдсу:

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial x_i} = 0;$$

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{\rho} \bar{u}_1 \\ \bar{\rho} \bar{u}_2 \\ \bar{\rho} \bar{u}_3 \\ \bar{\rho}(\bar{e} + \bar{k}) \end{pmatrix}; \bar{F}_i = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \bar{u}_i \\ \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_1 + \bar{p} \bar{\delta}_{i1} - \bar{\tau}_{i1} - \bar{\tau}_{i1} \\ \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_2 + \bar{p} \bar{\delta}_{i2} - \bar{\tau}_{i2} - \bar{\tau}_{i2} \\ \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_3 + \bar{p} \bar{\delta}_{i3} - \bar{\tau}_{i3} - \bar{\tau}_{i3} \\ \bar{\rho}(\bar{e} + \bar{k}) + \bar{p} \bar{u}_i - \bar{u}_j (\bar{\tau}_{ij} + \bar{\tau}_{ij}) + \bar{q}_i + \bar{q}_i - \bar{d}_i \end{pmatrix}; (1)$$

где \bar{Q} – вектор консервативных переменных; \bar{F} – вектор потоков; \bar{p} , $\bar{\rho}$, \bar{u}_i – давление, плотность и компоненты скорости; \bar{e} – полная энергия единицы массы, \bar{k} – кинетическая энергия турбулентности; $\bar{\tau}_{ij}$ – тензор напряжений; \bar{q} – тепловой поток; \bar{d} – турбулентная диффузия; t – время; x_i – пространственные координаты. Надчерком и тильдой обозначены величины, полученные в результате осреднения по Рейнольдсу и Фавру соответственно, а «шляпкой» – статистические моменты турбулентных пульсаций. Здесь и далее, используется суммирование по повторяющимся индексам.

Моделирование турбулентности $k-\omega$ SST

В настоящей работе используется модель турбулентности $k-\omega$ SST [4]:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \hat{k}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\rho} \hat{u}_j \hat{k} - (\bar{\mu} + \sigma_k \bar{\mu}) \frac{\partial \hat{k}}{\partial x_j} \right] = P_k - \beta^* \bar{\rho} \hat{\omega} \hat{k}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \hat{\omega}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\rho} \hat{u}_j \hat{\omega} - (\bar{\mu} + \sigma_\omega \bar{\mu}) \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x_j} \right] =$$

$$= \frac{\alpha \bar{\rho}}{\bar{\mu}} P_k - \beta \bar{\rho} \hat{\omega}^2 + (1 - F_1) \bar{\rho} \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\hat{\omega}} \frac{\partial \hat{k}}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x_j}, \quad (2)$$

где $\bar{\mu}$ и $\hat{\mu}$ – коэффициент динамической ламинарной и турбулентной вязкости соответственно; $P_k = \bar{\tau}_{ij} S_{ij}$ – производство кинетической энергии турбулентности; $\hat{\omega}$ – удельная скорость диссипации; остальные неопределенные величины в уравнениях (2) – константы.

Турбулентные напряжения в уравнениях (1) и в формуле для производства турбулентности рассчитываются по гипотезе Буссинеска:

$$\bar{\tau}_{ij} = 2\bar{\mu} \left(\bar{S}_{ij} - \delta_{ij} \bar{S}_{nn} / 3 \right) - 2\bar{\rho} \hat{k} \delta_{ij} / 3, \quad (3)$$

где $S_{ij} = 0,5 \left(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i \right)$ – тензор скоростей деформаций.

Турбулентная вязкость определяется как

$$\bar{\mu} = \bar{\rho} \hat{k} / \max \left(\hat{\omega}, \bar{S} F_2 / a_1 \right), \quad (4)$$

где a_1 – константа.

