

В.Ф. Греков, к.т.н. доц., А.А. Пьянков, член-кор. ПАНИ, к.т.н., доц., В.А. Тодчук, к.т.н., доц., (г. Харьков, Украина)

Определение критических осевых сжимающих усилий изотропных цилиндров

Приведен подход, в котором предполагается, что потеря устойчивости оболочки происходит за счет внутренней энергии, накопленной в докритическом состоянии, а работа внешних нагрузок в момент потери устойчивости равна нулю. Рассматриваемый подход абсолютно отличается от принятого в [1], где предполагалось, что изменение потенциальной энергии осевого растяжения-сжатия равно работе внешних осевых усилий на перемещениях, полученных за счет растяжения-сжатия срединной поверхности оболочки в момент потери устойчивости. Оба подхода предполагают, что критическая нагрузка изменяется в момент потери устойчивости.

Ключевые слова: цилиндр, осевое сжатие, устойчивость, энергетический метод.

Приведений підхід, в якому передбачається, що втрата стійкості оболонки відбувається за рахунок внутрішньої енергії, накопленої в до критичному стані, а робота зовнішніх навантажень у момент втрати стійкості рівна нулю. Даний підхід абсолютно відрізняється від прийнятого в [1], де передбачалося, що зміна потенційної енергії осевого розтягування-стиснення рівна роботі зовнішніх осевих зусиль на переміщеннях, отриманих за рахунок розтягування-стиснення середньої поверхні оболонки у момент втрати стійкості. Обидва підходи припускають, що критичне навантаження змінюється у момент втрати стійкості.

Ключові слова: циліндр, осеве стискування, стійкість, енергетичний метод.

Approach, which it is assumed in, that the loss of stability of shell takes a place due to internal energy, accumulated in the to critical the state, is resulted, and work of the external loadings in the moment of loss of stability is equal to the zero. The examined approach absolutely differs from accepted in [1], where it was assumed that a change potential energy of axial tension-compression is equal to work of external axial efforts on moving, got due to tension-compression of middle surface of shell in the moment of loss of stability. Both approaches suppose that the critical loading changes in the moment of loss of stability.

Keywords: cylinder, axial compression, stability, power method.

Внимательный экспериментатор, исследуя устойчивость круговой цилиндрической оболочки при осевом сжатии с помощью гидравлического пресса, видит:

а) нагрузочные плиты очень медленно сближаются. Оболочка сжимается до критического состояния (показания манометра (силомера) достигают максимума);

б) мгновенно происходит следующие:

- оболочка хлопком теряет устойчивость и переходит в новое равновесное состояние;
- показания манометра (силомера) резко падают;
- показания манометра (силомера) быстро возрастают до значения меньше максимального;
- подача жидкости в нагрузочную систему прекращается (гидропресс выключается);

в) расстояние между нагрузочными плитами не меняется, так как нагружение происходит очень медленно, гидравлический пресс выключается быстро, жидкость практически несжимаема, а потеря устойчивости происходит мгновенно.

Резкое падение показаний манометра в момент потери устойчивости говорит о том, что:

- давление в нагрузочной системе падает мгновенно, а, следовательно, мгновенно падает осевая сжимающая нагрузка;
- нагрузочные плиты гидравлического пресса не отслеживают перемещений торцов оболочки, а значит, учитывая пункт в), внешняя осевая нагрузка не

совершает работы по переводу оболочки в новое равновесное состояние.

Исходя из вышеизложенных наблюдений, можно сделать следующие выводы:

1. Критическая сжимающая нагрузка N_c в процессе потери устойчивости оболочки изменяется и в новом (деформированном) состоянии становится равной $N_c + \Delta N_c$ (ΔN_c - изменение критической силы в момент потери устойчивости).

2. При потере устойчивости переход в новую форму равновесия осуществляется за счет внутренней энергии оболочки, накопленной в докритическом состоянии, которая достигла критического значения.

