

В.Ф. Греков., к.т.н. доц., А.А. Пьянков., член-кор. ПАНИ, к.т.н., доц., В.А. Тодчук., к.т.н., доц., (г. Харьков, Украина)

Об устойчивости оболочек, пластин и стержней

Теоретически определена зависимость устойчивости оболочек, пластин и стержней от критических нагрузок, характеристик материалов и геометрических параметров.

Ключевые слова: выпучивание, критическая нагрузка, перемещение, устойчивость, эксперимент, энергия.

Теоретично визначена залежність стійкості оболонок, пластин і стержнів від критичних навантажень, характеристик матеріалів і геометричних параметрів.

Ключові слова: вигин, критичне навантаження, переміщення, стійкість, експеримент, енергія.

Dependence of stability of shells is certain in theory, plastins and bars from the critical loading, descriptions of materials and geometrical parameters.

Keywords: goggling, critical loading, moving, stability, experiment, energy.

В работах [1, 2] принято предположение, что выпучивание цилиндрических оболочек происходит за счет внутренней энергии, накопленной в докритическом состоянии, а работа изменяющихся в процессе выпучивания внешних сил на перемещениях, возникающих при выпучивании, равна нулю. На основе этого предположения решены задачи устойчивости свободно опёртых цилиндрических оболочек при осевом сжатии. Получены расчетные зависимости критических нагрузок от механических характеристик материалов, геометрических параметров и параметров волнообразования, приводящих к результатам близким к экспериментальным данным. Предлагаемый подход можно использовать для решения задач устойчивости оболочек, пластин и стержней при осевом сжатии.

1. Принятое предположение

Предположим, что:

- критическая сжимающая нагрузка в процессе потери устойчивости оболочки изменяется;
- переход в новую форму равновесия осуществляется за счет внутренней энергии, накопленной в докритическом состоянии;
- дополнительная работа ΔA , изменяющейся в процессе выпучивания, внешней сжимающей нагрузки на перемещениях, возникающих при выпучивании, равна нулю;
- расстояние между торцами оболочки, нагруженными гранями пластины и концами стержня в момент потери устойчивости и в новом равновесном состоянии одно и то же.

2. Устойчивость изотропной цилиндрической оболочки

Оболочка (рис. 1) длиной L , радиуса R , с толщиной стенок цилиндра h , нагружена по краям равномерно распределёнными усилиями сжатия N .

Исходные предпосылки: оболочка геометрически совершенна, идеально упругая, докритическое состояние – безмоментное, края - свободно опёрты.

Метод решения: энергетический с использованием соотношений линейной теории.

Согласно [3], изменение потенциальной энергии деформации оболочки

$$\Delta V = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^L \left\{ \frac{h^2}{12} [(\chi_1 + \chi_2)^2 - 2(1-\nu)(\chi_1\chi_2 - \chi_{12}^2)] + (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - 2(1-\nu)(\epsilon_1\epsilon_2 - \frac{1}{4}\epsilon_{12}^2) \right\} dx dy, (2.1)$$

где $\epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\epsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}$; $\epsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$;

$$\chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y}; \chi_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x}; (2.2)$$

u, v, w – смещения точек срединной поверхности оболочки в направлении осей x, y, z ; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала.

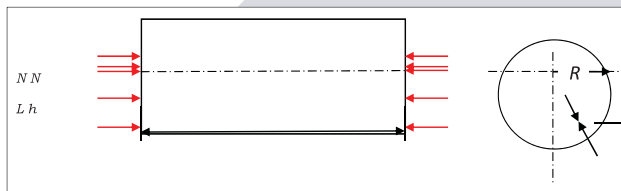


Рис. 1. Схема цилиндрической оболочки при равномерном осевом сжатии

Смещения v и w , отвечающие граничным условиям, зададим в виде

$$v = f_2 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n y}{R}; w = f_3 \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n y}{R}, (2.3)$$

где m – число полуволн по длине оболочки; n – число волн в окружном направлении; f_2, f_3 – амплитуды смещений в направлении осей y и z .