Смешивающие функции F_1 и F_2 выражаются через расстояние от стенки y и имеют вид [4]:

$$F_1 = \tanh(A_1^4); F_2 = \tanh(A_2^2);$$

$$A_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{\hat{k}}}{0,09 \hat{\omega} y}, \frac{500 \bar{v}}{\hat{\omega} y^2} \right), \frac{4 \bar{\rho} \sigma_{\omega 2} \hat{k}}{C_d y^2} \right];$$

$$A_2 = \max \left(\frac{2 \sqrt{\hat{k}}}{0,09 \hat{\omega} y}, \frac{500 \bar{v}}{\hat{\omega} y^2} \right);$$

$$C_d = \max \left(4 \bar{\rho} \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\hat{\omega}} \frac{\partial \hat{k}}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x_j}, 10^{-20} \right). \quad (5)$$

Коэффициент турбулентной теплопроводности для расчета теплового потока находится по турбулентной вязкости и удельной теплоемкости при постоянном давлении из определения турбулентного числа Прандтля.

Ограничения реализуемости

Серьезным недостатком формулы Буссинеска (3) является возможность генерации физически нереализуемых турбулентных напряжений [5]. В частности, тензор рейнольдсовых напряжений может не удовлетворять неравенству Коши, и/или нормальные

рейнольдсовы напряжения могут оказаться положительными. Учитывая, что величины турбулентных напряжений обычно существенно превосходят вязкие напряжения, то их вклад в уравнения (1) значителен и неправильный их расчет может приводить к большим ошибкам. Поэтому при наличии положительных градиентов давления в потоке, что характерно для течений в компрессорах, модели турбулентности, использующие формулу (3), сопряжены с трудностями правильного описания отрывов. Модель $k-\omega$ SST лучше многих других моделей описывает отрывные течения потому, что формула для турбулентной вязкости (4) улучшает реализуемость турбулентных напряжений, однако в некоторых случаях этого оказывается недостаточно. Поэтому в настоящей работе модель турбулентности дополнена ограничениями реализуемости [6]. Выполнение неравенства Коши для тензора турбулентных напряжений достигается модификацией формулы (4), которая упрощенно (для случая несжимаемой жидкости) может быть записана как:

$$\hat{\mu} = \bar{\rho} \hat{k} / \max \left(\hat{\omega}, \bar{S} F_2 / a_1, \sqrt{3S} / 2 \right).$$

Кроме того, необходимо обеспечить отрицательность значений нормальных рейнольдсовых напряжений.

Данная модификация, не реализованная в стандартном вычислителе FlowER, имеет принципиальное значение при расчете течений в компрессорах.

Граничные условия

На входе в расчетную область перед первым лопаточным аппаратом компрессора при дозвуковой осевой скорости потока задаются распределения по радиусу полного давления, полной температуры и двух углов – меридионального и тангенциального, – задающих направление вектора скорости. Для уравнений модели турбулентности на входе фиксируется степень турбулентности потока, по которой рассчитывается кинетическая энергия турбулентности. Удельная скорость диссипации при этом определяется, исходя из геометрических масштабов проточной части. Если во входном сечении имеются турбулентные пограничные слои, то в них кинетическая энергия турбулентности и удельная скорость диссипации определяются на основе известных закономерностей для пограничного слоя в соответствии с алгоритмом, предложенным в работе [7]. В стандартной версии вычислителя FlowER изменение турбулентных величин у стенок на входе не учитывалось и это приводило к существенным погрешностям расчета пограничного слоя [8]. Для определения всех параметров потока на входе данные граничные условия дополняются соотношениями на характеристиках или экстраполяционными формулами.

Задание граничных условий на выходе расчетной области за последним лопаточным аппаратом компрессора вызывает определенные трудности. Для дозвуковой осевой компоненты скорости требуется задать одно граничное условие и иногда для этих целей использовали статическое давление. Однако такое условие не гарантирует существование или единственность решения, а значит и корректную постановку

задачи, так как известно, что одному значению статического давления на выходе компрессора может соответствовать как отсутствие решения, так и несколько решений. Считается, что задание на выходе расхода через компрессор (массового или объемного) позволяет решить задачу, однако с таким граничным условием трудно правильно учесть неравномерность параметров течения в радиальном направлении.