3. Внешняя сжимающая нагрузка свою функцию выполняла, сообщив оболочке критическую энергию, и в переводе оболочки в новое равновесное состояние не участвует. Другими словами, дополнительная работа ΔA внешней сжимающей нагрузки равна нулю.

4. Расстояние между торцами оболочки в момент потери устойчивости и в новом равновесном состоянии одно и то же.

Исследуем теоретически устойчивость круговой цилиндрической оболочки (рис. 1) длиной L , радиуса R , с толщиной стенок цилиндра h , нагруженную по краям равномерно распределенными усилиями сжатия N , по расчетной схеме на основе сделанных ранее выводов.

Исходные предпосылки: оболочка геометрически совершенна, материал оболочки идеально упругий,

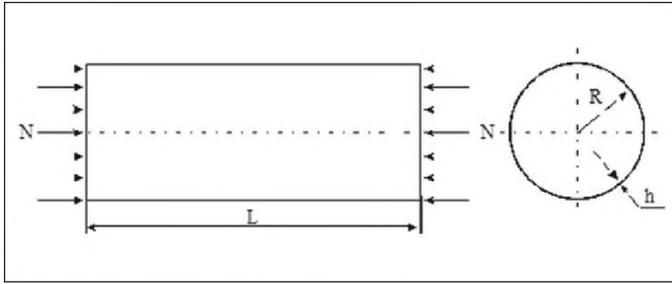


Рис. 1. Схема цилиндрической оболочки при равномерном осевом сжатии

докритическое состояние оболочки – безмоментное, края оболочки свободно оперты.

Метод решения: энергетический с использованием соотношений линейной теории оболочек.

Согласно [1], изменение потенциальной энергии деформации оболочки при потере устойчивости

$$\Delta V = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left\{ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\nu)(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \frac{1}{4}\varepsilon_{12}^2) + \frac{h^2}{12} [(\chi_1 + \chi_2)^2 - 2(1-\nu)(\chi_1\chi_2 - \chi_{12}^2)] \right\} dx dy, \quad (1)$$

где $\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}$; $\varepsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$; $\chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$;

$\chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y}$; $\chi_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x}$; u, v, w – смещения

точек срединной поверхности оболочки в направлении координат x, y, z ; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала.

Смещения v и w , отвечающие граничным условиям, зададим в виде

$$v = f_2 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}; \quad w = f_3 \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{ny}{R}, \quad (3)$$

где m – число полуволн, по которым изгибаются образующие цилиндрической оболочки; n – число волн в окружном направлении; f_2, f_3 – амплитуды смещений в направлении осей y и z .

Пусть сумма удлинения срединной поверхности единичного элемента оболочки в осевом направлении за счет растяжения и сближения его противоположных граней при изгибе равна некоторой функции $f_1(x, y)$, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = f_1(x, y). \quad (4)$$

Проинтегрировав выражение (4) по частям, получим

$$u = \int f_1(x, y) dx - \frac{1}{4} f_3^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(x + \frac{1}{2m\pi} \sin \frac{2\pi x}{L} \right) \cos^2 \frac{ny}{R}. \quad (5)$$

В соответствии с выводом 4, $u(0) = u(L) = 0$ при этом, $u(x, y) \neq 0$

Выполнение этого условия возможно, если

$$\int f_1(x, y) dx = \frac{1}{4} f_3^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(x - \frac{1}{2m\pi} \sin \frac{2\pi x}{L} \right) \cos^2 \frac{ny}{R}. \quad (6)$$

Подставив (6) в (5), получаем

$$u = -\frac{1}{4} f_3^2 \frac{m\pi}{L} \sin \frac{2m\pi x}{L} \cos^2 \frac{ny}{R}, \quad (7)$$