Пусть сумма удлинения срединной поверхности единичного элемента оболочки в осевом направлении

за счет растяжения и сближения его противоположных граней при изгибе равна некоторой функции $f_1(x, y)$, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = f_1(x, y). \quad (2.4)$$

Проинтегрировав выражение (2.4) по частям, получим

$$u = \int f_1(x, y) dx - \frac{1}{4} f_3^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(x + \frac{1}{2m\pi} \sin \frac{2m\pi x}{L} \right) \cos^2 \frac{ny}{R}. \quad (2.5)$$

Выполнение условия $u(0)=u(L)=0$ при $u(x, y) \neq 0$ возможно, если

$$\int f_1(x, y) dx = \frac{1}{4} f_3^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(x - \frac{1}{2m\pi} \sin \frac{2m\pi x}{L} \right) \cos^2 \frac{ny}{R}. \quad (2.6)$$

Подставив (2.6) в (2.5), находим

$$u = -\frac{1}{4} f_3^2 \frac{m\pi}{L} \sin \frac{2m\pi x}{L} \cos^2 \frac{ny}{R}. \quad (2.7)$$

После подстановки выражений (2.3) и (2.7) в (2.2), а (2.2) в (2.1) и выполнения операций дифференцирования и интегрирования получаем

$$\Delta V = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{16} f_3^2 \frac{\lambda^2}{R^2} \left(3\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) + f_3^2 \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 (\lambda^2 + n^2) \right] + f_3^2 \left[\frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 [2(1-\nu)\lambda^2 + n^2] \right] + 2f_2 f_3 n \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 [(2-\nu)\lambda^2 + n^2] \right] \right\} \frac{\pi L}{4R}, \quad (2.8)$$

где $\lambda = \frac{m\pi R}{L}$.

Дополнительная работа ΔA внешней сжимающей нагрузки

$$\Delta A = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^L \left(N_* + \frac{1}{2} N_1 \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy = 0. \quad (2.9)$$

Множитель $1/2$ при N_1 появился потому, что переход оболочки из начального недеформированного в деформированное состояние сопровождается изменением N_1 от нуля до своего максимального значения по модулю.

Внешняя нагрузка N_1 равна внутренним усилиям T_1 на краях оболочки, имея противоположное направление

$$\begin{aligned} N_1 &= -T_1(0) = -T_1(L) = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_1(0) + \nu \varepsilon_2(0) \right] = \\ &= -\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_1(L) + \nu \varepsilon_2(L) \right]; \\ N_1 &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} f_3^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \frac{ny}{R}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\text{Из (2.9) получаем } \frac{1}{16} f_3^2 \frac{\lambda^2}{R^2} = -\frac{1-\nu^2}{3} \frac{N_*}{Eh}. \quad (2.11)$$

С учетом (2.11)

$$\Delta V = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(f_2^2 a_{11} + 2f_2 f_3 a_{12} + f_3^2 a_{22} \right) \frac{\pi L}{4R}, \quad (2.12)$$

$$\text{где } a_{11} = \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \left(2(1-\nu)\lambda^2 + n^2 \right);$$

$$a_{12} = a_{21} = n \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 [(2-\nu)\lambda^2 + n^2] \right];$$

$$a_{22} = 1 + \frac{1}{12} \frac{h}{R}^2 (\lambda^2 + n^2)^2 - \frac{1-\nu^2}{Eh} N_* \left[\lambda^2 + \frac{1-\nu}{6} n^2 \right].$$

Для определения критического значения осевой сжимающей нагрузки N_* используем условия минимума потенциальной энергии для перемещений

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial f_2} = 0; \quad \frac{\partial \Delta V}{\partial f_3} = 0, \quad (2.13)$$

где учтено, что $\Delta U = \Delta V + \Delta A$, а так как $\Delta A = 0$, то $\Delta U = \Delta V$.

Из (2.13) получим систему двух уравнений

$$f_2 a_{11} + f_3 a_{12} = 0; \quad f_2 a_{21} + f_3 a_{22} = 0. \quad (2.14)$$

Система уравнений (2.14) имеет ненулевое решение при условии равенства нулю определителя из коэффициентов при параметрах f_2 и f_3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (2.15)$$

раскрыв который, получим

$$N_* = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{1}{\lambda^2 + \frac{1-\nu}{6} n^2} \left\{ \frac{1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 (\lambda^2 + n^2)^2 - n^2 \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 [(2-\nu)\lambda^2 + n^2] \right]^2}{\frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 [2(1-\nu)\lambda^2 + n^2]} \right\}. \quad (2.16)$$

Относительное значение критического усилия сжатия

$$\bar{N}_* = \frac{N_*}{N_*^e}, \quad (2.17)$$

где $N_*^e = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}$ – классическое (верхнее) критическое усилие сжатия.