В стандартной версии вычислителя FlowER использовалось задание на выходе компрессора постоянного в радиальном направлении инварианта Римана, приходящего на границу извне расчетной области. Очевидно, что в пограничном слое инвариант Римана существенно меняется, поэтому данное граничное условие будет искажать развитие пограничных слоев на торцевых стенках. В этом смысле большинство расчетов течений в компрессорах, проведенных в работе [9], являются недостаточно точными. Более того, использование в пограничном слое характеристических соотношений (инвариантов), полученных для невязкого потока, как легко показать, при положительных градиентах давления может провоцировать возникновение ложных возвратных течений в непосредственной близости выходной границы, причем вероятность их возникновения тем выше, чем больше измельчение сетки в направлении стенки. Это, в частности, объясняет неудачи при расчете течений в компрессорах на мелких сетках и «успех» при использовании грубых сеток, о чем говорилось выше.

Повысить надежность моделирования течений в компрессорах при больших положительных градиентах давления можно путем задания в сечении выхода расчетной области распределения по радиусу осевой компоненты скорости (в том числе на основе уравнения радиального равновесия), что согласуется с идея-

ми многих работ в этой области, в частности [10]. Так как значения осевой скорости в пограничном слое на торцевых поверхностях на выходе неизвестны, то здесь необходимо применить специальную процедуру учета пограничного слоя. Рассматривалось как задание профиля развитого пограничного слоя по степенному закону, так и перенос характеристик профиля скорости в выходное сечение из ближайшего поперечного сечения ячеек. Во втором случае решение получалось более устойчивым и точным, особенно, если профиль скорости вблизи выходного сечения характеризовался знакопеременной кривизной. Чтобы избежать сложностей определения толщины пограничного слоя вблизи выходной границы по профилю скорости, в настоящей работе использовались свойства смешивающей функции F_1 модели турбулентности $k-\omega$ SST (5). Так как значение этой функции у стенки достигает единицы, а возле границы пограничного слоя снижается до нуля (рис. 1а), то предлагается при $F_1 > \varepsilon_1$ «сносить» на границу выхода профиль скорости из ближайшего поперечного сечения ячеек, а если $F_1 < \varepsilon_1$ – использовать заданное значение осевой скорости. В настоящей работе используется значение $\varepsilon_1 = 0.01$. На рис. 1 приняты следующие обозначения: u – скорость в пограничном слое; U – скорость на границе пограничного слоя; y – расстояние от стенки; δ – толщина пограничного слоя; c_{az} , c_{ap} и c_{ak} – осевая скорость, задаваемая на входной границе, рассчитанная в ближайшей к этой границе ячейке и корректируемая в пограничном слое на выходной границе соответственно.

Граничные условия на выходе, также как и на входе, дополнялись соотношениями на характеристиках и экстраполяционными формулами. Причем, как на выходе, так и на входе, соотношения на характеристиках использовались в ядре потока и во внешней