После подстановки выражений (3) и (7) в (2), а (2) в (1) и выполнения операций дифференцирования и интегрирования получаем

$$\begin{aligned} \Delta V = & \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{16} f_3^4 \frac{1}{R^2} \lambda^2 \left(3\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) + \right. \\ & + f_2^2 \left[\frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 [2(1-\nu)\lambda^2 + n^2] \right] + \\ & + 2f_2 f_3 n \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 [(2-\nu)\lambda^2 + n^2] \right] + \\ & \left. + f_3^2 \left[1 + \frac{1}{12} \frac{h^2}{R^2} (\lambda^2 + n^2)^2 \right] \right] \frac{\pi L}{4R}, \quad (8) \end{aligned}$$

где $\lambda = \frac{m\pi R}{L}$.

Согласно выводам 1 и 3, дополнительная работа внешней сжимающей нагрузки равна нулю, т.е.

$$\Delta A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left(N_* + \frac{1}{2} N_1 \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy = 0. \quad (9)$$

Множитель $\frac{1}{2}$ при N_1 появился потому, что переход оболочки из начального недеформированного в деформированное состояние сопровождается изменением N_1 от нуля до своего максимального значения по модулю.

Внешняя нагрузка N_1 равна внутренним усилиям T_1 на краях оболочки, имея противоположное направление

$$N_1 = -T(0) = -T(L) = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_1(0) + \nu\varepsilon_2(0)] = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_1(L) + \nu\varepsilon_2(L)];$$

$$N_1 = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} f_3^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \frac{ny}{R}. \quad (10)$$

Из (9) получаем

$$\frac{1}{16} f_3^4 \frac{1}{R^2} \lambda^2 = -\frac{1-\nu^2}{3} \frac{N_*}{Eh} f_3^2. \quad (11)$$

С учетом (11)

$$\Delta V = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[f_3^2 \frac{1-\nu^2}{Eh} N_* \left(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{6} n^2 \right) + f_2^2 \left[\frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 [2(1-\nu)\lambda^2 + n^2] \right] + 2f_2 f_3 n \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 [(2-\nu)\lambda^2 + n^2] \right] + f_3^2 \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 (\lambda^2 + n^2)^2 \right] \right] \frac{\pi L}{4R}. \quad (12)$$

Для определения критического значения осевой сжимающей нагрузки N^* используем условие минимума потенциальной энергии для перемещений

$$\frac{\partial \Delta \Pi}{\partial f_k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad (13)$$

где $\Delta \Pi = \Delta V + \Delta A$, а так как $\Delta A = 0$, то $\Delta \Pi = \Delta V$, что соответствует выводу 2 и в рассматриваемом случае условие (13) принимает вид

$$\frac{\partial \Delta \Pi}{\partial f_2} = 0, \quad \frac{\partial \Delta \Pi}{\partial f_3} = 0. \quad (14)$$

Из (14) получим систему двух уравнений

$$f_2 a_{11} + f_3 a_{12} = 0; \quad f_2 a_{21} + f_3 a_{22} = 0, \quad (15)$$

где

$$a_{11} = \left[\frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 [2(1-\nu)\lambda^2 + n^2] \right];$$

$$a_{12} = a_{21} = n \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 [(2-\nu)\lambda^2 + n^2] \right];$$

$$a_{22} = \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 (\lambda^2 + n^2)^2 \right] - \frac{1-\nu^2}{Eh} N_* \left(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{6} n^2 \right).$$

Система уравнений (15) имеет ненулевое решение при условии равенства нулю определителя из коэффициентов при параметрах f_2 и f_3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (16)$$

Раскрыв этот определитель, получим выражение для критического усилия сжатия

$$N_* = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{1}{\lambda^2 + \frac{1-\nu}{6} n^2} \left\{ 1 + \frac{1}{12} \frac{h^2}{R} (\lambda^2 + n^2)^2 - \frac{n^2 \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 [(2-\nu)\lambda^2 + n^2]^2 \right]}{\left[\frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 [2(1-\nu)\lambda^2 + n^2] \right]} \right\}. \quad (17)$$