Минимизация выражений (2.16) и (2.17) по целочисленным параметрам m и n позволяет находить значения критических нагрузок в абсолютных и относительных величинах для тонкостенных цилиндрических оболочек любых геометрических размеров.

По результатам минимизации выражения (2.17), для оболочек с $L/R = 2; 4; 10$, R/h изменяется от 50 до 3000, а $\nu = 0,3$, построены графики (рис. 2) изменения значений \bar{N}_* в зависимости от изменения L/R и R/h .

Используя соотношения теории пологих оболочек,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}; \varepsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \chi_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \chi_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.18)$$

получим более простые формулы для определения критических нагрузок.

После подстановки (2.18) в (2.1), выполнения интегрирования и учета (2.11) получим

$$\Delta V = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(f_2^2 a_{11} + 2f_2 f_3 a_{12} + f_3^2 a_{22} \right) \frac{\pi L}{4R}. \quad (2.19)$$

Из условия минимума потенциальной энергии для перемещений (2.13), получим систему двух уравнений, аналогичных (2.14), в которых

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2; a_{12} = a_{21} = n; \\ a_{22} &= 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 (\lambda^2 + n^2)^2 - \frac{1-\nu^2}{Eh} N_* \left(\lambda^2 + \frac{1-\nu^2}{6} \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Раскрыв определитель (2.15), с учетом (2.20), найдем выражение критического усилия сжатия, полученное на основе теории пологих оболочек N^0

$$N^0 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{1}{\lambda^2 + \frac{1-\nu}{6} n^2} \left\{ \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 (\lambda^2 + n^2)^2 \right\}. \quad (2.21)$$

Результаты расчетов значений $\bar{N}^0 = \frac{N^0}{N_0^\varepsilon}$ и погрешности $\Delta = \frac{\bar{N}^0 - \bar{N}_*}{\bar{N}_*} 100\%$, приведенные в табл. 2.1, по-

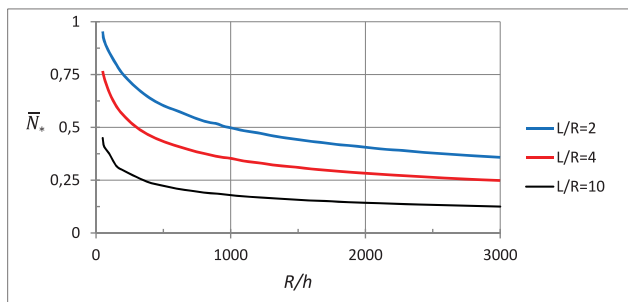


Рис. 2. Значение относительных критических усилий \bar{N}_* сжатия

зволяют сделать вывод о возможности использования формулы (2.21) для теоретических расчетов. Только длинные (большое L/R) и сравнительно толстые (малое R/h) оболочки требуют расчета по точным зависимостям (формула 2.16).

Полученные результаты теоретического исследования устойчивости гладкой свободно опертой цилиндрической оболочки при осевом сжатии хорошо совпадают с экспериментальными данными (в систематизированном виде они представлены в [4]).

3. Устойчивость свободно опертых прямоугольных пластин, равномерно сжатых в одном направлении

Пластина со сторонами a, b и толщиной h (рис. 3) сжата в своей срединной плоскости усилиями N , равномерно.

Изменение потенциальной энергии деформации пластины запишем в виде (3.1).

Деформации срединной поверхности пластины имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}; \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \chi_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \chi_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Упругую поверхность выпученной пластины представим в виде

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{4} f_3^2 \frac{m\pi}{a} \sin 2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b}; v = f_2 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}; \\ w &= f_3 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Выражение для u найдено, используя равенство (2.4) и граничные условия $u(0)=u(a)=0$ при $u(x,y) \neq 0$.