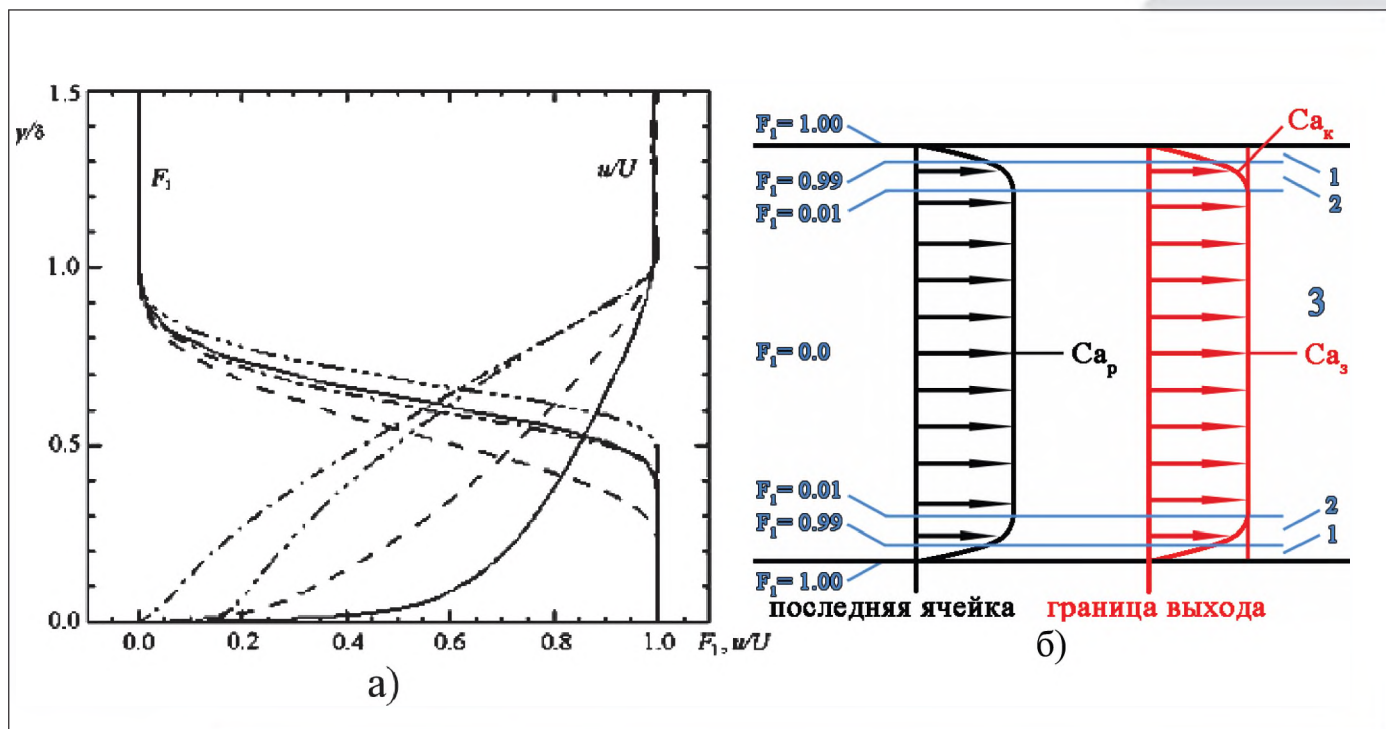


Рис. 1. К заданию граничных условий на выходе: а – смешивающая функция F_1 модели $k-\omega$ SST для различных профилей скорости в пограничном слое; б – задание осевой скорости на выходе

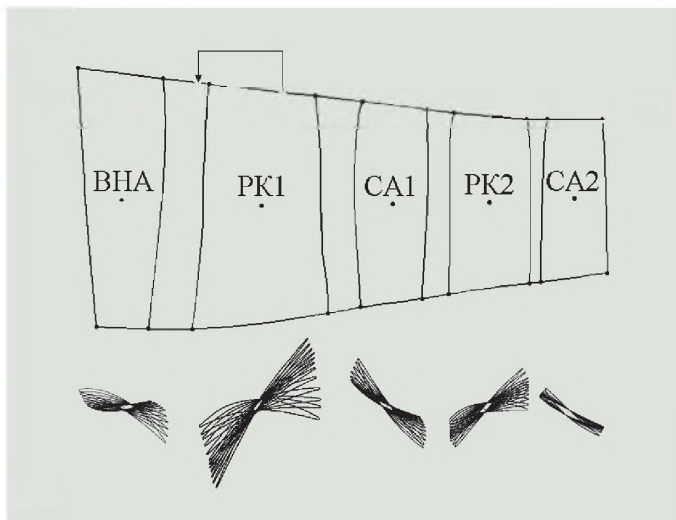


Рис. 2. Схема проточной части компрессора и формы лопаток

области пограничного слоя (зоны 3 и 2 на рис. 16), а во внутренней области пограничного слоя (зона 1), где вязкие эффекты доминируют, применялась экстраполяция всех параметров на границу выхода. Разделение пограничного слоя на внешнюю и внутреннюю части также оценивалось с помощью смешивающей функции F_1 (5). При этом, если $F_1 > \varepsilon_2$, то использовались экстраполяционные формулы, а при $F_1 < \varepsilon_2$, применялась стандартная процедура граничных условий, использующая соотношения на характеристиках. Удовлетворительные результаты могут быть получены при $\varepsilon_2 = 0.99$.