Относительное значение критического усилия сжатия

$$\bar{N}_* = \frac{N_*}{N_*^s} = \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} \frac{R}{h} \frac{1}{\lambda^2 + \frac{1-\nu}{6} n^2} \left\{ 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 (\lambda^2 + n^2)^2 - \frac{n^2 \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 [(2-\nu)\lambda^2 + n^2]^2 \right]}{\left[\frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 [2(1-\nu)\lambda^2 + n^2] \right]} \right\}, \quad (18)$$

где $N_*^s = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}$ – классическое (верхнее) критическое усилие сжатия.

Минимизация выражений (17) и (18) по целочисленным параметрам m и n позволяет находить значения критических нагрузок в абсолютных и относительных величинах для тонкостенных цилиндрических оболочек любых геометрических размеров.

В табл. 1 представлены результаты минимизации выражения (18) при $\nu=0,3$ для оболочек с $L/R = 2; 4; 10$, а R/h изменяется от 50 до 3000.

По полученным результатам построены графики (рис. 2) изменения значений \bar{N}_* в зависимости от изменения L/R и R/h . На рис. 2 также показаны результаты некоторых экспериментальных исследований, опубликованных в журналах AJAA journal.

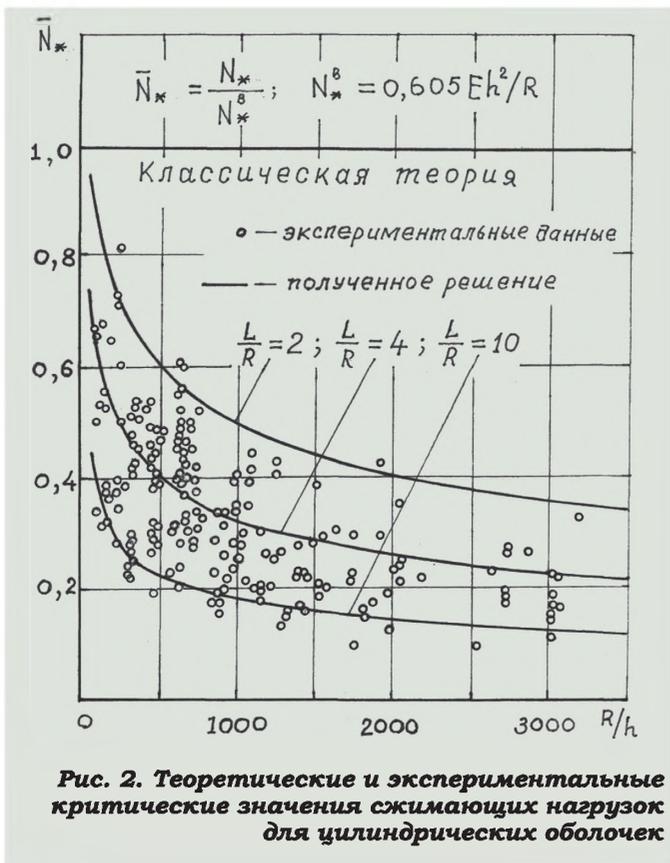
На основе теории пологих оболочек получены более простые формулы для определения критических нагрузок N_n^*

$$N_n^* = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{1}{\lambda^2 + \frac{1-\nu}{6} n^2} \left\{ \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 (\lambda^2 + n^2)^2 \right\}, \quad (19)$$

$$\bar{N}_n^* = \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} \frac{R}{h} \frac{1}{\lambda^2 + \frac{1-\nu}{6} n^2} \left\{ \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 (\lambda^2 + n^2)^2 \right\}, \quad (20)$$

Таблица 1. Результаты минимизации выражения (18)