Из (2.1), с учетом (3.1) и (3.2), получаем

$$\Delta V = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{3}{16} f_3^4 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \frac{1-\nu}{6} \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] + f_2^2 a_{11} - \left[f_2 f_3^2 a_{12} + f_3^2 \frac{h^2}{12} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 \right] \right\} \frac{ab\pi}{8} \quad (3.3)$$

где

$$a_{11} = \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2; a_{12} = \frac{4(1+\nu)m}{9\pi a^2 b} (\cos m\pi - 1)(\cos n\pi - 1).$$

Таблица 2.1. Результаты расчетов относительных значений критических нагрузок \bar{N}^0, \bar{N}_* и погрешности Δ

| L/R | 2 | | | 4 | | | 10 | | | |
|------|-----|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|------------|
| | R/h | \bar{N}^0 | \bar{N}_* | $\Delta\%$ | \bar{N}^0 | \bar{N}_* | $\Delta\%$ | \bar{N}^0 | \bar{N}_* | $\Delta\%$ |
| 50 | | 0,987 | 0,955 | 3,35 | 0,782 | 0,738 | 5,96 | 0,498 | 0,450 | 10,66 |
| 100 | | 0,874 | 0,855 | 2,22 | 0,646 | 0,623 | 3,69 | 0,398 | 0,374 | 6,42 |
| 300 | | 0,696 | 0,685 | 1,60 | 0,477 | 0,469 | 1,70 | 0,274 | 0,266 | 3,00 |
| 500 | | 0,609 | 0,604 | 0,83 | 0,409 | 0,403 | 1,49 | 0,229 | 0,224 | 2,25 |
| 1000 | | 0,501 | 0,499 | 0,40 | 0,328 | 0,325 | 0,92 | 0,182 | 0,180 | 1,11 |

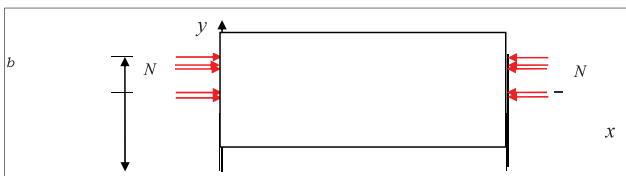


Рис. 3. Схема свободно опертой пластины, сжатой усилиями N

Работа, произведенная сжимающими усилиями при выпучивании пластины,

$$\Delta A = \frac{1}{2} \iint_0^a \left(N_* + \frac{1}{2} N_1 \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy, \quad (3.4)$$

где усилие $N_1 = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} f_3^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \cos^2 \frac{n\pi y}{b}$ (3.5)

определено из условия

$$N_1 = -T_1(0) = -T_1(a) = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \varepsilon_1(0) + \nu \varepsilon_2(0) = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \varepsilon_1(a) + \nu \varepsilon_2(a).$$

Из (3.4) получаем $\frac{3}{16} f_3^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 = -\frac{1-\nu^2}{Eh} N_*$ (3.6)

С учетом (3.6) выражение (3.3) принимает вид

$$\Delta V = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(f_2^2 a_{11} - f_2 f_3^2 a_{12} + f_3^2 a_{13} \right) \frac{\pi^2 ab}{8}, \quad (3.7)$$

где

$$a_{13} = \frac{\pi^2 h^2}{12} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 - \frac{1-\nu^2}{Eh} N_* \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \frac{1-\nu}{6} \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right].$$

Для определения N_* воспользуемся энергетическим критерием устойчивости

$$\Delta V = 0; \quad \frac{\partial \Delta V}{\partial f_2} = 0; \quad \frac{\partial \Delta V}{\partial f_3} = 0, \quad (3.8)$$

где учтено, что $\Delta A = 0$, следовательно, $\Delta U = \Delta A + \Delta V = \Delta V$.

