

В.Ф. Греков., к.т.н. доц., А.А. Пьянков., член-кор. ПАНИ, к.т.н., доц., В.А. Тодчук., к.т.н., доц, (г. Харьков, Украина)

Об устойчивости тонкостенных цилиндров

Приведен подход к теоретическому определению зависимости критических усилий устойчивости тонкостенных цилиндров от геометрии оболочки и параметров волнообразования.

Ключевые слова: цилиндр; осевое сжатие; устойчивость; энергетический метод.

Приведений підхід до теоретичного визначення залежності критичних зусиль стійкості тонкостінних циліндрів від геометрії оболонки і параметрів хвилеутворення.

Ключові слова: циліндр; осьове стискування; стійкість; енергетичний метод.

Approach over to theoretical determination of dependence of critical efforts of stability of the thin-walled cylinders is brought from geometry of shell and parameters of wavemaking.

Keywords: cylinder; axial compression; stability; power method

Большое несоответствие критических нагрузок, определенных теоретически, и действительных нагрузок, которые выдерживают тонкостенные конструкции до потери устойчивости, заставляют исследователей и практиков неоднократно возвращаться к этому вопросу.

Самой показательной с точки зрения несоответствия теоретических решений большинству экспериментов является устойчивость круговой цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Теоретические и экспериментальные критические нагрузки в этом случае иногда отличаются в разы.

Данная работа является продолжением [1]. В ней предлагается один из возможных подходов к теоретическому решению задачи устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии, приводящей к результатам, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Основное отличие данного подхода заключается в предположении, что во время выпучивания оболочки критическое усилие сжатия изменяется. Обычно полагают, что при потере устойчивости оболочки $N_{кр}$ остается постоянным [2, 4] и др.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку (рис. 1) длиной L , радиуса R , с толщиной стенок цилиндра h , нагруженную по краям усилиями сжатия N . Края оболочки шарнирно оперты. Материал оболочки работает в пределах упругости. Необходимо определить наименьшее значение осевых усилий сжатия $N_{10} = N_{кр}$, при котором произойдет потеря устойчивости оболочки.

Задачу решаем энергетическим методом в линейной постановке без учета моментности и изменения начальных размеров в докритическом состоянии с использованием соотношений теории пологих оболочек.

Допустим, что во время выпучивания оболочки усилие сжатия изменяется и в новой форме равновесия становится равным

$$N_1^1 = N_{10} + N_1. \quad (1)$$

Поскольку материал оболочки подчиняется закону Гука, то изменение усилий сжатия пропорционально изменению относительного удлинения. Из этого следует то, что

$$\frac{N_1^1}{N_1} = \frac{\varepsilon_1^1}{\varepsilon_{10}}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_1^1 = \varepsilon_{10} + \frac{1}{L(1-\nu^2)} \int_0^L (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) dx$ – полное относительное удлинения сжатия; $\varepsilon_{10} = \frac{N_{10}}{Eh}$ – относительное удлин-

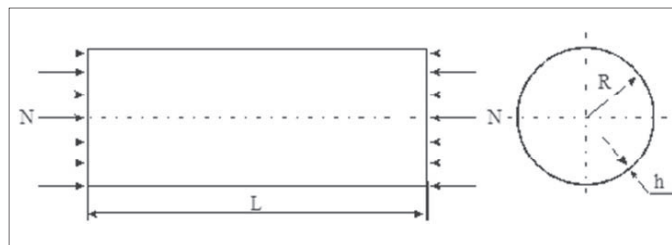


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка при равномерном осевом сжатии

ние сжатия в докритическом состоянии; ε_1 и ε_2 – относительные удлинения сжатия, возникающие при выпучивании оболочки; E , ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала.

Здесь и в дальнейшем все параметры, характеризующие оболочку в направлении оси x , снабжены индексом 1, а оси y – индексом 2. Оси x и y совпадают с направлениями главных кривизн оболочки.

Из (2) получаем

$$N_1 = \frac{Eh}{L(1-\nu^2)} \int_0^L (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) dx \quad (3)$$

Для определения $N_{kp}=N_{10}$ воспользуемся критерием С.П. Тимошенко [4]

$$\Delta V = \Delta A, \quad (4)$$

по которому приращение потенциальной энергии ΔV малой деформации, возникающей при потере устойчивости, равна дополнительной работе ΔA , производимой нагрузкой на перемещениях, вызванных этой деформацией.