На твердых стенках задаются условия прилипания и тепловой поток через стенку, либо ее температура. Проекция уравнения импульса на сеточное направление позволяет определить давление на стенке. Кинетическая энергия турбулентности на твердой поверхности равна нулю, а для нахождения удельной скорости диссипации используется асимптотическое соотношение [4]:

$$\omega = \frac{60\nu}{\beta_1 (\Delta y_1)^2}.$$

На проницаемых поверхностях, отделяющих текущий межлопаточный канал, от соседних каналов лопаточного аппарата (поверхности периодичности) и от каналов соседней решетки (поверхности скольжения), выставляются условия периодичности и скольжения соответственно. В последнем случае осуществляется осреднение параметров течения в окружном направлении и переход из абсолютной системы координат во вращающуюся или наоборот.

Численные результаты

Численное интегрирование систем уравнений (1) и (2) выполнено неявной разностной схемой Годунова второго порядка аппроксимации [11]. Для ускорения сходимости применялся локальный шаг по времени.

В качестве объекта исследования рассматривался многоступенчатый компрессор, проточная часть которого упрощенно изображена на рис. 2. Стрелкой показан перепуск рабочего тела.

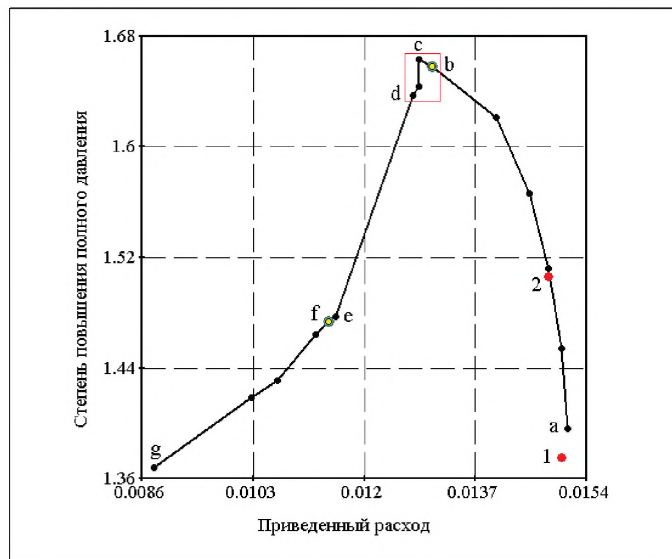


Рис. 3. Характеристика компрессора

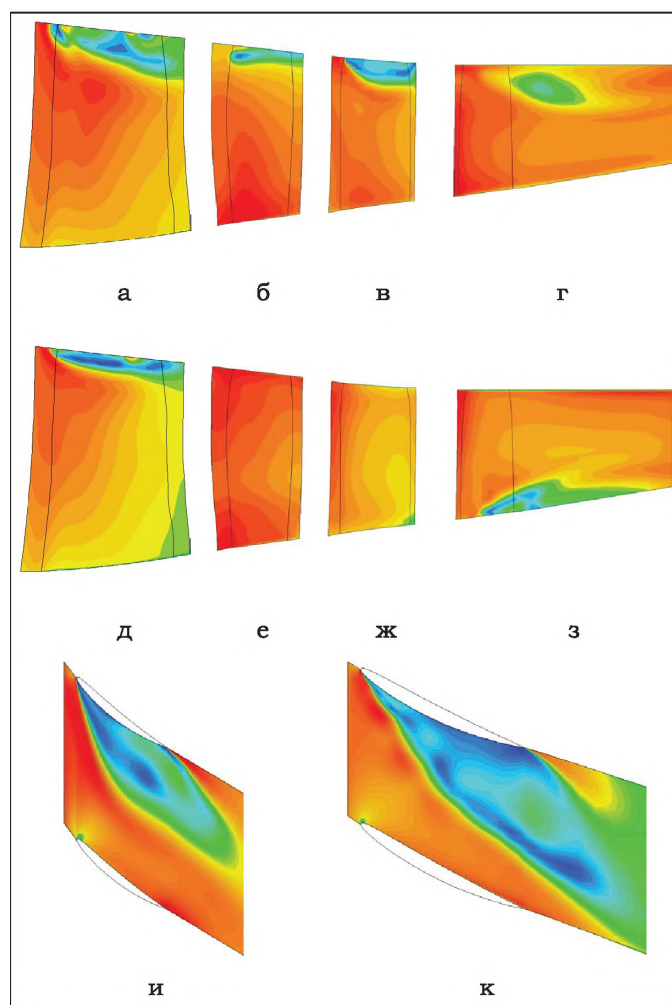


Рис. 4. Изолинии чисел Маха в проточной части компрессора

На рис. 3 приведена характеристика компрессора, полученная в результате расчетов трехмерного течения, которые проводились от достаточно произвольно заданного начального приближения при различных значениях осевой скорости потока на выходе. Приведенный расход рассчитывался по формуле:

$$G_{np} = G_{ex} \frac{\sqrt{T_{ex}^*}}{P_{ex}^*},$$

где G_{ex} – расход на входе, T_{ex}^* и P_{ex}^* – полные температура и давление на входе.

Правая (рабочая) ветвь характеристики располагается между точками a (режим запираия) и c (граница устойчивости). Левая (срывная) ветвь характеристики ограничена точками e и g . Переход с устойчивой ветви на неустойчивую происходит между точками c и e . Для режимов, соответствующих участку характеристики между точками b и d , численное решение оказалось существенно нестационарным. В настоящей работе режимы, соответствующие точкам b (окрестность максимальной степени повышения полного давления) и f , выбраны в качестве характерных для анализа. Необходимо отметить, что при использовании стандартной версии вычислителя FlowER удалось получить решение только вблизи запираия для режимов, соответствующих точкам 1 и 2.

На рис. 4 представлены изолинии чисел Маха для режимов f (а-г, и) и b (д-з, к) в меридиональных (а-з) и тангенциальных (и, к) сечениях РК1 (а, д), СА1 (б, е), РК2 (в, ж), СА2 (г, з-к). Меридиональные сечения выбирались приблизительно в середине межлопаточного канала, а тангенциальные на расстоянии 10% высоты лопатки от периферийного обвода для режима f (и) и 10% высоты лопатки от корневого обвода для режима b (к). Анализ картины течения показывает, что на режиме f по сравнению с режимом b отрывные зоны в РК1, СА1 и РК2 имеют большие размеры. Отрыв в СА2 на режиме f , как и для всех режимов на левой ветви характеристики, располагается на периферии, в то время как для режима b и на всей правой ветви характеристики – у корня. Характерно, что отличие по осевой скорости на выходе для режимов e и d составляет всего около 1 м/с, в то время как на рабочей ветви характеристики скорость меняется от 169 до 280 м/с. С ростом расхода по мере приближения к режиму запираия во всех решетках отрывные зоны уменьшаются, а при уменьшении расхода, наоборот, увеличиваются.

На рис. 5 приведены изолинии давления на поверхности лопатки и на втулочной поверхности, а также линии тока в отрывной зоне в прикорневой области на режиме b . Буквами B и H показаны лопатки и втулочная поверхность соответственно. Наблюдаемые в потоке вихри обозначены цифрами 1-7. Так как в прикорневой области наблюдается существенно нерасчетный положительный угол атаки, то образуется большая отрывная зона на стороне разрежения (рис. 4, к). В этой области располагаются вихри 1-5, закрученные против часовой стрелки и вихрь 6, вращающийся по часовой стрелке. Вихри 1, 2, 3 и 4 возникают на втулочной поверхности на границе зон повышенного и пониженного статического давления и подходят к поверхности разрежения в областях повышенного давления. Отрывная зона замыкается седловой точкой $S2$.