Из (3.8) получим систему трёх уравнений

$$-f_2 a_{12} + a_{13} = 0; \quad f_2 a_{11} - \frac{1}{2} f_3^2 a_{12} = 0; \quad f_2^2 a_{11} - f_2 f_3^2 a_{12} + f_3^2 a_{13} = 0. \quad (3.9)$$

Из (3.9) находим $a_{13} = 0$, откуда получаем

$$N_* = \pi^2 D \frac{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \frac{1-\nu}{6} \left(\frac{n}{b} \right)^2}, \quad \text{где } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (3.10)$$

Наименьшее значение N^* будет получено если $n=1$, так как с увеличением n числитель возрастает намного быстрее знаменателя, и выражение для критического значения сжимающей нагрузки свободно опертой пла-

стины получает вид:

$$N_* = k_* \frac{\pi^2 D}{b^2} \quad \text{где } k_* = \frac{\left[\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right]^2}{1 + \frac{1-\nu}{6} \left(\frac{a}{mb} \right)^2}. \quad (3.11)$$

Формула (3.11) отличается от, приведенной в [5], формулы Г.Н.Вгун, $N_x = k \frac{\pi^2 D}{b^2}$, где $k = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2$ наличием в знаменателе выражения для k_* слагаемого $\frac{1-\nu}{6} \left(\frac{a}{mb} \right)^2$.

На рис. 4 представлены результаты расчетов коэффициента k^* по формуле (3.11) и коэффициента k при $\nu=0$.

Сравнение этих результатов показывает:

- формула (3.11) более точно описывает устойчивость свободно опертых пластин. Ошибка $\Delta = \frac{k - k_*}{k_*} 100\%$ в вычислениях зависит от отношения сторон пластины, а её максимум равен 21% при $a/b = 1,41$;

- минимальное значение $k_* = 3,533$ (минимальное значение $k=4$). Для практических расчетов $\frac{a}{b} \geq 2$ критических нагрузок свободно опертых пластин с отношением сторон можно рекомендовать формулу $N_* = 3,533 \frac{\pi^2 D}{b^2}$, (3.12) максимальная погрешность, при этом, не будет превышать 3%, причем, эта погрешность идёт в запас устойчивости.

На основании выше изложенного можно сделать вывод, что предложенный подход даёт хорошие результаты и при решении задач устойчивости пластин.

4. Устойчивость свободно опертого стержня

Свободно опертый стержень (рис. 4) длины L с площадью поперечного сечения F нагружен.

Изменение потенциальной энергии деформации стержня при потере устойчивости

$$\Delta V = -\frac{1}{2} E \int_0^L (F \varepsilon^2 + J \chi^2) dx, \quad (4.1)$$

где $\varepsilon = \frac{du}{dx}$; $\chi = -\frac{d^2 w}{dx^2}$; $u = -\frac{1}{4} f^2 \frac{m\pi}{L} \sin 2 \frac{m\pi x}{L}$;

$w = f \sin \frac{m\pi x}{L}$ (4.2) J – момент инерции поперечного сечения стержня, f – амплитуда прогиба оси стержня.

Из (4.1) с учетом (4.2) получаем

$$\Delta V = \frac{1}{2} E \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 f^2 \left(\frac{1}{4} f^2 F + J \right) \frac{L}{2}. \quad (4.3)$$

Дополнительная работа внешней сжимающей силы

$$\Delta A = \frac{1}{2} \int_0^L (P_* + \frac{1}{2} P) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = 0, \quad (4.4)$$

где $P = -T(0) = -T(L) = -EF \varepsilon(0) = -EF \varepsilon(L)$, $T = EF \frac{du}{dx}$ до-

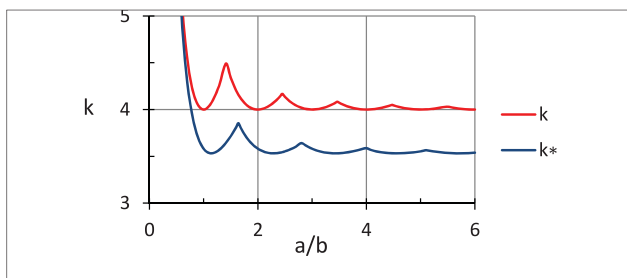


Рис. 4. Зависимость коэффициентов k и k^* от отношения сторон пластины a/b

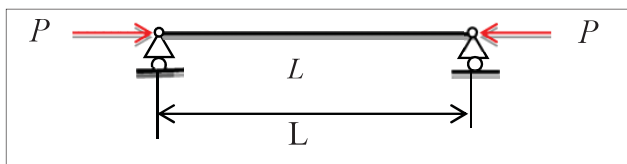


Рис. 5. Схема шарнирно опертого стержня, нагруженного сжимающими силами P

полнительная внутренняя сила, возникающая в стержне, при потере устойчивости.