Согласно Флюгге [5]

$$\Delta V = \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left[\left(T_{10} + \frac{1}{2} T_1 \right) \varepsilon_1 + \frac{1}{2} (T_2 \varepsilon_2 + T_{12} \varepsilon_{12} + M_1 \chi_1 + M_2 \chi_2 + 2M_{12} \chi_{12}) \right] dx dy, \quad (5)$$

где буквами T и M обозначены внутренние усилия и моменты, возникающие в оболочке, и учтено (на основании теоремы о взаимности), что $T_{10} \varepsilon_1 = T_1 \varepsilon_{10}$.

Все параметры, характеризующие оболочку в докритическом состоянии, снабжены индексом 0.

Дополнительную работу, действующих на оболочку осевых усилий запишем в виде

$$\Delta A = \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left(N_{kp} + \frac{1}{2} N_1 \right) \left[\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy, \quad (6)$$

где ω – нормальная составляющая вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки.

Появление множителя $\frac{1}{2}$ при N_1 объясняется тем, что переход оболочки из начального недеформированного в деформированное состояние сопровождается изменением N_1 от нуля до его максимального значения по модулю.

С учетом (5), (6) и того, что $T_{10} \varepsilon_1 = N_{kp} \varepsilon_1$, равенство (4) имеет вид

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi R} \int_0^L [T_1 \varepsilon_1 + T_2 \varepsilon_2 + T_{12} \varepsilon_{12} + M_1 \chi_1 + M_2 \chi_2 + 2M_{12} \chi_{12}] dx dy = \\ = \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left[N_1 \varepsilon_1 + \left(N_{kp} + \frac{1}{2} N_1 \right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy. \quad (7) \end{aligned}$$

Согласно [2]

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2); T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1); T_{12} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12};$$

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_1 + \nu\chi_2); M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_2 + \nu\chi_1);$$

$$M_{12} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \chi_{12}; \varepsilon_1 = \frac{1}{Eh} \left(-\nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right);$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right); \varepsilon_{12} = -\frac{2(1+\nu)}{Eh} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y};$$

$$\chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \chi_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (8)$$

Связь между Φ и ω установим из условия совместности деформаций, приравнявая выражения $\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y}$, полученные из (8), и на основе известных зависимостей:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}, \varepsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (9)$$

Граничные условия шарнирно опертой оболочки требуют, чтобы

$$\omega = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad (10)$$

при $x=0$, $x=L$.

Мы удовлетворим граничным условиям, если w и Φ представим в виде:

$$w = f \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R}, \quad \Phi = \varphi(x) \cos \frac{n\pi y}{R}, \quad (11)$$

где $m=1,2,3,\dots$ – число полуволн в продольном направлении, $n=2,3,4,\dots$ – число волн в окружном направлении.

Из (9) получаем

$$\varphi(x) = -f \cdot \frac{Eh}{R} \frac{\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2}{\left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{L}. \quad (12)$$