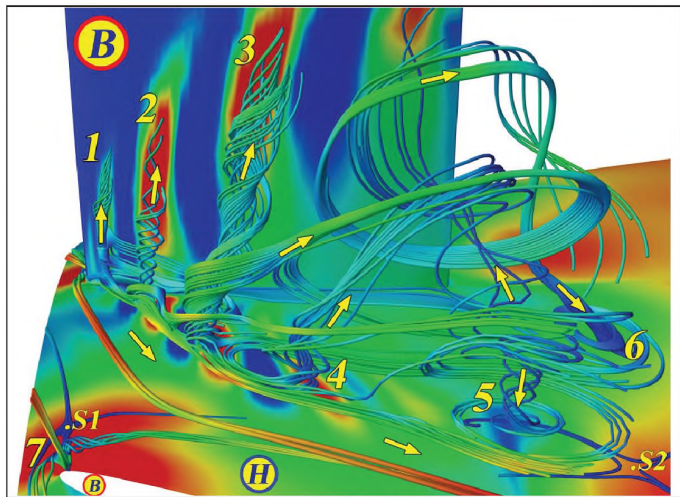


Рис. 5. Вихревая структура течения в СА2 для режима b

Перед входной кромкой лопатки расположена седловая точка $S1$, из которой выходят линии отрыва, отделяющие область подковообразного вихря 7 от основного потока. Ветви подковообразного вихря не затекают на поверхность разрежения лопатки из-за существования упомянутой выше большой отрывной зоны. Видно, что ось подковообразного вихря расположена достаточно далеко от линии отрыва. Положение седловой точки, оси подковообразного вихря и его ветвей существенно зависит от режима работы компрессора.

На режиме f в канале СА2 наблюдается иная картина течения, что можно увидеть на рис. 6, где показаны линии тока вблизи поверхности разрежения лопатки (слева) и поверхностные линии тока (справа) в угловой области, образованной стороной разрежения лопатки и периферийным обводом (T). Отрыв потока на стороне разрежения у корня небольшой, в то время как на периферии образовалась большая протяженная зона (рис. 4, и), в которой доминирует вихрь, выходящий из фокуса f_2 . Линии тока в этом вихре хорошо видны на рис. 6 (слева). Вихри, образующиеся вблизи фокусов f_1 и f_3 , на данном рисунке не показаны. Седловые точки $S2$, $S3$ и линии отрыва

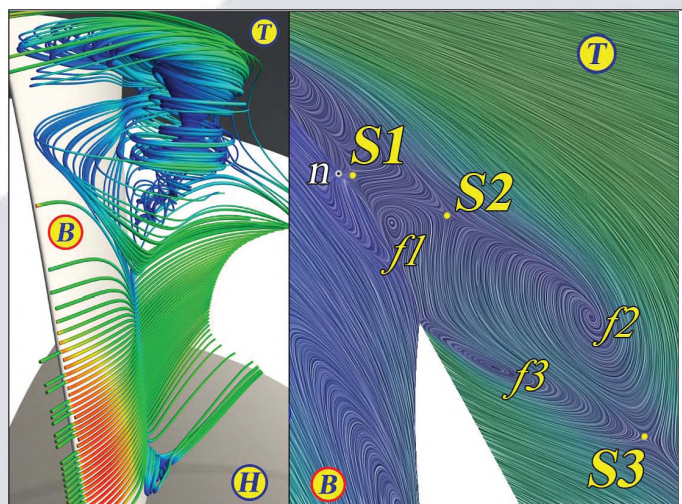


Рис. 6. Линии тока в канале и на поверхности СА2

ва, выходящие из них, отделяют периферийную отрывную зону от основного течения, в то время как седловая точка $S1$ и узловая точка n относятся, по видимому, к угловому вихрю.

Сравнение вихревой структуры течения на режимах b и f показывает, что переход с рабочей ветви характеристики на ее срывную ветвь в СА2 сопровождается перемещением отрыва из прикорневой области в периферийную. Для такой трансформации картины течения достаточно изменения на незначительную величину осевой скорости в ядре потока на выходе компрессора. В ходе исследования пока не удалось обнаружить режима течения, для которого обе отрывные зоны имеют соизмеримые размеры.

При исследовании сложной вихревой структуры течения в последнем спрямляющем аппарате (СА2) компрессора установлено, что в первом рабочем колесе, в котором на периферии организован противопомпажный перепуск воздуха, на всех режимах отрыв наблюдается на периферии. Во втором рабочем колесе отрыв возникает как у корня, так и на периферии, причем для большинства рассмотренных режимов отрыв на периферии имеет большие размеры. На рабочей ветви характеристики в спрямляющих аппаратах выражено преобладание отрывных явлений в привтулочной области. Для режимов на срывной ветви характеристики отрывы происходят в периферийных сечениях. При увеличении расхода через компрессор размеры отрывов уменьшаются, а при уменьшении, наоборот, увеличиваются. Переход с рабочей ветви характеристики на срывную характеризуется исчезновением отрывной зоны в привтулочной области СА2 и ее возникновением в периферийной области.