L/R	2			4			10		
R/h	m	n	\bar{N}_*	m	n	\bar{N}_*	m	n	\bar{N}_*
50	1	6	0,955	1	5	0,738	1	4	0,450
75		6	0,903		5	0,676		4	0,383
100		7	0,855		6	0,623		4	0,374
150		8	0,800		7	0,565		5	0,319
200		9	0,753		8	0,530		6	0,298
300		11	0,689		9	0,469		6	0,266
400		12	0,640		10	0,433		7	0,238
500		13	0,604		10	0,403		8	0,224
750		15	0,541		12	0,356		9	0,196
1000		16	0,499		13	0,325		10	0,180
1250		18	0,468		14	0,308		10	0,168
1500		19	0,443		15	0,287		11	0,157
2000		21	0,406		17	0,262		12	0,143
2500		22	0,379		18	0,244		13	0,133
3000		24	0,358		19	0,230		14	0,125



$$\bar{N}_*^n = 1,8157 \frac{R}{h} \frac{1}{\lambda^2 + 0,1167n^2} \left\{ \frac{0,35\lambda^2}{0,35\lambda^2 + n^2} + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 (\lambda^2 + n^2)^2 \right\} \quad (21)$$

Результаты расчетов \bar{N}_*^n по (21) и погрешности

$$\Delta = \frac{\bar{N}_*^n - \bar{N}_*}{\bar{N}_*} 100\%$$

вносимые в результаты расчетов при использовании упрощенных зависимостей, приведены в табл. 2.

Рассмотрим устойчивость шарнирно опертого стержня (рис. 3) длины L с площадью поперечного сечения F , нагруженного сжимающими силами P , используя предложенный подход.

Изменение потенциальной энергии деформации стержня при потере устойчивости

$$\Delta V = \frac{1}{2} E \int_0^L (F \varepsilon^2 + J \cdot \chi^2) dx, \quad (22)$$

где

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}; \chi = -\frac{d^2w}{dx^2};$$

$$u = -\frac{1}{4} f^2 \frac{m\pi}{L} \sin 2 \frac{m\pi x}{L}; w = f \sin \frac{m\pi x}{L}; \quad (23)$$

J — момент инерции поперечного сечения стержня; f — амплитуда прогиба оси стержня.

Таблица 2. Результаты расчетов \bar{N}_* по (21) и погрешности Δ

L/R	2			4			10		
R/h	\bar{N}_*^n	\bar{N}_*	$\Delta\%$	\bar{N}_*^n	\bar{N}_*	$\Delta\%$	\bar{N}_*^n	\bar{N}_*	$\Delta\%$
50	0,987	0,955	3,35	0,782	0,738	5,96	0,498	0,450	10,66
100	0,874	0,855	2,22	0,646	0,623	3,69	0,398	0,374	6,42
300	0,696	0,685	1,60	0,477	0,469	1,70	0,274	0,266	3,00
500	0,609	0,604	0,83	0,409	0,403	1,49	0,229	0,224	2,25
1000	0,501	0,499	0,40	0,328	0,325	0,92	0,182	0,180	1,11

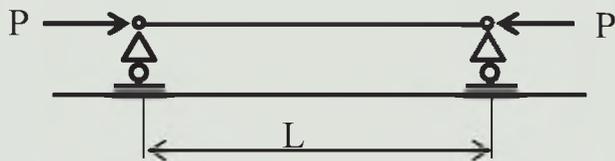


Рис. 3. Шарнирно опертый стержень, нагруженный сжимающими силами P

Из (22) с учетом (23) получаем

$$\Delta V = \frac{1}{2} E \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 f^2 \left(\frac{1}{4} f^2 F + J \right) \frac{L}{2}. \quad (24)$$

Дополнительная работа внешней сжимающей силы

$$\Delta A = \frac{1}{2} \int_0^L \left(P_* + \frac{1}{2} P \right) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = 0, \quad (25)$$

где $P = -T(0) = -T(L) = -EF \epsilon(0) = -EF \epsilon(L)$, $T = EF \frac{du}{dx}$ дополнительная внутренняя сила, возникающая в стержне, при потере устойчивости.