$$\text{Из (4.4.) получаем } \frac{1}{4} E F f^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 = -P_*. \quad (4.5)$$

Сделав соответствующую замену в (4.3), получим

$$\Delta V = \frac{1}{2} f^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left[-P_* + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 E J \right] \frac{L}{2}. \quad (4.6)$$

Из условия минимума потенциальной энергии $\frac{d\Delta V}{df} = 0$ находим

$$P_* = \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 E J. \quad (4.7)$$

Критическая сжимающая сила P^* имеет минимальное значение при $m=1$

$$P_* = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 E J. \quad (4.8)$$

Формула (4.8) полностью совпадает с формулой Эйлера, что подтверждает правомочность предложенного подхода и в этом случае.

Основные результаты:

1. На основе принятого предположения решены задачи устойчивости свободно опертых цилиндрических оболочек, прямоугольных пластин и стержней при осевом сжатии.

2. Используя соотношения общей линейной теории тонких оболочек, получены расчетные зависимости критических нагрузок от механических характеристик материалов, геометрических параметров оболочек и параметров волнообразования, позволяющие вычислять теоретические значения критических нагрузок, близкие к экспериментальным.

3. Установлена зависимость относительных критических значений осевой сжимающей нагрузки и от отношения радиуса оболочки к ее толщине R/h , и отношения длины оболочки к ее радиусу L/R .

4. На основе теории пологих оболочек получены более простые формулы для определения критических на-

грузок оболочек и показано, что только длинные (большое L/R) и сравнительно толстые (малое R/h) оболочки требуют расчета по более точным зависимостям для N^* .

5. Получена новая формула критических нагрузок свободно опертых прямоугольных пластин, равномерно сжатых в одном направлении.

6. Получена формула для определения критической силы центрально сжатых стержней со свободно опертыми концами, которая полностью совпадает с формулой Эйлера.

Выводы

1. Предлагаемый подход можно использовать для решения задач устойчивости оболочек, пластин и стержней при осевом сжатии.

2. Предлагаемый подход совместно с учетом влияния динамики происходящих процессов, исходных и граничных условий, начальных несовершенств может приблизить исследователей к решению проблемы устойчивости и несущей способности в целом тонкостенных конструкций.

Список принятых обозначений

ΔA – дополнительная работа осевых усилий;

ΔV – изменение потенциальной энергии деформации;

x, y, z – продольная, дуговая и координата по нормали к срединной поверхности цилиндрической оболочки, декартовы координаты;

u, v, w – смещения точек срединной поверхности в направления координат x, y, z ;

R, L – радиус и длина круговой цилиндрической оболочки;

h – толщина оболочки;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ – линейные компоненты мембранной деформации срединной поверхности;

$\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$ – компоненты изгибной деформации срединной поверхности;

T_1 – погонные нормальные усилия;

ν, E – коэффициент Пуассона и модуль Юнга материала;

m, n – числа полуволов по длине и волн по окружности цилиндрической оболочки;

N^* – критическое значение осевого усилия;

N_*^e – верхнее критическое значение осевого усилия;

N^0 – критическое значение осевого усилия пологих оболочек;

\bar{N}_* – относительное критическое значение осевого усилия;

\bar{N}^0 – относительное критическое значение осевого усилия пологих оболочек;

P^* – критическая сжимающая сила стержня;

k_*, k – коэффициенты, зависящие от отношения сторон пластины;

F – площадь поперечного сечения стержня;

J – момент инерции поперечного сечения стержня.

Список литературы:

1. Греков В.Ф. Подход к решению задачи устойчивости цилиндра при осевом сжатии / В.Ф. Греков, А.А. Пьянков, В.А. Тодчук // Компрессорное и энергетическое машиностроение, 2013.– № 3(29), С. 40-42.

2. Греков В.Ф. Об устойчивости тонкостенных цилиндров / В.Ф. Греков, А.А. Пьянков, В.А. Тодчук // Компрессорное и энергетическое машиностроение, 2013.– № 3(32), С. 10-12.

3. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л. Судпромгиз, 1962, 52с.

4. Григолюк Э.И. Устойчивость оболочек. / Э.И. Григолюк, В.М. Кабанов // М.: Наука, 1978.– 127 с.

5. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. ОГИЗ – Гостехиздат, 1946, 295 с.