Анализ результатов исследований показывает целесообразность проведения следующих исследований, которые проводились ранее в невязкой постановке [12]:

- моделирование переходных режимов течения в компрессоре при увеличении или уменьшении расхода для выявления гистерезисных явлений;
- изучение устойчивости компрессора при импульсном изменении полных параметров на входе;
- сопоставление численных результатов с экспериментальными данными для компрессора ХАИ [13] и компрессора Rotor37 [14].

Выводы

Усовершенствование метода расчета течений в компрессорах, состоящее в учете ограничений реализуемости для турбулентных напряжений и в модификации граничных условий на выходе, позволяет проводить численное моделирование потока при больших положительных градиентах давления, как на рабочей, так и на срывной ветвях характеристики. При этом существенно повысилась робастность вычислителя, что проявилось в возможности проведения расчетов для практически любого режима от достаточно произвольного начального приближения. Ложные отрывы в приторцевых пограничных слоях на выходе компрессора при этом не возникают.

Список литературы:

1. Ершов С.В. Комплекс програм розрахунку тривимірних течій газу в багатовісцевих турбомашинах "FlowER" / С.В. Ершов, А.В. Русанов: Свідоцтво про державну реєстрацію прав автора на твір, ПА № 77. Державне агентство України з авторських та суміжних прав, 19.02.1996.
2. Ершов С.В. Развитие комплекса программ расчета трехмерных течений вязкого сжимаемого газа в лопаточных аппаратах турбомашин / С.В. Ершов, В.А. Яковлев, А.И. Деревянко, М.Н. Гризун, Д.А. Козырец // Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. Вестник национального технического университета «ХПИ», 2011. - № 5. - С. 25 - 32.
3. Чжен П. Отрывные течения. - М.: Наука, 1972. - 1. - 299 с.
4. Menter F.R. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // AIAA J. - 1994. - 32, № 8. - P. 1598 - 1605.
5. Lumley J.L. Computational modeling of Turbulent Flows // Adv. Appl. Mech, 1978. -18. - P. 123 - 176.
6. Ершов С.В. Ограничение реализуемости для модели турбулентности SST $k-\omega$ // Проблемы машиностроения, 2008. - 11, № 2. - С. 14 - 23.
7. Ершов С.В. Граничные условия во входном пограничном слое для $k-\omega$ моделей турбулентности // Проблемы машиностроения, 2008. - 11, № 3. - С. 24 - 29.
8. Unsteady Effects of Shock Wave Induced Separation / P.Doerffer et al. (Eds.) // Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, 2010. - 114. - 350 p.
9. Русанов А.В. Математичне моделювання нестационарних в'язких просторових течій у проточних частинах турбомашин / Автореферат дис. на здобуття ступеня д-ра наук: 05.05.16 - турбомашини та турбоустановки. - Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, 2005, - 362 с.
10. Кампсти Н. Аэродинамика компрессоров / М.: Мир, 2000.- 688 с.
11. Ершов С.В. Квазимонотонная схема повышенной точности для интегрирования уравнений Эйлера и Навье-Стокса // Мат. моделирование. - 1994. - 6, № 11. - С. 63 - 75.
12. Yershov S.V. Numerical simulation of 3D separated flow through multistage turbomachine // ICFM5/95, Proc. 5th Int. Conf. Fluid Mechanics, Cairo, Egypt, 2 - 5 Jan. 1995, Cairo, Cairo University Publication, 1995, 2. - P. 1 - 10.
13. Барышев И.В. Аэродинамические исследования модельной компрессорной ступени с малым относительным диаметром втулки / И.В. Барышев, А.И. Борисенко, В.Н. Ершов, Г.В. Павленко, В.П. Герасименко // Научный отчет ХАИ. - 1977, № 561/25. - С. 1 - 29.
14. Reid, L., Moore, R. D., Design and Overall Performance of Four Highly Loaded, High-Speed Inlet Stages for an Advanced High-Pressure-Ratio Core Compressor / L.Reid, R.D.Moore // NASA TP 1337. - 1978. - 119 p.