Из (25) получаем

$$\frac{1}{4} EF f^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 = -P_*. \quad (26)$$

Сделаем соответствующую замену в (24), получим

$$\Delta V = \frac{1}{2} f^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left[-P_* + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 EJ \right] \frac{L}{2}. \quad (27)$$

Из условия минимума потенциальной энергии $\frac{d\Delta V}{df} = 0$ получаем

$$P_* = \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 EJ. \quad (28)$$

Критическая сжимающая сила P_* имеет минимальное значение при $m=1$ и тогда

$$P_* = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 EJ, \quad (29)$$

что полностью соответствует классическому решению, которое сомнений не вызывает.

Анализируя результаты, полученные на основе принятого предположения о том, что потеря устойчивости происходит за счет внутренней энергии оболочки, накопленной в докритическом состоянии, которая достигла критического значения, а работа внешних сил на перемещениях, возникших в процессе потери устойчивости, равна нулю и учета изменения внешней нагрузки в процессе потери устойчивости¹, а так же сравнение их с эксперимен-

тальными данными (в систематизированном виде они представлены в [2], а так же приведенными на рис. 2), удалось:

- получить выражение для N_* , позволяющее вычислять критические значения осевой сжимающей нагрузки, близкие к экспериментальным;
- установить зависимость относительных критических значений осевой сжимающей нагрузки от отношения радиуса оболочки к ее толщине R/h и отношения длины оболочки к ее радиусу L/R ;
- сделать вывод о возможности использования для теоретических расчетов упрощенных зависимостей, полученных на основе теории пологих оболочек. Только длинные (большое L/R) и сравнительно толстые (малое R/h) оболочки требуют расчета по точным зависимостям для N_* ;
- получить выражение для критической сжимающей силы шарнирно опертого стержня, совпадающее с классическим решением.

Задача решена в условиях статики, а потеря устойчивости – динамический процесс. Поэтому, необходимо это учитывать при дальнейших исследованиях.

Выводы

Предлагаемый подход к решению задачи устойчивости тонкостенных конструкций имеет право на существование.

Предлагаемый подход совместно с учетом влияния динамики происходящих процессов, исходных и граничных условий, начальных несовершенств² может приблизить исследователей к решению проблемы устойчивости и несущей способности в целом тонкостенных конструкций.

Список литературы:

1. Греков В.Ф. Подход к решению задачи устойчивости цилиндра при осевом сжатии / В.Ф. Греков, А.А. Пьянков, В.А. Тодчук // Компрессорное и энергетическое машиностроение, 2012.– № 3(29), С. 40-42.
2. Григолоук Э.И. Устойчивость оболочек./ Э.И.Григолоук, В.В.Кабанов. М.: Наука,–1978.– 359 с.
3. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л. Судпромгиз, 1962.

Примечания:

¹ По-видимому, не учет изменения внешней нагрузки в момент потери устойчивости оболочки – главная ошибка исследователей, решающих задачу в линейной постановке.

² Начальные несовершенства не играют той огромной роли в снижении критических усилий, которую им приписывают. Исследуя поверхность реальных оболочек в докритическом состоянии, видим, что начальные геометрические несовершенства (разные в исследуемых образцах и расположенные в разных местах оболочки) ведут себя по-разному в процессе нагружения. Одни развиваются быстро, другие – медленно; одни развиваются постоянно, другие – приостанавливаются в своем развитии. Одна и та же погрешность может постоянно развиваться; может приостанавливаться в развитии, а затем снова развиваться. Происходит перераспределение напряжений в оболочке, а следовательно, мысленно выделенные стержни оболочки «несут» разную внешнюю нагрузку. Однако критические силы одной партии оболочек мало отличаются (если отдельные образцы не имеют явных дефектов). Поэтому замер начальных несовершенств малоэффективен. Необходим учет их влияния с помощью коэффициентов, полученных на основе обработки статистических данных.