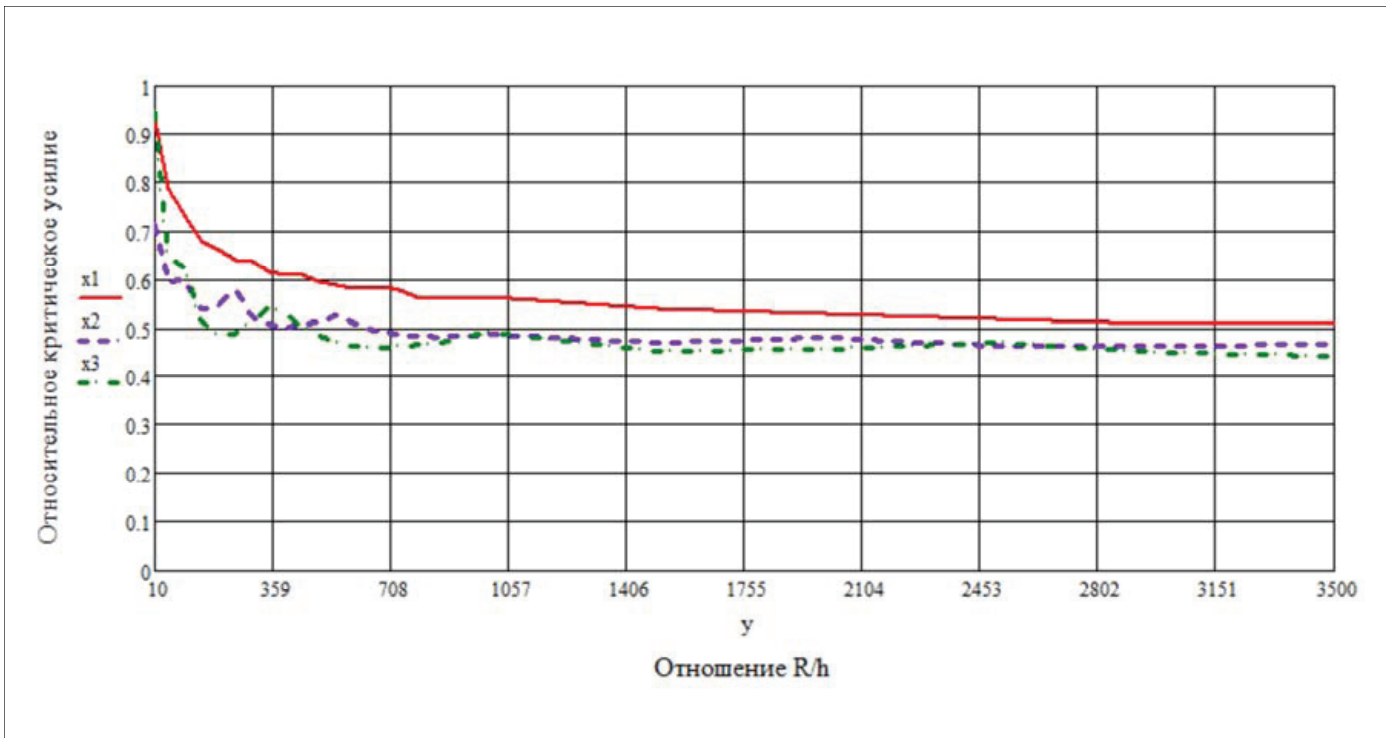


Рис. 2. Значения относительных критических усилий сжатия

После подстановки (3), (8), (11) и (12) в (7) находим зависимость критических усилий $N_{кр}$ от геометрии оболочки и параметров волнообразования

$$N_{кр} = Eh \left\{ \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} - 8 \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{(-\nu\lambda^2 + n^2)n^2}{(\lambda^2 + n^2)^4} + \frac{1}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^2} \right\}, \quad (13)$$

где $\lambda = \frac{\pi m R}{L}$.

Относительное критическое усилие

$$\bar{N}_{кр} = \frac{N_{кр}}{N_{кр}^e}, \quad (14)$$

где $N_{кр}^e = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}$ – классическое критическое усилие сжатия или, как его еще называют, верхнее критическое усилие. При $\nu=0,3$

$$N_{кр}^e = 0,605 \frac{Eh^2}{R}$$

и

$$\bar{N}_{кр} = 1,652 \frac{R}{h} \left\{ \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} - 8 \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{(n^2 - 0,3\lambda^2)n^2}{(\lambda^2 + n^2)^4} + 0,092 \left(\frac{h}{R} \right)^2 \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^2} \right\}. \quad (15)$$

Минимизация выражения (15) по целочисленным параметрам m и n приводит к результатам, которые

представлены на рис. 2 для значений $\frac{L}{R} = 1; \pi; 2\pi$, а $\frac{R}{h}$ изменяется от 10 до 3500.

$$x1 = \frac{L}{R} = 1, x2 = \frac{L}{R} = \pi, x3 = \frac{L}{R} = 2\pi.$$

Выводы:

1. Особенность предложенного подхода заключается в учете изменения внешней нагрузки при потере устойчивости оболочки.

2. Предлагаемый подход приводит к результатам, которые качественно и количественно хорошо описывают наблюдаемые в экспериментах явления.

3. Показано, что относительные значения осевых критических нагрузок существенно зависят от изменения отношений радиуса оболочки к её толщине и длины к радиусу.

Список литературы:

1. Греков В.Ф. Подход к решению задачи устойчивости цилиндра при осевом сжатии / В.Ф. Греков, А.А.Пьянков, В.А.Тодчук // Компрессорное и энергетическое машиностроение, 2012.– № 3(29), С. 40-42.
2. Григолюк Э. И. Устойчивость оболочек./ Э.И.Григолюк, В.В. Кабанов. - М.: Наука, 1978.
3. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л. Судпромгиз, 1962.
4. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. ОГИЗ – Гостехиздат, 1946.
5. Флюгге В. Статика и динамика оболочек. М. Стройиздат, 1961.